1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.948.35

Обобщенная степенная симметрическая проблема моментов

Ю. М. Березанский, С. Н. Шифрин

§ 1. Формулировка результатов

Центральным фактом теории степенной проблемы моментов является нахождение условий на числовую последовательность $s_{\mathbf{n}}$, где $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_M)$ пробегает целочисленные точки из $\underbrace{[0, \infty) \times \ldots \times [0, \infty)}_{M}$, обеспечивающих представление

$$s_{\mathbf{n}} = \int_{\mathbf{R}^M} \lambda^{\mathbf{n}} d\varrho (\lambda) \, (\lambda^{\mathbf{n}} = \lambda_1^{n_1} \ldots \lambda_M^{n_M}, \; \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)) \tag{1.1}$$

с некоторой неотрицательной конечной мерой $d\varrho(\lambda)$. В одномерном случае ($M = 1$, $\mathbf{n} = n$) необходимым и достаточным условием существования представления (1.1) является моментность последовательности $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, т. е. положительная определенность (п. о.) матрицы $(K_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, $K_{jk} = s_{j+k}$. В многомерном случае необходимо еще наложить на рост $s_{\mathbf{n}}$ дополнительные ограничения, обеспечивающие самосопряженность соответствующих операторов (случай определенной проблемы моментов) или дающие возможность расширить возникающие здесь эрмитовые операторы до коммутирующих самосопряженных (см., например, [1, гл. VIII, § 5, пп. 4—7]). Аналогичная ситуация имеет место и в бесконечномерном случае, когда $M = \infty$ [2]. В этой статье обобщается представление (1.1) на случай, когда роль s_n играют функционалы над n-й тензорной степенью ядерного пространства. Ее результаты содержались в докладе одного из авторов на конференции по операторам в гильбертовом пространстве и операторным алгебрам (Венгрия, Тихань, 14—18 сентября 1970 г.)*.

Все пространства, рассматриваемые ниже, предполагаются сепарабельными. В дальнейшем л. о. (A) и в. л. о. (A) обозначают линейную и вещественную линейную оболочки множества A; $\mathfrak{D}(B)$ и $\mathfrak{R}(B)$ — области определения и значения оператора B; $H^n = \underbrace{H \otimes \ldots \otimes H}_{n}$ $(n = 1, 2, \ldots;$ $H^0 = \mathbf{C})$ — тензорная степень гильбертова пространства H.

Пусть $\mathfrak{H} = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau$ — некоторое ядерное пространство ($\mathfrak{H}_\tau$ — образующие его гильбертовы пространства), $\mathfrak{H}^n = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau^n$ — тензорная степень $\mathfrak{H}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $(\mathfrak{H}^n)' = \bigcup_{\tau \in T} (\mathfrak{H}_\tau^n)'$ — сопряженное пространство антилинейных функ-

* А также и в его лекции в Зимней школе по аксиоматическому подходу и высшим симметриям в теории частиц (Ужгород, 22—24 января 1971 г.) (примечание при корректуре).

ционалов. Предположим, что в $\mathfrak{H}$ задана инволюция $f \to \bar{f}$, которая по непрерывности может быть распространена до инволюции в каждом $\mathfrak{H}_\tau$. Посредством образования тензорных степеней и перехода к сопряженным операторам она естественным образом распространяется до инволюций в тензорных степенях и сопряженных пространствах; для этих инволюций мы сохраняем обозначение «—». Посредством индекса Re указывается, что рассматриваются вещественные относительно инволюции элементы данного пространства. Например, $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$ — пространство всех $\alpha \in \mathfrak{H}'$ таких, что $\bar{\alpha} = \alpha$.

Рассмотрим последовательность $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$, где $S_n \in (\mathfrak{H}^n)'$ и полностью симметрично (т. е. $S_n(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)$ является симметрической функцией от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{H}$). S назовем *моментной*, если выполнено условие п. о.: для любой финитной последовательности $u = (u_j)_{j=0}^{\infty}$ $(u_j \in \mathfrak{H}^j)$ (их совокупность обозначим C_0)

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} S_{j+k}(u_j \otimes \bar{u}_k) \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Так как $S_n \in (\mathfrak{H}^n)' = \bigcap_{\tau \in T} (\mathfrak{H}_\tau^n)'$, то найдется такое $\tau = \tau(n)$, что $S_n \in (\mathfrak{H}^n_{\tau(n)})'$ $(n = 0, 1, \ldots)$; последовательность $(\tau(n))_{n=0}^{\infty}$ в дальнейшем будет фигурировать часто. Зафиксируем некоторое множество $\mathfrak{E}$ вещественных векторов из $\mathfrak{H}$, для которых л. о. $(\mathfrak{E})$ плотная в $\mathfrak{H}$, и обозначим $d(\tau, \mathfrak{E}) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{E}} \| \varphi \|_{\mathfrak{H}_\tau} \leqslant \infty$. Будем говорить, что S *определенная*, если класс

$$C\{M_n\}, \quad M_n = d^n(\tau(4n), \mathfrak{E}) \, \| S_{4n} \|^{\frac{1}{4}}_{(\mathfrak{E}^{4n}_{\tau(4n)})'} \tag{3.1}$$

