УДК 517.948.34

О применении метода усреднения к решению одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром гиперболического типа

Т. В. Меликидзе

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = \gamma u + \varepsilon F\left(t, x, u, u'_t, u'_x, \int_0^t f(t, y, x, u, u'_t, u'_x)\, dy\right), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр; $F\left(t, x, u, u'_t, u'_x, \int\limits_0^t f(t, y, x, u, u_t, u'_x)\,dy\right)$ — нелинейная функция своих аргументов, по t периодическая.

Предположим, что требуется найти решение уравнения (1) с точностью до величин порядка ε^m, $m = 1, 2, \ldots$, при следующих краевых и начальных условиях:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = f_1(x), \qquad u'_t\,|_{t=0} = f_2(x), \tag{3}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие всем необходимым условиям.

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения вида (1) могут быть решены с помощью метода усреднения, разработанного Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [1, 2].

Для невозмущенного уравнения имеем задачу

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = \gamma u, \tag{4}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{5}$$

$$u\,|_{t=0} = f_1(x), \qquad u'_t\,|_{t=0} = f_2(x). \tag{6}$$

Предполагая, что $\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 - \gamma > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и решая методом Фурье, находим решение уравнения (4) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{7}$$

где $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 - \gamma}$ — частоты нормальных колебаний, а A_n и B_n — постоянные, определяемые начальными условиями (6).

Известно, что форма колебания возмущенной и невозмущенной систем определяется теми же собственными функциями, поэтому ищем решение возмущенного уравнения в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, \varepsilon) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{8}$$

где $g_n(t, \varepsilon)$ — функция, подлежащая определению. Подставляя (8) в (1), умножая результат подстановки на $\sin\frac{\pi m}{l} x$, $m = 1, 2, \ldots$, интегрируя полученное равенство по x в пределах от 0 до l и принимая во внимание ортогональность систем, получаем для определения g_n счетную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 g_m}{dt^2} + \omega_m^2 g_m = \varepsilon F_m \left(t, g_1, g_2, \ldots, \dot{g}_1, \dot{g}_2, \ldots, \int\limits_0^t \psi(t, y, g_1, \ldots, \dot{g}_1, \ldots)\,dy \right), \tag{9}$$

где F_m — нелинейная функция своих аргументов. Начальные условия для функций g_m принимают вид;

$$g_m\,|_{t=0} = f_m, \qquad \dot{g}_m\,|_{t=0} = \varphi_m, \tag{10}$$

где f_m и φ_m — коэффициенты Фурье соответствующих функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Таким образом, данная задача сведена к задаче, решаемой методом усреднения.

Приведем систему (9) к стандартной форме. Для этого введем новые медленно меняющиеся комплексно-сопряженные переменные x_n и $x_{-n} = \bar{x}_n (n = 1, 2, \ldots)$ с помощью формул:

$$g_n = x_n e^{i\omega_n t} + x_{-n} e^{-i\omega_n t}, \tag{11}$$

$$\frac{dg_n}{dt} = i x_n \omega_n e^{i\omega_n t} - i\omega_n x_{-n} e^{-i\omega_n t}. \tag{12}$$

Дифференцируя (11) и сравнивая с (12), а затем дифференцируя (12) и подставляя в (9) вместе с (11), получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{x}_n e^{i\omega_n t} + \dot{x}_{-n} e^{-i\omega_n t} = 0, \\ i\omega_n \dot{x}_n e^{i\omega_n t} - i\omega_n \dot{x}_{-n} e^{-i\omega_n t} = \varepsilon \Phi_n. \end{gathered} \tag{13}$$

Положим по определению $\omega_{-n} = -\omega_n$, $\Phi_{-n} = \Phi_n$, и разрешая систему (13) относительно $\dot{x}_n$, $\dot{x}_{-n}$, в результате получим следующую систему:

$$\dot{x}_n = \varepsilon G_n \left(t, x_k(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_k(s))\, ds \right) \; (n, k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{14}$$

Итак, вместо одного интегро-дифференциального уравнения в частных производных относительно $u(x, t)$ имеем бесконечную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения первого приближения получаются из уравнений (14) путем усреднения правых частей (14) по явно входящему времени и имеют следующий вид:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M} \left\{ G_n \left[t, \xi_k(t), \int_0^t \varphi(t, s, \xi_k(s))\, ds \right] \right\} \; (n, k = \pm 1, \ldots). \tag{15}$$

Доказательство теоремы, характеризующей оценку разности решений исходных и приближенных уравнений для малого ε на большом, но все же конечном интервале времени, дано А. Н. Филатовым [3].

