УДК 519.1

К доказательству одной теоремы Грюнбаума

А. Я. Петренюк

Предлагается вариант фрагмента доказательства теоремы из [1], в котором вместо построения применяется теорема Ф. Холла о существовании системы различных представителей [2, гл. 5].

Напомним, что раскраска неориентированного конечного графа G красками из множества K — это такое отображение c множества вершин графа G в множество K, что для любой пары смежных вершин A_1, A_2

$$c(A_1) \neq c(A_2).$$

Теорема (Грюнбаум [1]). Неориентированный граф G без петель с n вершинами, степень каждой вершины которого не превышает 3, можно раскрасить четырьмя красками так, что каждой краской будут окрашены либо $[n/4]$, либо $[n/4]+1$ вершина графа G.

В индуктивном доказательстве этой теоремы, данном в [1], фигурирует подграф графа G с множеством $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ вершин, таким, что

(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4) — ребра графа G. Окрестные вершины и ребра этого подграфа изображены так:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & B_1 & & B_2 & \text{---} & B_3 & & B_4 & & \\ & & | & & | & & & & | & & \\ B_5 & — & A_1 & — & A_2 & — & A_3 & — & A_4 & — & B_6 \end{array}$$

Некоторые из ребер

$$(A_1, B_5),\ (A_4, B_6),\ (A_i, B_i) \quad (i = 1\,(1)\,4)$$

могут отсутствовать, некоторые вершины B_j $(j = 1\,(1)\,6)$ могут быть элементами из A. Если присутствуют вершины B_2 и B_3, причем $B_2, B_3 \notin A$, то они при окраске считаются смежными*.

Вершину B_j $(j = 1\,(1)\,6)$ условимся называть запрещающей, если B_j присутствует в графе G, и притом $B_j \notin A$.

Существует ли при произвольной раскраске запрещающих вершин красками из K, $|K| = 4$, такая раскраска вершин подграфа теми же красками, что: 1) все вершины из множества A окрашены различными красками и 2) раскраска множества A согласуется с раскраской запрещающих вершин? В [1] утвердительный ответ получен посредством построения для каждой раскраски запрещающих вершин соответствующей раскраски множества. Однако, как показано ниже, этот результат естественно получается из теоремы Ф. Холла.

Пусть множество запрещающих вершин непусто (в противном случае ответ получается тривиально) и произвольно раскрашено красками из K. Обозначим через $C(A_i)$ множество красок из K, не совпадающих с теми, которыми раскрашены смежные с A_i запрещающие вершины. Очевидно,

$$|C(A_1)| \geqslant 2,\ |C(A_2)| \geqslant 3,\ |C(A_3)| \geqslant 3,\ |C(A_4)| \geqslant 2. \tag{1}$$

Задача сводится к доказательству существования системы различных представителей у набора множеств $\{C(A_i)\}_{i=1}^{4}$. По упоминавшейся теореме Ф. Холла, для ее существования необходимо и достаточно, чтобы

$$\left|\bigcup_{i \in I} C(A_i)\right| \geqslant |I| \tag{2}$$

для каждого $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Ввиду (1), эти условия выполняются при всех таких I, если $|I| < 4$. При $|I| = 4$ условия (2) могли бы не выполняться лишь в том случае, если бы некоторая краска $x \in K$ не принадлежала ни одному $C(A_i)$, $i = 1\,(1)\,4$. Это невозможно, так как, ввиду

$$c(B_2) \neq c(B_3),$$

краска, не принадлежащая $C(A_2)$, обязательно присутствует в $C(A_3)$. Отсутствие одной или нескольких запрещающих вершин, очевидно, благоприятствует выполнению условий (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Grünbaum, A result on graph — colouring, Mich. Math. Journ., 15, № 3, 1968, 381—383.
2. Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, «Мир», М., 1966.

Поступила 15.V 1969 г.
после переработки — 11.III 1970 г.

Институт кибернетики АН УССР

---

* Т. е. в случае, если ребро (B_2, B_3) в графе G отсутствует, оно вводится искусственно при доказательстве теоремы (см. [1]). Считаем, что это ребро (при отмеченных в статье условиях) присутствует. Отметим, для ясности, что после осуществления раскраски графа с добавленным ребром Б. Грюнбаум удаляет фиктивное ребро (B_2, B_3) и получает требуемую раскраску графа G.