квазианалитический. Мы также будем рассматривать более общий случай *квазиопределенной* S, когда предыдущее условие выполняется с тем изменением, что замыкание л. о. $(\mathfrak{E})$ отстает от $\mathfrak{H}$ на одно измерение и в (3.1) вместо S_{4n} фигурирует ортогональная проекция этого вектора на $(\mathfrak{L}^{4n}_{\tau(4n)})'$, где $\mathfrak{L}_\tau$ — замыкание л. о. $(\mathfrak{E})$ в $\mathfrak{H}_\tau$*.

Теорема. *Пусть $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ — моментная последовательность, удовлетворяющая условиям определенности или квазиопределенности. Утверждается, что существует конечная неотрицательная мера $d\varrho(\lambda)$, заданная на σ-алгебре множеств из $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$, такая, что*

$$S_n = \int_{\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} \, d\varrho(\lambda) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.1}$$

Здесь интегрируется вектор-функция $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}} \ni \lambda \to \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} \in (\mathfrak{H}^n)'$, интеграл сходится слабо. Если S определенная, то мера $d\varrho(\lambda)$ находится однозначно (в квазиопределенном случае однозначности, вообще говоря, нет). Обратно, всякая последовательность вида (4.1) является моментной.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся этой формулировки: а) из

---

* Поясним, что в определенном случае операторы сдвига, связанные с S, самосопряжены и коммутируют; в квазиопределенном один из этих операторов эрмитов, однако его можно расширить до самосопряженного, коммутирующего с остальными. Подобно многомерной проблеме моментов нетрудно, анализируя доказательства лемм 2 и 3, дать более тонкие определения определенности и квазиопределенности. В частности, для определенности можно M_n из (3.1) заменить на $M_n = d^n(\tau(2n), \mathfrak{E}) \, \| S_{2n} \|^{\frac{1}{2}}_{(\mathfrak{H}^{2n}_{\tau(2n)})'}$. Доказательство теоремы, которая сейчас будет сформулирована, по существу, состоит из двух частей: 1) установления возможности расширения операторов сдвига до самосопряженных коммутирующих и 2) доказательства представления (4.1), причем для проведения этой второй части несущественен вид условий на S, обеспечивающих существование расширений.

(4.1) видно, что S_n вещественно — это, конечно, сразу следует и из (2.1); б) говоря об однозначности меры $d\varrho(\lambda)$ мы имеем в виду однозначность в классе мер, определяющихся своими значениями на цилиндрических множествах вида $Ц_\Delta = \{\lambda \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}} \mid (\lambda(\varphi_1), \ldots, \lambda(\varphi_n)) \in \Delta\}$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in$ в. л. о. $(\mathfrak{E})$, а Δ — борелевское множество из $\mathbf{R}^n$. Мера, существование которой утверждается в теореме, принадлежит этому классу; в) при доказательстве теоремы мы покажем, что мера $d\varrho(\lambda)$ в действительности сосредоточена на некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'_{\tau_0,\mathrm{Re}}$, зависящем от S.

Вкратце остановимся на другой возможной интерпретации этой теоремы. Превратим C_0 в алгебру с единицей $\varepsilon = (1, 0, 0, \ldots)$ и инволюцией, вводя «покоординатное» сложение и умножение на скаляр и полагая $(u * v)_n = \sum\limits_{j+k=n} u_j \otimes v_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Инволюцию $\leftarrow$ определим соответствием $C_0 \ni u = (u_j)_{j=0}^\infty \to \overleftarrow{u} = (\overleftarrow{u_j})_{j=0}^\infty \in C_0$, где $\overleftarrow{u_j}$ на простейших элементах $u_j = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_j$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_j \in \mathfrak{H})$ равно $\overline{\varphi_j} \otimes \ldots \otimes \overline{\varphi_1}$ и затем распространено по антилинейности и непрерывности на все $\mathfrak{H}^j$. Последовательность $S = (S_n)_{n=0}^\infty$ $(S_n \in (\mathfrak{H}^n)')$ порождает линейный функционал $l_S(u) = \sum\limits_{n=0}^\infty S_n(\overleftarrow{u_n})$ на C_0, условие п. о. которого имеет вид $\sum\limits_{j,k=0}^\infty S_{j+k}(u_j \otimes \overleftarrow{u_k}) = l_S(\overleftarrow{u} * u) \geqslant 0$. Сформулированная теорема описывает такие функционалы, обладающие дополнительным условием полной симметрии S_n. Это условие имеет следующий алгебраический смысл: определим по l_S обычным образом представление $C_0 \ni u \to A_u$ алгебры C_0 операторами в гильбертовом пространстве. Тогда симметрия эквивалентна коммутируемости всех операторов алгебры $\{A_u\}_{u \in C_0}$.

