УДК 517.917

Об одном признаке устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений

А. А. Мартынюк

В ряде работ [1—4] и др. прямой метод Ляпунова получил развитие в виде некоторой модификации, идея которой состоит в построении легко интегрирующего неравенства для функции Ляпунова. В статье [5] этим путем получены условия устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Целью данной заметки является изложение методики, позволяющей применить упомянутую модификацию метода Ляпунова при исследовании нелинейных систем дифференциальных уравнений.

1. Рассматриваются уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор, $f(x, t)$ — вектор-функция, компоненты которой $f_k(x, t)$-непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $x = \vec{0}$ и обращающиеся в нуль в этой точке.

Систему (1.1) представим в псевдолинейном виде

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, t)\, x, \tag{1.2}$$

где

$$\Phi(x, t) = \int_0^1 I(\vartheta x, t)\, d\vartheta, \qquad I(x, t) = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n} \tag{1.3}$$

— матрица Якоби размера $n \times n$.

Пусть в области $A \subset E^n$ существует ортонормальная последовательность функций $\psi_k(x_1, \ldots, x_n)$, по которой матрица $\Phi(x, t)$ разлагается в матричный ряд Фурье

$$\Phi(x, t) = \Omega_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.4}$$

Перепишем равенство (1.4) в виде

$$\Phi(x, t) = \Omega_0 + \Delta\Omega_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.5}$$

где

$$\Omega_0 = \Omega_0(t_0), \qquad \Delta\Omega_0(t) = \Omega_0(t) - \Omega_0(t_0),$$

и предположим, что собственные числа λ_i матрицы Ω_0 удовлетворяют неравенству

$$\lambda_i < -\alpha \qquad (\alpha > 0 - \mathrm{const}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Учитывая (1.5), система (1.2) перепишется так:

$$\frac{dx}{dt} = \left[\Omega_0 + \Delta\Omega_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n)\right] x. \tag{1.7}$$

При выполнении условий (1.6) существует определенно положительная матрица R, разрешающая уравнение

$$\Omega_0^* R + R\Omega_0 = -G, \tag{1.8}$$

где G — любая положительно определенная матрица, (*) — знак транспонирования.

Теорема 1. *Если вещественные части собственных чисел матрицы Ω_0 отрицательны и выполняется неравенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \left[\|\Delta\Omega_0(\tau)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\Omega_k(\tau)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n)\|\right] d\tau < \frac{\mu_{\min}\lambda_{\min}}{2\lambda_{\max}^2},$$

где $\mu_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — наименьшие и наибольшие собственные числа в спектрах $\vec{\mu}$ и $\vec{\lambda}$ матриц G и Ω_0 соответственно, то решение $x = 0$ системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x) = x^* R x \tag{1.9}$$

и вычислим ее полную производную по времени в силу системы (1.7):

$$\frac{dV}{dt} = x^* [\Omega_0^* R + R\Omega_0] x + 2x^* R\Delta\Omega_0 (t) x + 2x^* \left[R \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k (t) \psi_k (x_1, \ldots, x_n) \right] x. \tag{1.10}$$

Мажорируем правую часть выражения (1.10) функцией $V(x)$. Для этого построим оценки составляющих правой части.

Из экстремальной теории квадратичных форм легко найти, что

$$x^* G x \geqslant \frac{\mu_{\min}}{\lambda_{\max}} x^* R x = \frac{\mu_{\min}}{\lambda_{\max}} V(x), \tag{1.11}$$

где $\mu_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ наибольшие и наименьшие собственные числа в спектрах

$$\vec{\mu} : \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$$

и

$$\vec{\lambda} : \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

матриц G и Ω_0 соответственно.

Для других составляющих правой части (1.10) имеем

$$x^* [R\Delta\Omega_0 (t)] x \leqslant \lambda_{\min}^{-1} \| R \| \| \Delta\Omega_0 (t) \| V(x)$$

или

$$x^* [R\Delta\Omega_0 (t)] x \leqslant \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \| \Delta\Omega_0 (t) \| V(x). \tag{1.12}$$

Далее

$$x^* \left[R \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k (t) \psi_k (x_1, \ldots, x_n) \right] x \leqslant \lambda_{\min}^{-1} \| R \| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k (t) \psi_k (x_1, \ldots, x_n) \right\| V(x)$$

или

$$x^* \left[R \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k (t) \psi_k (x_1, \ldots, x_n) \right] x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k (t) \psi_k (x_1, \ldots, x_n) \| V(x). \tag{1.13}$$

Принимая во внимание (1.8), (1.10) — (1.13), равенство (1.10) преобразуется к виду

$$\frac{dV}{dt} \leqslant - \frac{\mu_{\min}}{\lambda_{\max}} V(x) + \frac{2\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \left[\| \Delta\Omega_0 (t) \| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k (t) \psi_k (x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \right] V(x). \tag{1.14}$$

Исключим из области A точку $x = \vec{0}$, т. е. будем рассматривать $V(x)$ всюду за исключением нуля.