В качестве примера рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = \varepsilon \int_0^l (u'_x)^2 dx \cdot u \tag{16}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{17}$$

$$u|_{t=0} = f_1(x), \; u'_t|_{t=0} = f_2(x). \tag{18}$$

Решение задачи (16) — (18) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, \varepsilon) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{19}$$

После подстановки (19) в (16), умножения на $\sin \frac{\pi m}{l} x$ и интегрируя в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, учитывая ортогональность, получаем следующую систему:

$$\frac{d^2 g_m}{dt^2} + \frac{a^2 m^2 \pi^2}{l^2} g_m = \varepsilon \frac{\pi^2}{2l} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 g_k^2 g_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

С помощью замены переменных

$$\begin{gathered} g_m = x_m e^{i\omega_m t} + x_{-m} e^{-i\omega_m t}, \\ \dot{g}_m = i\omega_m x_m e^{i\omega_m t} - i\omega_m x_{-m} e^{-i\omega_m t} \end{gathered} \tag{21}$$

преобразуем (20) к стандартной форме

$$\dot{x}_m = \frac{\varepsilon \pi^2}{4i\omega_n l} e^{-i\omega_m t} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (x_k e^{i\omega_k t} + x_{-k} e^{-i\omega_k t})^2 (x_m e^{i\omega_m t} + x_{-m} e^{-i\omega_m t}),$$

$$\dot{x}_{-m} = -\frac{\varepsilon \pi^2}{4i\omega_m l} e^{i\omega_m t} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (x_k e^{i\omega_k t} + x_{-k} e^{-i\omega_k t})^2 (x_m e^{i\omega_m t} + x_{-m} e^{-i\omega_m t}), \tag{22}$$

Усредняя правые части (22) по явно входящему времени, получаем

$$\begin{gathered} \dot{\xi}_m = \frac{\varepsilon \pi^2}{4i\omega_m l} \xi_m \left(\xi_m \xi_{-m} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \xi_k \xi_{-k} \right), \\ \dot{\xi}_{-m} = -\frac{\varepsilon \pi^2}{4i\omega_m l} \xi_{-m} \left(\xi_m \xi_{-m} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \xi_k \xi_{-k} \right). \end{gathered} \tag{23}$$

Начальные условия будут иметь вид:

$$\begin{gathered} \xi_m |_{t=0} = \frac{f_m}{2} - i \frac{\varphi_m}{2\omega_m}, \\ \xi_{-m} |_{t=0} = \frac{f_m}{2} + i \frac{\varphi_m}{2\omega_m}. \end{gathered} \tag{24}$$

Из системы (23) находим

$$\xi_m \xi_{-m} = C, \tag{25}$$

где C — произвольная постоянная. Учитывая (23) — (25), получаем

$$\begin{gathered} \xi_m = C_1 \exp \frac{\varepsilon \pi^2}{4i\omega_m l} \left[\frac{f_m^2}{4} + \frac{\varphi_m^2}{4\omega_m^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{f_k^2}{4} + \frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2} \right) \right] t, \\ \xi_{-m} = C_2 \exp \frac{-\varepsilon \pi^2}{4i\omega_m l} \left[\frac{f_m^2}{4} + \frac{\varphi_m^2}{4\omega_m^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{f_k^2}{4} + \frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2} \right) \right] t. \end{gathered} \tag{26}$$

После определения произвольных постоянных C_1, C_2, принимая во внимание (21), получаем решение (19) в следующем виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f_k\cos\left[\omega_k t-\frac{\varepsilon\pi^2}{4\omega_k l}\left[\frac{f_k^2}{4}+\frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{f_k^2}{4}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2}\right)\right]t\right]+\frac{\varphi_k}{\omega_k}\sin\left[\omega_k t-\frac{\varepsilon\pi^2}{4\omega_k l}\left[\frac{f_k^2}{4}+\frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{f_k^2}{4}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{\varphi_k^2}{4\omega_k^2}\right)\right]t\right]\right\}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1967.
4. С. А. Василишин, Применение метода усреднения к решению смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
5. З. Ф. Сирченко, Применение метода усреднения к решению уравнений в частных производных, УМЖ, т. XIV, № 2, 1962.
6. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, Изд-во АН СССР, Л., 1933.

Поступила 16.XI 1970 г.

Институт математики АН УССР