Хорошо известно, что п. о. функции $f(u) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda u}\, d\varrho(\lambda)$ $(u \in \mathbf{R}^1)$ и обычные моментные последовательности $s = (s_n)_{n=0}^\infty$ тесно связаны; если $f(u)$ п. о., то $s_n = (-i)^n \left(\dfrac{d^n f}{du^n}\right)(0)$ моментна. Мы здесь лишь упомянем, что аналогичные связи имеют место и между рассматриваемыми сейчас моментными последовательностями и п. о. функциями $f(u)$ от $u \in \mathfrak{H}$ и теоремой Р. А. Минлоса — В. В. Сазонова об их представлении. Мы также не будем касаться связей со случайными процессами — отметим только, что наша теорема по существу описывает внутренним образом совокупность всех моментов такого процесса.

Представления, подобные (4.1), появились в связи с желанием описать объекты, удовлетворяющие хотя бы частично аксиоматике Вайтмана в теории поля [3, 4]. Именно, одним из авторов в [5—8] (подробные доказательства см. в [9—11]) была развита теория обобщенной степенной проблемы моментов, центральным фактом которой было получение представления типа (4.1) для последовательностей типа S_n, удовлетворяющих лишь частичному условию симметрии. Это представление доказывалось посредством разложения по общим собственным векторам коммутативного подмножества самосопряженных операторов, взятых из уже некоммутативного множества $\{A_u\}_{u \in C_0}$. Запас этих коммутирующих операторов был сравнительно узок — отсутствовал циклический вектор, порождающий все гильбертово пространство, и их общий спектр был вырожден. Поэтому вместо скалярной меры $d\varrho(\lambda)$ в представлении типа (4.1) появлялась операторнозначная мера. Позже В. П. Гачок [12—14] впервые обнаружил, что для евклидовой теории поля представляет интерес изучение полностью симметричных последовательностей S_n. Ниже мы применяем схему работ [1, 6—10], модифицированную согласно [5, стр. 10—12] и [15, стр. 488—492]. Как уже говорилось, C_0 является алгеброй, поэтому для доказательства теоремы можно было бы воспользоваться и схемой работы [2], однако оновные этапы доказательства при этом были бы такими, как и изложенные ниже.

Приведем некоторые примеры.

Предварительно несколько детализируем обычное построение $\mathfrak{H}$ по $\mathfrak{H}_\tau$. Пусть $\mathfrak{H}_\tau\,(\tau \in \mathrm{T})$ — гильбертовы пространства, которые без ограничения общности можно считать плотными множествами объемлющего гильбертова пространства $\mathfrak{H}_0$ $(0 \in \mathrm{T})$, причем вложение $\mathfrak{H}_\tau \to \mathfrak{H}_0$ непрерывно. Предполагается, что $\mathfrak{H} = \bigcap_{\tau \in \mathrm{T}} \mathfrak{H}_\tau$ плотно в каждом $\mathfrak{H}_\tau$ и для любых $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$ найдется $\tau''' \in \mathrm{T}$ такое, что $\mathfrak{H}_{\tau'''} \subseteq \mathfrak{H}_{\tau'}, \mathfrak{H}_{\tau''}$, причем вложения $\mathfrak{H}_{\tau'''} \to \mathfrak{H}_{\tau'}$ и $\mathfrak{H}_{\tau'''} \to \mathfrak{H}_{\tau''}$ квазиядерны (т. е. Гильберта—Шмидта). Тогда $\mathfrak{H}$ можно превратить в ядерное пространство, наделив его топологией проективного предела. Обозначим $\mathfrak{H}_{-\tau} \supseteq \mathfrak{H}_0 \supseteq \mathfrak{H}_\tau$ цепочку, построенную по нулевому пространству $\mathfrak{H}_0$ и позитивному $\mathfrak{H}_\tau$ (по поводу этих понятий см. [1, гл. 1]), тогда $\mathfrak{H}_\tau' = \mathfrak{H}_{-\tau}$ и $\mathfrak{H}' = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}} \mathfrak{H}_{-\tau}$. Ядерное пространство $\mathfrak{H}^n$ и сопряженное к нему $(\mathfrak{H}^n)'$ строятся аналогично по $\mathfrak{H}_\tau^n$ и $(\mathfrak{H}_\tau^n)' = \mathfrak{H}_{-\tau}^n$. Действие функционала $\alpha_n \in (\mathfrak{H}^n)'$ на вектор $u_n \in \mathfrak{H}^n$ во всем дальнейшем удобно записывать не в виде $\alpha_n(u_n)$, а в виде $(\alpha_n, u_n)_{\mathfrak{H}_0^n}$.