Выполняя простые преобразования неравенства (1.14), получим:

$$V(x(t), t) \leqslant V(x_0, t_0) \exp \left\{ - \frac{\mu_{\min}}{\lambda_{\max}} (t - t_0) + \frac{2\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \times \right.$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \left[\| \Delta\Omega_0(\tau) \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k(\tau) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \right] d\tau \Bigg\} .$$

Отсюда находим, что если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \left[\| \Delta\Omega_0(\tau) \| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k(\tau) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \right] d\tau < \frac{\mu_{\min}\lambda_{\min}}{2\lambda_{\max}^2} ,$$

то $V(x(t), t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, следовательно, $\lim x(t) \to \vec{0}$.

Этим теорема доказана полностью.

Теорема 1 имеет такие следствия.

Следствие 1. *Если система* (1.7) *такова, что выполняется условие* (1.6) *и*

$$\int^{\infty} \left[\| \Delta\Omega_0(t) \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k(t) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \right] dt < k < \infty, \qquad k > 0 - \text{const},$$

то ее решение асимптотически устойчиво.

Следствие 2. *Если система* (1.7) *такова, что выполняется условие* (1.6) *и*

$$\| \Delta\, \Omega_0(t) \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k(t) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| < \delta,$$

где $\delta = \mu_{\min}/2\lambda_{\max}$, *то ее решение асимптотически устойчиво.*

Следствие 3. *Если система* (1.7) *такова, что выполняется условие* (1.6) *и*

$$\lim_{t\to\infty} \left(\| \Delta\Omega_0(t) \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \Omega_k(t) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \right) < \sigma,$$

где $\sigma = \dfrac{\lambda_{\min}\mu_{\min}}{2\lambda_{\max}^2}$, *то ее решение асимптотически устойчиво.*

2. Перепишем систему (1.2), учитывая разложение (1.4), в виде

$$\frac{dx}{dt} = \Omega(t)\, x + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right) x. \tag{2.1}$$

Рассмотрим ее решение в области

$$B = \{(t, x) : \| x \| < h,\ t \in [t_0, T]\} \qquad (-\infty < t_0 < T < \infty,\ 0 < h < \infty).$$

Пусть функции $\Omega(t)$ и $\Omega_k(t)$ такие, что выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \| \Omega(t)\, x \| \leqslant l(t) \| x \|, \\ \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t) \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right) x \right\| \leqslant \varphi(t), \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $l(t)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные функции.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (2.2) *и при начальном зна-*

чении $x(t_0) = x_0$ *на интервале* $[t_0,\ t_1]$ *выполняется неравенство*

$$\| x_0 \| \exp \int_{t_0}^{t} l(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \left[\varphi(s) \exp \int_{s}^{t} l(r)\, dr \right] ds \leqslant h,$$

то для нормы соответствующего решения $x(t)$ *системы* (2.1) *на этом же интервале имеет место двусторонняя оценка*

$$\| x_0 \| - \int_{t_0}^{t} \left[\varphi(s) \exp \int_{t_0}^{t} l(r)\, dr \right] ds \exp \left(- \int_{t_0}^{t} l(s)\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| x(t) \| \leqslant \| x_0 \| \exp \int_{t_0}^{t} l(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \left[\varphi(s) \exp \int_{s}^{t} l(\tau)\, d\tau \right] ds. \qquad (2.3)$$

Доказательство основано на тривиальном обобщении леммы Гронуолла — Беллмана с использованием леммы 2.1 [6, стр. 151].

Оценка (2.3) может быть использована для построения критериев $(\lambda,\ A,\ t_0,\ T)$-устойчивости и такого рода неустойчивости движения.

Замечание. Псевдолинейное представление (1.2) нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.1) дает возможность получить критерии устойчивости как путем рассмотрения «псевдофундаментальных матриц», так и применением быстросходящегося итерационного процесса [7]. Эти критерии будут предметом следующей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Зубов, Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, ПММ, т. 17, вып. 4, 1953.
2. Н. Н. Красовский, Достаточные условия устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 98, вып. 6, 1954.
3. Б. П. Демидович, О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений. I, Вестник МГУ, 6, 1961.
4. Б. П. Демидович, О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений. II, Вестник МГУ, 1, 1962.
5. Н. Ф. Трубицын, Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, т. 4, вып. 11, 1968.
6. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, «Наука», М., 1967.
7. А. А. Мартынюк, Об одной реализации быстросходящегося итерационного процесса решения дифференциальных уравнений и некоторых применениях, УМЖ, т. 22, № 6, 1970.

Поступила 2.XII 1969 г.

Институт математики АН УССР