УДК 517.5

Некоторые теоремы об устойчивой выпуклости замкнутых кривых при однолистных отображениях

Н. И. Черней

В данной статье установлены некоторые теоремы о замкнутых кривых, расположенных в некоторой области Q комплексной плоскости, образы которых при однолистных преобразованиях этой области, удовлетворяющих определенным условиям гладкости, являются выпуклыми замкнутыми кривыми. Такие замкнутые кривые области Q мы условно называем устойчиво выпуклыми относительно рассматриваемых преобразований, множество которых обозначаем в дальнейшем через $\mathfrak{M}$. Если в $\mathfrak{M}$ содержится тождественное преобразование, то все $\mathfrak{M}$-устойчиво выпуклые кривые области Q сами являются выпуклыми, что мы и будем предполагать.

1. Пусть

$$w = w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

— некоторое преобразование из $\mathfrak{M}$. Будем считать его по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемым и этого условия будем придерживаться в дальнейшем изложении.

Если кривая L области Q задана параметрическим уравнением

$$z = z(s) = x(s) + iy(s),$$

где s — длина дуги кривой L, отсчитываемая от некоторой неподвижной точки на ней, $0 \leqslant s \leqslant l$, то будем считать функции $x(s)$ и $y(s)$ тоже по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемыми периодическими с периодом l функциями, причем

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1, \; s \in [0;\; l].$$

Предполагая преобразование $w = w(z, \bar{z})$ однолистным в Q, предположим еще, что оно первого рода и, следовательно,

$$D = u_x v_y - u_y v_x = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 > 0 \text{ в } Q.$$

Можно убедиться, что кривизна K^* образа L^* кривой L при преобразовании (1) выражается через кривизну K самой кривой L в соответственных точках формулой

$$K^* = \frac{D}{D_1}\left[K - \frac{\Delta(w, \bar{w}, \tau)}{D}\right], \tag{2}$$

где

$$D_1 = \left|\frac{dw}{ds}\right|^3; \quad K = |z''(s)| = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2},$$

$$\Delta(w, \bar{w}, \tau) = \mathrm{Re}\,(A\tau^3 + 3B\tau), \quad \tau = z'(s),$$

$$A = i\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}\right),$$

$$3B = i\left(2\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\overline{z}} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial\overline{z}}\cdot\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2} - 2\,\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z\partial\overline{z}}\right).$$

Если $\mathfrak{M}$ — класс однолистных конформных отображений $w = u + iv = f(z)$, то $A = 0$ и формула (2) принимает вид [1]:

$$K^* = \frac{1}{|f'(z)|}\left[K + \operatorname{Im}\left(\tau\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right].$$

Величина $\Delta(w, \overline{w}, \tau)$ характеризует искажение кривизны K кривой L при отображении (1). Пусть $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ такие непрерывные неотрицательные в Q функции точки $M \in Q$, что в Q выполняются неравенства

$$\frac{|A|}{D} \leqslant \alpha(M); \quad \frac{|B|}{D} \leqslant \beta(M).$$

Тогда можно положить $\dfrac{|\Delta(w, \overline{w}, \tau)|}{D} \leqslant p(M)$ в Q, где $p(M) = \alpha(M) + \beta(M)$. Преобразования класса $\mathfrak{M}$ в этом случае являются преобразованиями с ограниченным искажением кривизны в каждой точке области Q. Будем называть их преобразованиями класса $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Из (2) непосредственно следует такая теорема.

Теорема 1. *Для $\widetilde{\mathfrak{M}}$-устойчивой выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой L, содержащейся в области Q, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке выполнялось неравенство*

$$K \geqslant \frac{\Delta(w, \overline{w}, \tau)}{D}$$

для любого преобразования (1) *класса $\widetilde{\mathfrak{M}}$.*

Обозначая $K_0(z) = \sup\limits_{(\tau)}\dfrac{\Delta(w, \overline{w}, \tau)}{D}$ и считая, что класс $\mathfrak{M}$ допустимых преобразований таков, что величина $K_0(z)$ непрерывна в Q ($\mathfrak{M}$ — компактный в себе класс преобразований), то из формулы (2) в качестве достаточного критерия устойчивой выпуклости кривой L следует неравенство

$$K \geqslant K_0(z),$$

где $z \in L$.