1) Пусть $\mathrm{T} = \{0\}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathbf{C}^M\,(M = 1, 2, \ldots)$, инволюция — обычный переход к комплексному сопряжению. Сейчас $S_n \in (\mathfrak{H}^n)' = \mathbf{C}^{nM}$, и в силу полной симметрии этому вектору отвечает набор координат $s_{n_1, \ldots, n_M} = s_\mathbf{n}$, где $n_1, \ldots, n_M = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_M)$, $n_1 + \ldots + n_M = n$ (если $e_1, \ldots, e_M$ — базис в $\mathbf{C}^M$, то $s_{n_1, \ldots, n_M}$ — координата вектора S_n при орте $e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_M}$ в $\mathbf{C}^{nM}$, если среди набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ встречается n_1 индексов 1, n_2 индексов 2 и т. д.; порядок вхождения индексов безразличен благодаря симметрии S_n). Условие (2.1) переходит в обычное условие моментности: $\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} s_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} \bar{\xi}_\mathbf{j} \xi_\mathbf{k} \geqslant 0$, а представление (4.1), записанное покоординатно, — в (1.1). Таким образом, мы охватили обычную M-мерную проблему моментов с некоторыми условиями на рост $s_\mathbf{n}$, обеспечивающими ее разрешимость (как уже говорилось, эти условия можно уточнять).

2) Пусть $\mathrm{T} = \{0, 1, \ldots\}$, $\mathfrak{H}_\tau$ — соболевское пространство $W_2^\tau(\mathbf{R}^N, (1 + |x|^2)^\tau dx)$ — пополнение класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{W_2^\tau(\mathbf{R}^N, (1+|x|^2)^\tau dx)} = \sum_{|\alpha| \leqslant \tau} \int_{\mathbf{R}^N} (D^\alpha u)(x)\, \overline{(D^\alpha v)(x)}\, (1 + |x|^2)^\tau dx. \qquad (5.1)$$

Нетрудно показать, что соответствующее ядерное пространство совпадает с пространством Л. Шварца $S(\mathbf{R}^N)$, состоящим из функций класса $C^\infty(\mathbf{R}^N)$, убывающих на ∞ быстрее любой степени $|x|^{-1}$, $\mathfrak{H}^n = S(\mathbf{R}^{nN})$ (поясним, что вложение $\mathfrak{H}_{\tau+l} \to \mathfrak{H}_\tau\,(\tau = 0, 1, \ldots)$ при $l > N/2$ квазиядерно, это следует из [10, теорема 1.3]). Последовательность S_n состоит из обобщенных функций умеренного роста; именно этот случай интересен для теории поля. Возможен такой выбор $\mathfrak{E}$, л. о. которого плотная в $S(\mathbf{R}^N)$, что

$$d(\tau, \mathfrak{E}) \leqslant \tau^{(N+\varepsilon)\tau} \quad (\varepsilon > 0) \qquad (6.1)$$

