УДК 519.21

О близости распределений двух марковских сумм случайных величин без условия предельной пренебрегаемости

А. Н. Литвинов, И. И. Репин

Пусть

$$\xi_0^{(n)},\ \xi_1^{(n)},\ \ldots,\ \xi_n^{(n)} \text{ и } \overline{\xi}_0^{(n)},\ \overline{\xi}_1^{(n)},\ \ldots,\ \overline{\xi}_n^{(n)}$$

— две последовательности серий случайных величин таких, что последовательные суммы в каждой последовательности

$$\begin{gathered}\eta_0^{(n)} = \xi_0^{(n)}, \quad \eta_1^{(n)} = \xi_0^{(n)} + \xi_1^{(n)}, \ \ldots, \quad \eta_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{(n)}, \\ \overline{\eta}_0^{(n)} = \overline{\xi}_0^{(n)}, \quad \overline{\eta}_1^{(n)} = \overline{\xi}_0^{(n)} + \overline{\xi}_1^{(n)}, \ \ldots, \quad \overline{\eta}_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\xi}_k^{(n)}\end{gathered} \tag{1}$$

образуют цепи Маркова.

Обозначим условные функции распределения

$$\Pi_k^{(n)}(s, x) = P\{\xi_{k+1}^{(n)} < x \mid \eta_k^{(n)} = s\},$$

$$\overline{\Pi}_k^{(n)}(s, x) = P\{\overline{\xi}_{k+1}^{(n)} < x \mid \overline{\eta}_k^{(n)} = s\},$$

$$F^{(n)}(l, m, s, x) = P\{\eta_m^{(n)} - \eta_l^{(n)} < x \mid \eta_l^{(n)} = s\},$$

$$G^{(n)}(l, m, s, x) = P\{\overline{\eta}_m^{(n)} - \overline{\eta}_l^{(n)} < x \mid \overline{\eta}_l^{(n)} = s\} \qquad (n \geqslant m > l \geqslant 0).$$

Вместо условия предельной пренебрегаемости мы будем задавать близость между соответствующими слагаемыми в суммах(1) посредством псевдомоментов [1]:

$$\mu_k^{(n)}(q, s) = \int x^q d_x [\Pi_k^{(n)}(s, x) - \overline{\Pi}_k^{(n)}(s, x)] \tag{2}$$

и

$$\nu_k^{(n)}(r, s) = \int |x|^r \, |d_x [\Pi_k^{(n)}(s, x) - \overline{\Pi}_k^{(n)}(s, x)]|, \tag{3}$$

при этом q — целое неотрицательное, r — действительное неотрицательное.

Положим

$$\nu_k^{(n)}(r) = \sup_s \nu_k^{(n)}(r, s), \tag{4}$$

$$\nu^{(n)}(r) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k^{(n)}(r). \tag{5}$$

Следующая теорема определяет условия сближения двух марковских сумм случайных величин без условия предельной пренебрегаемости.

Теорема 1. *Пусть $m > 0$ такое целое число и $m \leqslant r \leqslant m+1$ такое действительное число, что для всех s и $1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется*

$$\mu_k^{(n)}(1, s) = \mu_k^{(n)}(2, s) = \ldots = \mu_k^{(n)}(m, s) = 0 \tag{6}$$

и ограничен псевдомомент $\nu^{(n)}(r)$. Пусть далее плотность $\frac{\partial}{\partial x} G^{(n)}(0, n, s, x)$ ограничена константой $A > 0$, а производные

$$\frac{\partial^q}{\partial s^q} \int e^{itx} d_x G^{(n)}(k, n, s, x)$$

до $q = m$ ограничены константой $B > 0$ (для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$), причем m-я производная принадлежит классу Гельдера с показателем не меньшим, чем $r - m$.

Тогда существует такая константа $C > 0$, что

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant C \, |\nu^{(n)}(r) \, \mathrm{A}^r|^{\frac{1}{1+r}}. \tag{7}$$

Доказательство. Исходным в доказательстве является теорема Эссеена (см., например, [2]).

Теорема. *Пусть A и T — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации. Если*

1) $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(+\infty) = G(+\infty)$;

2) $\int |F(x) - G(x)| \, dx < \infty$;

3) $G'(x) \leqslant A$ *существует при всех x и* $G'(x) \leqslant A$, *то*

$$|F(x) - G(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi} \frac{A}{T}. \tag{8}$$

В условиях теоремы 1 (8) будет выглядеть так:

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi} \frac{A}{T}, \tag{9}$$

где $f^{(n)}(0, n, s, t)$ и $g^{(n)}(0, n, s, t)$ — характеристические функции соответствующих сумм случайных величин, а $A = \sup\limits_{k} \left| \frac{\partial}{\partial x} G^{(n)}(0, k, s, x) \right|$. Константа T будет определена ниже.