2. Известно, что если функция $f(z)$ регулярна, однолистна и выпукла в области $|z| < 1$, то она преобразует в выпуклую область любой круг, содержащийся в области $|z| < 1$, т. е. преобразует в замкнутую выпуклую кривую любую окружность

$$|z - z_0| = \varrho, \text{ где } |z_0| < 1, \text{ а } \varrho \leqslant 1 - |z_0|.$$

Возникает следующий вопрос относительно функций

$$F(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \in \Sigma^0, \tag{3}$$

регулярных и однолистных в $E_0: 0 < |z| < 1$ и преобразующих E_0 в область с выпуклым дополнением: будет ли каждая такая функция преобразовывать в замкнутую выпуклую кривую любую окружность $|z - z_0| = \rho$, где $|z_0| < 1$ и $\rho \leqslant 1 - |z_0|$? Оказывается, что это не так. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\varrho > |z_0|$ и $0 < |z_0| < \alpha_0$, где α_0 — единственный положительный корень уравнения*

$$16\alpha^6 - 24\alpha^4 + 36\alpha^2 - 1 = 0.$$

Тогда любая окружность $|z - z_0| = \varrho$, где $t_1 + |z_0| \leqslant \varrho \leqslant t_2 - |z_0|$, причем t_1 — меньший, а t_2 — больший корень уравнения $2|z_0| - t + t^3 = 0$, преобразуется каждой функцией $F(z)$ класса Σ^0 в выпуклую кривую. Других устойчиво выпуклых окружностей с $\varrho > |z_0|$ не существует.

Пусть $\varrho < |z_0| < 1$ и $0 < |z_0| < 1$. Обозначим через ϱ_0 единственный положительный корень уравнения $|z_0| - \varrho - (\varrho + |z_0|)^3 = 0$. Тогда любая окружность $|z - z_0| = \varrho$, $\varrho \in (0; \varrho_0]$ устойчиво выпукла относительно преобразований класса Σ^0. Других Σ^0-устойчиво выпуклых окружностей с $\varrho < |z_0| < 1$ не существует.

Доказательство. Из (3) следует

$$1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} = -q(z), \tag{4}$$

где $q(z)$ регулярна в $|z| < 1$, $\operatorname{Re} q(z) > 0$ в $|z| < 1$ и разложение $q(z)$ в $|z| < 1$ имеет вид:

$$q(z) = 1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

Поэтому, как легко доказать,

$$q(z) = \frac{1 + z\omega(z)}{1 - z\omega(z)}, \tag{5}$$

где $\omega(z)$ регулярна в $|z| < 1$, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ в $|z| < 1$. Из (4) и (5) следует

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{(z - z_0) F''(z)}{F'(z)}\right] = \frac{2\operatorname{Re}(z_0\bar{z}) - |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z_0\bar{z}^2\bar{\omega}(z)) + |\omega(z)|^2 \cdot |z|^4}{|z|^2 \cdot |1 - z\omega(z)|^2}. \tag{6}$$

Предположим, что окружность $|z - z_0| = \varrho$ такова, что $0 < \varrho - |z_0| < \varrho + |z_0| < 1$, т. е. она охватывает точку $z = 0$. Будем обозначать $|z_0| = \alpha$. При $\varrho > |z_0| = \alpha$ точка $F(z)$ пробегает образ окружности $|z - z_0| = \varrho$ по часовой стрелке, когда z пробегает $|z - z_0| = \varrho$ против часовой стрелки. Поэтому, если окружность $|z - z_0| = \varrho$ преобразуется в выпуклую кривую, то числитель в правой части формулы (6) должен быть не больше нуля на этой окружности при любом выборе функции $\omega(z)$, которая, как известно, удовлетворяет условию $|\omega(z)| \leqslant |z|$.