Отсюда вытекает условие определенности для нашей S (на условиях квазиопределенности S мы останавливаться не будем). Наметим доказательство этого результата. В случае общего пространства $\mathfrak{H} = \bigcap_{\tau \in \mathrm{T}} \mathfrak{H}_\tau$, где $\mathrm{T} = \{0, 1, \ldots\}$, выбор $\mathfrak{E}$ можно производить следующим образом. Пусть $\delta = (\delta_\tau)_{\tau=0}^\infty$ $(\delta_\tau > 0)$ — числовая последовательность. Введем скалярное произведение $(\varphi, \psi)_{S_+(\delta)} = \sum_{\tau=0}^\infty (\varphi, \psi)_{\mathfrak{H}_\tau} \delta_\tau^2$, определенное на тех $\varphi \in \mathfrak{H}$, для которых $(\varphi, \varphi)_{S_+(\delta)} < < \infty$; эти φ составляют гильбертово пространство $S_+(\delta)$. В качестве $\mathfrak{E}$ можно выбрать шар $\| \cdot \|_{S_+(\delta)_{\mathrm{Re}}} < 1$, тогда $d(\tau, \mathfrak{E}) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{E}} \| \varphi \|_{\mathfrak{H}_\tau} \leqslant \sup_{\varphi \in \mathfrak{E}} \delta_\tau^{-1} \times \times \| \varphi \|_{S_+(\delta)} = \delta_\tau^{-1}$, при этом, если $S_+(\delta)$ будет плотным в $\mathfrak{H}$, то таким же будет и л. о. $(\mathfrak{E})$. Итак, для доказательства оценки (6.1) достаточно показать, что пространство $S_+(\delta)$, построенное по $\mathfrak{H}_\tau = W_2^\tau(\mathbf{R}^N, (1 + |x|^2)^\tau dx)$ и $\delta_\tau = \tau^{-(N+\varepsilon)\tau}$, будет плотным в $S(\mathbf{R}^N)$ (подобные пространства $S_+(\delta)$ впервые изучались в [16]). Убедиться в плотности можно следующим образом. Рассмотрим пространство S_α^β функций точки $x \in \mathbf{R}^N$ с N-мерными векторными индексами α, β [17]. Оценивая норму $\| \varphi \|_{S_+(\delta)}$, можно проверить, что $S_\alpha^\beta \subseteq S_+(\delta)$ при $|\alpha| + |\beta| < N + \varepsilon$. Но, как следует из [17], S_α^β при $\alpha = = \beta = (1/2 + \varepsilon_1, \ldots, 1/2 + \varepsilon_1)$ $(\varepsilon_1 > 0)$ плотно в $S(\mathbf{R}^N)$, откуда и вытекает утверждение.

3) Аналогично 2) может быть рассмотрен случай, когда $\mathfrak{H}$ — пространство С. Л. Соболева — Л. Шварца $D(\mathbf{R}^N)$ финитных функций. Сейчас T состоит из пар $\tau = (\tau_1, \tau_2(x))$, где $\tau_1 = 0, 1, \ldots$, а $C^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \tau_2(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbf{R}^N)$ — вес. Пространством $\mathfrak{H}_\tau$ служит соболевское пространство $W_2^{\tau_1}(\mathbf{R}^N, \tau_2^2(x)\, dx)$ (сейчас в выражении (5.1) нужно τ и $(1 + |x|^2)^\tau$ заменить на τ_1 и $\tau_2^2(x)$).

4) Можно подобно примерам 2), 3) рассмотреть в качестве пространств $\mathfrak{H}_\tau$ семейство пространств l_2 (счетное или нет) с различными весами. Тогда роль $\mathfrak{H}'$ будет играть некоторое пространство последовательностей и рассмотрения типа примера 1) приведут к бесконечномерной проблеме моментов. Это дает возможность получить результаты, близкие теореме 5.4 из [2].

5) Остановимся на случае моментных последовательностей S, составленных из элементов негативных гильбертовых пространств. Пусть $\mathfrak{H}_{-1} \supseteq \supseteq \mathfrak{H}_0 \supseteq \mathfrak{H}_1$ — цепочка с инволюцией, ее всегда можно рассматривать как часть цепочки с инволюцией $\ldots \supseteq \mathfrak{H}_{-2} \supseteq \mathfrak{H}_{-1} \supseteq \mathfrak{H}_0 \supseteq \mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}_2 \supseteq \ldots$, образующей ядерное пространство $\mathfrak{H}$. Поэтому, если $S_n \in \mathfrak{H}_{-1}^n$, то $S_n \in (\mathfrak{H}^n)'$ и можно написать представление (4.1) с мерой $d\varrho(\lambda)$, сосредоточенной на $\mathfrak{H}_{-\tau_0, \mathrm{Re}}$. Благодаря достаточной произвольности $\mathfrak{H}$ в качестве $\mathfrak{H}_{-\tau_0, \mathrm{Re}}$ может быть взято любое пространство $\mathfrak{H}_{-2, \mathrm{Re}}$, для которого соответствующее позитивное пространство $\mathfrak{H}_2$ вложено в $\mathfrak{H}_1$ квазиядерно (это видно из рассуждений на стр. 305). Так как теперь $\tau(n) = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то, например, условие определенности выглядит так: класс $C\{ \| S_{2n} \|_{\mathfrak{H}_{-1}^{2n}}^{1/2} \}$ — квазианалитический.

6) В работе [9, стр. 18] показано, что если моментная последовательность $S = (S_n)_{n=0}^\infty$ состоит из достаточно гладких функций $S_n = S_n(x_1, \ldots, x_n)$ точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^N$, то при некотором условии типа определенности она допускает представление

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \int_{C_{\mathrm{Re}}(\mathbf{R}^N)} \lambda(x_1) \ldots \lambda(x_n)\, d\varrho(\lambda) \quad (x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^N;\ n = 0, 1, \ldots),$$

где интегрирование ведется по пространству непрерывных вещественных функций на $\mathbf{R}^N$, а интеграл сходится абсолютно и равномерно при изменении $(x_1, \ldots, x_n)$ по компакту из $\mathbf{R}^{nN}$.