В соответствии с (9) нам необходимо оценить разность характеристических функций $f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t)$, для этого представим эту разность в таком виде:

$$f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} \int e^{itx} d_x \left[\int G^{(n)}(m, n, s+z, x-z)\, d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z) - \right. \tag{10}$$
$$\left. - \int G^{(n)}(m+1, n, s+z, x-z)\, d_z F^{(n)}(n-m-1, n, s, z) \right].$$

Каждое из слагаемых в (10) на основании тождества Маркова

$$F^{(n)}(n-k, n, s, x) = \int F^{(n)}(n-k-1, n, s+u, x-u)\, d_u \Pi_k^{(n)}(s, u),$$
$$G^{(n)}(k, n, s, x) = \int G^{(n)}(k-1, n, s+u, x-u)\, d_u \overline{\Pi}_k^{(n)}(s, u)$$

может быть представлено так:

$$\iint d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z)\, d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \times$$
$$\times e^{it(z+u)} \int e^{itx} d_x G^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, x). \tag{11}$$

Очевидно, также, что (11) может быть переписано в виде:

$$\iint d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z)\, d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \times$$
$$\times [Q(s, z+u, t) - Q(s, z, t)], \tag{12}$$

где

$$Q(s, z+u, t) = e^{it(z+u)} \int e^{itx} d_x G^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, x).$$

Обозначим

$$\int e^{itx} d_x G^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, x) = g^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, t).$$

Теперь определим разность $Q(s, z+u, t) - Q(s, z, t)$, раскладывая функции $e^{it(z+u)}$ и $g^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, t)$ в ряд Тейлора по степеням u, остаточный член записываем в форме Лагранжа:

$$Q(s, z+u, t) - Q(s, z, t) = e^{it(z+u)} g^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, t) -$$
$$- e^{itz} g^{(n)}(n-m+1, n, s+z, t) =$$
$$= \left\{ \sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial s^k} g^{(n)}(n-m+1, n, s+z, t) + \right.$$

$$+\frac{u^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial s^m}[g^{(n)}(n-m+1, n, s+z+\theta u, t)-$$

$$\left.-g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)]\right\}\theta^{it(z+u)}-e^{itz}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)=$$

$$=e^{itz}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{u^{k+l}}{k!l!}(it)^l\frac{\partial^k}{\partial s^k}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)+$$

$$+R_1^{(n)}(m,\ s+z,\ u,\ t)+R_2^{(n)}(m,\ s+z,\ u,\ t)\qquad(0<\theta<1),$$

где

$$R_1^{(n)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{u^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)\left[e^{it(z+u)}-e^{itz}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{u^l}{l!}(it)^l\right],$$

$$R_2^{(n)}=e^{it(z+u)}\frac{u^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial s^m}[g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z+\theta u,\ t)-$$

$$-g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)].$$

Таким образом,

$$Q(s,\ z+u,\ t)-Q(s,\ z,\ t)=e^{itz}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{u^{k+l}}{k!l!}(it)^l\frac{\partial^k}{\partial s^k}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)+$$

$$+R_1^{(n)}(m,\ s+z,\ u,\ t)+R_2^{(n)}(m,\ s+z,\ u,\ t).\tag{13}$$

Поскольку e^{ix} является функцией, бесконечное число раз дифференцируемой, то имеет место неравенство:

$$\left|e^{it(z+u)}-e^{itz}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{u^l}{l!}(it)^l\right|\leqslant K|u|^{r-k}|t|^{r-k}\qquad(m\leqslant r\leqslant m+1).\tag{14}$$

На основании неравенства (14) оценим по модулю первый остаточный член в формуле (13):

$$|R_1^{(n)}|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{u^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)\right|\cdot K|u|^{r-k}\leqslant M|u|^r|t|^r,\tag{15}$$

где $M<\infty$.

По условию теоремы $g^{(n)}(k,\ n,\ s,\ t)$ допускает существование m-й производной по s, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем $r-m$, используя это, оцениваем второй остаточный член:

$$\begin{aligned}|R_2^{(n)}|=\Big|e^{it(z+u)}\frac{u^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial s^m}[g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z+\theta u,\ t)-\\-g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)]\Big|\leqslant\frac{|u|^m}{m!}|\theta u|^r\leqslant D|u|^r,\end{aligned}\tag{16}$$

где $D<\infty$.