Следовательно, должно быть

$$2\operatorname{Re}(\overline{z_0 z}) - |z|^2 + 2\alpha|z|^3 + |z|^6 \leqslant 0,$$

когда $|z - z_0| = \varrho$. Если считать, что $|z|$ фиксирован и $0 < \varrho - \alpha \leqslant |z| \leqslant \varrho + \alpha < 1$, то нужно найти $\max \operatorname{Re}(z_0\bar{z})$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = \alpha > 0$. Поэтому $\operatorname{Re}(z_0\bar{z}) = \alpha \operatorname{Re}(\bar{z})$, а тогда $\max \operatorname{Re}(z_0\bar{z}) = \alpha|z|$. Итак, нужно, чтобы

$$2\alpha|z| - |z|^2 + 2\alpha|z|^3 + |z|^6 \leqslant 0 \text{ или } (|z|^3 + |z|)(2\alpha - |z| + |z|^3) \leqslant 0.$$

Следовательно, должно быть

$$2\alpha - t + t^3 \leqslant 0, \tag{7}$$

где

$$\varrho - \alpha \leqslant t \leqslant \varrho + \alpha. \tag{8}$$

Исследование неравенства (7) при условии (8) приводит нас к результату, сформулированному в первой части теоремы.

Теперь рассмотрим окружности, у которых $|z_0| > \rho$, т. е. не охватывающие точку $z = 0$. Пусть $z_0 = \alpha > 0$, $\alpha \in (0; 1)$. Тогда при фиксированном $|z| \in [\alpha - \rho; \alpha + \rho]$ и фиксированном $0 \leqslant |\omega| \leqslant |z|$ минимум числителя правой части в формуле (6) равен $I = (\alpha - |\omega| \cdot |z|^2)^2 - \rho^2$.

Так как на всей окружности $|z - \alpha| = \varrho$ имеем $\alpha \geqslant |z|^3$, то, в частности, $\alpha \geqslant (\alpha + \varrho)^3$ и

$$\min I = (\alpha - \varrho - |z|^3)(\alpha + \varrho - |z|^3) \geqslant 0 \tag{9}$$

при $\alpha - \varrho \leqslant |z| \leqslant \alpha + \varrho$. Исследуя неравенство (9), приходим к результату во второй части теоремы.

3. Рассмотрим теперь класс функций $\widetilde{\Sigma}^0$

$$F(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots, \tag{10}$$

регулярных, однолистных и выпуклых в области $1 < |z| < \infty$, т. е. отображающих эту область на область с выпуклым дополнением.

При каких условиях окружность $|z - z_0| = \varrho$, где $|z_0| > 1$, $\varrho < |z_0| - 1$, т. е. не охватывающая окружность $|z| = 1$, или окружность $|z - z_0| = \varrho$, где $0 \leqslant |z_0| < \infty$ и $\varrho \geqslant |z_0| + 1$, т. е. охватывающая $|z| = 1$, преобразуются в замкнутые выпуклые кривые?

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Если* $|z_0| > 1$ *и* $\varrho < |z_0| - 1$, *то каждая окружность* $|z - z_0| = \varrho$, $\varrho \leqslant |z_0| - t_0$, *где* t_0 — *единственный корень уравнения* $t^3 + t - 2|z_0| = 0$, устойчиво выпукла относительно класса $\widetilde{\Sigma}^0$ *функций, выпуклых в* $1 < z < \infty$. *Других* $\widetilde{\Sigma}^0$*-устойчиво выпуклых окружностей, не охватывающих окружность* $|z| = 1$, *не существует.*

Если $0 \leqslant |z_0| < \infty$ *и* $\varrho \geqslant |z_0| + 1$, *то каждая окружность* $|z - z_0| = \varrho$, $\varrho \geqslant |z_0| + t_0$, *где* t_0 — *единственный положительный корень уравнения:* $t^3 - t - 2|z_0| = 0$, *является устойчиво выпуклой относительно класса* $\widetilde{\Sigma}^0$ *функций, выпуклых в* $1 < |z| < \infty$. *Других* $\widetilde{\Sigma}^0$*-устойчиво выпуклых окружностей, охватывающих* $|z| = 1$, *не существует.*

Доказательство. Из (10) следует

$$1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} = 1 + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \ldots = p\left(\frac{1}{z}\right), \tag{11}$$