Сформулированная теорема будет доказана в § 2 при помощи разложения по общим собственным векторам счетной системы коммутирующих самосопряженных операторов в форме континуального интеграла [18]. *В определенном случае* ее легко доказать (без замечания в)) и предельным переходом при $M \to \infty$ из M-мерной проблемы моментов — в соответствии с тем, что при разложении по собственным функциям предельные переходы от более простых к более сложным задачам часто применяются. Это можно сделать при помощи теоремы Р. А. Минлоса (см. [19] или [20, гл. IV, § 2, теорема 3]) примерно так, как выводится теорема Р. А. Минлоса — В. В. Сазонова из M-мерной теоремы Бохнера (см. [20, гл. IV, § 4]). Наметим доказательство, считая без ограничения общности $S_0 = 1$. Пусть $\mathfrak{F}$ — конечномерное подпространство $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно инволюции —, $S_{n,\mathfrak{F}}$ — сужение функционала S_n на $\mathfrak{F}^n \subseteq \mathfrak{H}^n (n = 0, 1, \ldots)$. Очевидно, последовательность $S_{\mathfrak{F}} = (S_{n\mathfrak{F}})_{n=0}^{\infty}$ будет моментной определенной, причем представление вида (4.1) для нее эквивалентно представлению определенной конечномерной моментной последовательности (ср. с примером 1)). Таким образом, можно считать, что у нас имеется для $S_{\mathfrak{F}}$ формула вида (4.1), которая, как легко понять, переписывается следующим образом:

$$S_{n,\mathfrak{F}} = \int\limits_{\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}/\widehat{\mathfrak{F}}_{\mathrm{Re}}} \underbrace{\mu \otimes \ldots \otimes \mu}_{n} d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{7.1}$$

($\widehat{\mathfrak{F}}_{\mathrm{Re}}$ — подпространство функционалов из $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$, ортогональных к $\mathfrak{F}_{\mathrm{Re}}$). Мера $d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu)$ индуцирует меру цилиндрических множеств из $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$ с основаниями Δ в $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}/\widehat{\mathfrak{F}}_{\mathrm{Re}}$ — мера отвечающего Δ цилиндрического множества равна $\sigma_{\mathfrak{F}}(\Delta)$. Изменяя произвольно $\mathfrak{F}$, получим систему мер цилиндрических множеств. Согласованность этой системы легко вытекает из однозначности определения меры $d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu)$ в (7.1) по $S_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, можно считать, что у нас имеется мера $d\varrho_{\text{ц}}(\lambda)$ цилиндрических множеств из $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$. Эта мера непрерывна, т. е. пусть $\mathfrak{F}^{(\nu)} =$ л. о. $((\varphi_j^{(\nu)})_{j=1}^M)$ $(\varphi_j^{(\nu)} \in \mathfrak{H};\ \nu = 1, 2, \ldots)$ и при каждом $j = 1, \ldots, M$ $\varphi_j^{(\nu)} \underset{\nu\to\infty}{\to} \varphi_j$, тогда в смысле слабой сходимости мер $d\sigma_{\mathfrak{F}^{(\nu)}}(\mu) \underset{\nu\to\infty}{\to} d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu)$, где $\mathfrak{F} =$ л. о $((\varphi_j)_{j=1}^M)$. Действительно, перепишем представление (7.1) для $S_{n,\mathfrak{F}^{(\nu)}}$ и $S_{n,\mathfrak{F}}$ в координатной форме, беря в качестве базисов системы векторов $(\varphi_j^{(\nu)})_{j=1}^M$ и $(\varphi_j)_{j=1}^M$ (для простоты будем считать каждую такую систему линейно независимой). Получим в соответствии с 1) и (1.1) $s_{\mathrm{n}}^{(\nu)} = \int\limits_{\mathbf{R}^M} t^{\mathrm{n}} d\sigma_\nu(t)$, $s_{\mathrm{n}} = \int\limits_{\mathbf{R}^M} t^{\mathrm{n}} d\sigma(t)$, где $d\sigma_\nu(t)$, $d\sigma(t)$ — меры в $\mathbf{R}^M$, индуцируемые мерами $d\sigma_{\mathfrak{F}^{(\nu)}}(\mu)$, $d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu)$ при переходе к координатной записи. Так как, очевидно, при каждом n $s_{\mathrm{n}}^{(\nu)} \underset{\nu\to\infty}{\to} s_{\mathrm{n}}$ и $\sigma_\nu(\mathbf{R}^M) = \sigma(\mathbf{R}^M) = 1$, то из последних двух равенств для $s_{\mathrm{n}}^{(\nu)}$ и s_{n}, теоремы Хелли и однозначности определения меры $d\sigma(t)$ по s_{n} можно заключить, что слабо $d\sigma_\nu(t) \underset{\nu\to\infty}{\to} d\sigma(t)$, т. е. $d\sigma_{\mathfrak{F}^{(\nu)}}(\mu) \underset{\nu\to\infty}{\to} d\sigma_{\mathfrak{F}}(\mu)$. Итак, мера $d\varrho_{\text{ц}}(\lambda)$ цилиндрических множеств сопряженного к ядерному пространству $\mathfrak{H}_{\mathrm{Re}}$ непрерывна. Поэтому согласно теореме