Для сокращения записей обозначим:

$$e^{itz}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-k}\frac{u^{k+l}}{k!l!}(it)^l\frac{\partial^k}{\partial s^k}g^{(n)}(n-m+1,\ n,\ s+z,\ t)=S(m,\ s+z,\ u,\ t).$$

Тогда (13) представляется так:

$$Q(s, z+u, t) - Q(s, z, t) = S(m, s+z, u, t) + R_1^{(n)} + R_2^{(n)}. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (12) и учитывая (6), получим

$$\iint d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z)\, d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \times$$
$$\times [Q(s, z+u, t) - Q(s, z, t)] = \int d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z) \times$$
$$\times \int d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \cdot R_1^{(n)} +$$
$$+ \int d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z) \int d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \cdot R_2^{(n)}. \qquad (11a)$$

Оценим (11), используя при этом оценки для $R_1^{(n)}$ и $R_2^{(n)}$ в (15) и (16):

$$\Big| \iint d_z F^{(n)}(n-m, n, s, z)\, d_u [\Pi_{n-m}^{(n)}(s+z, u) - \overline{\Pi}_{n-m}^{(n)}(s+z, u)] \times$$
$$\times e^{it(z+u)} \int e^{itx} d_x G^{(n)}(n-m+1, n, s+z+u, x) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant E_k^{(n)} \nu_k^{(n)}(r) |t|^r + D_k^{(n)}(r) \leqslant C_k \nu_k^{(n)}(r) |t|^r, \qquad \sup(E_k^{(n)}, D_k^{(n)}) \leqslant C_k < \infty. \qquad (18)$$

Используя результаты (18), оценим разность $f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t)$ характ.ристических функций:

$$|f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t)| \leqslant M_1 \nu^{(n)}(r) |t|^r \qquad (M_1 < \infty). \qquad (19)$$

Подставив (19) в (9) и положив $T = \sqrt[r+1]{\dfrac{A}{M_2 \nu^{(n)}(r)}}$, получим окончательный результат:

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{M_1 \nu^{(n)}(r) |t|^r}{|t|} +$$
$$+ \frac{24}{\pi} \frac{A}{T} \leqslant C\, |\nu^{(n)}(r) A^r|^{\frac{1}{1+r}}.$$

Теорема доказана.

В случае решетчатых функций распределения имеет место такая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\Pi_k^{(n)}(s, x)$ и $\overline{\Pi}_k^{(n)}(s, x)$ — решетчатые функции распределения с максимальным шагом h и общей решеткой точек разрыва. Пусть, далее, выполняются следующие условия:*

a) $\mu_k^{(n)}(0, s) = \mu_k^{(n)}(1, s) = \ldots = \mu_k^{(n)}(m, s) = 0$ *для любого s, $k \leqslant n$ и некоторого целого $m > 0$;*

b) $\nu^{(n)}(r)$ *ограничен для некоторого $m \leqslant r \leqslant m+1$;*

c) *существуют производные $\dfrac{\partial^q}{\partial s^q} \displaystyle\int e^{itx} d_x G^{(n)}(0, n, s, x)$ до $q = n$, ограниченные при $0 \leqslant k \leqslant n$ константой $B > 0$, причем m-я производная по s принадлежит классу Гельдера с показателем $r - m$. Тогда существует константа $K > 0$ такая, что*

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant \frac{K}{2r} \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \nu^{(n)}(r),$$

равномерно по s и x.

Исходным в доказательстве является следующая формула обращения для решетчатых распределений:

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant \frac{h}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |f^{(n)}(0, n, s, t) - g^{(n)}(0, n, s, t)| \, dt.$$

На основании оценки (19) разности характеристических функций в теореме 1, получаем требуемую оценку в теореме 2:

$$|F^{(n)}(0, n, s, x) - G^{(n)}(0, n, s, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} C_1 \nu^{(n)}(r) |t|^r \, dt = \frac{K}{2r} \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \nu^{(n)}(r).$$

Доказанные теоремы являются аналогами теорем Золотарева для случая марковских сумм [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, т. 10, вып. 3, 1965.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М., 1949.
3. И. И. Гихман, Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных величин, Тр. Ин-та матем. и мех. АН УзбССР, вып. 10, ч. 1, 1953.

Поступила 9.IX 1968 г.,
после переработки — 3.XII 1970 г.

Институт математики АН УССР