где $p\left(\frac{1}{z}\right)$ регулярна в $1 < |z| < \infty$, $\operatorname{Re} p\left(\frac{1}{z}\right) > 0$ в $1 < |z| < \infty$. Из (11) получаем

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{(z - z_0)F''(z)}{F'(z)}\right) = \operatorname{Re}\frac{zp\left(\frac{1}{z}\right) - z_0 p\left(\frac{1}{z}\right) + z_0}{z}.$$

Сделаем замену $z = \frac{1}{\zeta}$, тогда

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{(z - z_0)F''(z)}{F'(z)}\right) = \operatorname{Re}\left[p(\zeta) - z_0\zeta p(\zeta) + z_0\zeta\right]. \tag{12}$$

Так как $p(\zeta) = \frac{1 + \zeta\omega(\zeta)}{1 - \zeta\omega(\zeta)}$, где $\omega(\zeta)$ регулярна в $|\zeta| < 1$, $\omega(0) = 0$, $|\omega(\zeta)| < 1$ в $|\zeta| < 1$, то из (12) получаем

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{(z - z_0)F''(z)}{F'(z)}\right] = \frac{1 - |\zeta|^2|\omega(\zeta)|^2 - 2\operatorname{Re}(z_0\zeta^2\omega(\zeta)) + 2\operatorname{Re}(z_0\zeta)|\zeta\omega(\zeta)|^2}{|1 - \zeta\omega(\zeta)|^2} \tag{13}$$

Здесь можно считать $z_0 > 1$ и

$$|\zeta - l| = R, \tag{14}$$

где

$$l = \frac{z_0}{z_0^2 - \varrho^2}, \text{ а } R = \frac{\varrho}{z_0^2 - \varrho^2}, \quad \varrho > 0, \ z_0 - \varrho > 1.$$

Минимум числителя в (13) при $|\zeta| = \text{const}$ и $\frac{1}{z_0+\varrho} \leqslant \zeta \leqslant \frac{1}{z_0 - \varrho}$ равен

$$I = [1 - |\omega|(\varrho + z_0)|\zeta|^2][1 - |\omega|(z_0 - \varrho)|\zeta|^2].$$

Так как $I \geqslant 0$, то должно быть $1 - |\omega|(\varrho + z_0)|\zeta|^2 \geqslant 0$ или, так как $|\omega| \leqslant |\zeta|$, то $1 - (\varrho + z_0)|\zeta|^3 \geqslant 0$. Максимальное значение $|\zeta|$ на окружности (14) есть $\frac{1}{z_0 - \varrho}$. Следовательно, должно быть

$$(z_0 - \varrho)^3 - \varrho - z_0 \geqslant 0.$$

Полагая $z_0 - \varrho = t$, получаем $t^3 + t - 2z_0 \geqslant 0$. Если обозначить через t_0 единственный корень уравнения $t^3 + t - 2z_0 = 0$, то $\varrho = z_0 - t_0$, причем $t_0 > 1$ и $t_0 < z_0$, и мы приходим к результату первой части теоремы.

Пусть теперь окружность $|z - z_0| = \varrho$ охватывает границу $|z| = 1$, т. е. $\varrho - |z_0| \geqslant 1$. В этом случае при преобразовании $z = \frac{1}{\zeta}$ получаем окружность, охватывающую точку $\zeta = 0$. Минимум числителя в (13), если считать $z_0 \geqslant 0$ и $\varrho - |z_0| \geqslant 1$, равен

$$I = [1 - |\omega|(\varrho + z_0)|\zeta|^2][1 - |\omega|(\varrho - z_0)|\zeta|^2] \geqslant 0.$$

Опять должно выполняться неравенство

$$1 - |\omega|(\varrho + z_0)|\zeta|^2 \geqslant 0,$$

из которого легко получаем результат второй части теоремы.

В заключение выражаю благодарность В. А. Зморовичу и рецензенту статьи за ценные указания при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зморович, Про границі коливання кривизни образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях, ДАН УРСР, вип. 4, 1959.

Поступила 10.III 1969 г.,
после переработки — 18.IV 1970 г.
Киевский политехнический институт