Р. А. Минлоса она допускает продолжение до меры $d\varrho(\lambda)$ на σ-оболочке этих множеств. Записывая (7.1) через меру $d\varrho(\lambda)$ и пользуясь произвольностью $\mathfrak{F}$, прийдем к (4.1).

Отметим, что мы доказали теорему по существу при более общем понятии определенности $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$: для каждого конечномерного $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ конечномерная моментная последовательность $S_{\mathfrak{F}}=(S_{n,\mathfrak{F}})_{n=0}^{\infty}$ должна быть определенной. Излагаемое в § 2 доказательство в этом случае также проходит, так как и сейчас можно доказать лемму 2.

В заключение авторы выражают искренную признательность Ф. А. Березину и Ю. С. Самойленко за полезные замечания.

§ 2. Доказательство теоремы

На C_0 введем квазискалярное произведение, полагая

$$\langle u, v\rangle_S=\sum_{j,k=0}^{\infty}(S_{j+k}, v_j\otimes\overline{u_k})_{\mathfrak{H}_0^{j+k}}\quad (u, v\in C_0). \tag{1.2}$$

После факторизации $u\to\hat{u}$ по $\{w\in C_0\,|\,\langle w, w\rangle_S=0\}$ и пополнения получим гильбертово пространство H_S. Пусть $e=\bar{e}\in\mathfrak{H}$, рассмотрим на последовательностях $u=(u_j)_{j=0}^{\infty}$ $(u_j\in\mathfrak{H}^j)$ операцию сдвига

$$\mathbf{A}_e u=\mathbf{A}_e(u_0, u_1, u_2, \ldots)=(0, e\otimes u_0, e\otimes u_1, e\otimes u_2, \ldots). \tag{2.2}$$

При помощи симметричности $S_n^{\cdot}$ легко проверить, что

$$\langle\mathbf{A}_e u, v\rangle_S=\langle u, \mathbf{A}_e v\rangle_S,\ \langle\mathbf{A}_e\mathbf{A}_l u, v\rangle_S=\langle\mathbf{A}_l\mathbf{A}_e u, v\rangle_S\ (u, v\in C_0). \tag{3.2}$$

Первое из этих равенств показывает, что соответствие $C_0\ni u\to\mathbf{A}_e u\in C_0$ порождает эрмитовый оператор в H_S; его замыкание обозначим A_e. Из второго равенства в (3.2) заключаем, что операторы A_e, A_l коммутируют на $\hat{C}_0$.

Пусть H — некоторое гильбертово пространство, A — эрмитовый оператор в нем. Вектор $\varphi\in H$ будем называть квазианалитическим относительно A, если $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$ и класс $C\{\|A^n\varphi\|\}$ — квазианалитический. Известно, что замыкание эрмитова оператора A в H самосопряжено тогда и только тогда, когда л. о. множества квазианалитических относительно A векторов плотная в H (это по существу теорема Насбаума, см. [11, теорема 1.3]; заметим, что до работы Насбаума близкий результат содержался у Р.С. Исмагилова [21]). Просто доказывается следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть A и B — два коммутирующих эрмитовых оператора в H с общей плотной областью определения $\mathfrak{D}\supseteq A\mathfrak{D}, B\mathfrak{D}$. Предположим, что у A, B и сужения A на $(B-z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ при некотором невещественном z существуют множества квазианалитических векторов, л. о. которых плотные в H. Тогда замыкания A и B самосопряжены и коммутируют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно сказанному выше замыкания A и B самосопряжены. Пусть $R_\zeta(A)$ и $R_\zeta(B)$ — резольвенты этих замыканий. Достаточно доказать, что при некоторых невещественных ζ_1 и ζ_2 $R_{\zeta_1}(A)R_{\zeta_2}(B)=$ $=R_{\zeta_2}(B)R_{\zeta_1}(A)$ (см., например, [1, гл. VIII, лемма 2. 1]). Установим это равенство при $\zeta_1=\zeta_2=z$. Для $f\in\mathfrak{D}$ благодаря коммутируемости A и B имеем:

$$R_z(A)R_z(B)(A-z\mathbf{1})(B-z\mathbf{1})f=f=R_z(B)R_z(A)(A-z\mathbf{1})(B-z\mathbf{1})f.$$

Поэтому достаточно убедиться, что $(A-z\mathbf{1})(B-z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ плотно в H, а это вытекает из того, что благодаря условию леммы замыкание сужения A на $(B - z\mathbf{1})\mathfrak{D}$ самосопряжено в H. ■

Лемма 2. *Пусть моментная последовательность S определенна. Тогда любые два оператора A_e и A_l ($e, l \in \mathfrak{E}$) самосопряжены и коммутируют.*

Доказательство. Применим лемму 1 к операторам A_e, A_l, полагая $\mathfrak{D} = \widehat{C}_0$. Пусть $u = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, u_p, 0, 0, \ldots) \in C_0$. Л. о. векторов вида $\widehat{u}$ плотная в H_S и $\widehat{u} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A_e^n)$. Покажем, что каждый из них квазианалитический относительно A_e. Для этого воспользуемся оценкой

$$|(S_{j+k}, v_j \otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}}|^2 \leqslant (S_{2k}, u_k \otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{2k}} (S_{2j}, v_j \otimes \bar{v}_j)_{\mathfrak{H}_0^{2j}} \tag{4.2}$$

$$(u_k \in \mathfrak{H}^k, v_j \in \mathfrak{H}^j;\ j, k = 0, 1, \ldots),$$

вытекающей из неравенства Коши—Буняковского для (1.2). Учитывая симметричность S_m, получим

$$\| A_e^n \widehat{u} \|_{H_S} = \langle \mathbf{A}_e^n u, \mathbf{A}_e^n u \rangle_S^{1/2} = (S_{2(p+n)}, \underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes u_p \otimes \overline{\underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes u_p})_{\mathfrak{H}_0^{2(p+n)}}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (S_{4p}, u_p \otimes u_p \otimes \bar{u}_p \otimes \bar{u}_p)_{\mathfrak{H}_0^{4p}}^{1/4} (S_{4n}, \underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{4n})_{\mathfrak{H}_0^{4n}}^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \| S_{4n} \|_{(\mathfrak{H}_{\tau(4n)}^{4n})'}^{1/4} \| e \|_{\mathfrak{H}_{\tau(4n)}}^n \leqslant c_1 \| S_{4n} \|_{(\mathfrak{H}_{\tau(4n)}^{4n})'}^{1/4} d^n(\tau(4n), \mathfrak{E}) = c_1 M_n. \tag{5.2}$$

Так как по условию класс $C\{M_n\}$ — квазианалитический, то и вектор $\widehat{u}$ — квазианалитический относительно A_e (и также относительно A_l).

Рассмотрим теперь сужение A_e на $(A_l - z\mathbf{1})\widehat{C}_0$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, обозначим его F. Пусть u имеет прежний вид, $v = (A_l - z\mathbf{1}) u = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, -zu_p, l \otimes u_p, 0, 0, \ldots)$. Тогда $\widehat{v} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(F^n)$. Действительно, для произвольного $u \in C_0$ благодаря (3.2) справедливо равенство $\mathbf{A}_e(\mathbf{A}_l - z\mathbf{1}) u = (\mathbf{A}_l - z\mathbf{1}) \mathbf{A}_e u + w$, где $\langle w, w \rangle_S = 0$, $\mathbf{A}_e u \in C_0$. Поэтому $F\mathfrak{D}(F) \subseteq \mathfrak{D}(F)$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(F^n) \supseteq \mathfrak{D}(F) \ni \widehat{v}$. Далее

$$\| F^n \widehat{v} \|_{H_S}^2 = \langle \mathbf{A}_e^n v, \mathbf{A}_e^n v \rangle_S = |z|^2 (S_{2(p+n)}, \underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes u_p \otimes \overline{\underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes u_p})_{\mathfrak{H}_0^{2(p+n)}} -$$

$$- 2 \operatorname{Re} (S_{2(p+n)+1}, z\underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes l \otimes u_p \otimes \overline{\underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes u_p})_{\mathfrak{H}_0^{2(p+n)+1}} +$$

$$+ (S_{2(p+1+n)}, \underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes l \otimes u_p \otimes \overline{\underbrace{e \otimes \ldots \otimes e}_{n} \otimes l \otimes u_p})_{\mathfrak{H}_0^{2(p+1+n)}}.$$

Оценивая каждое из трех слагаемых в правой части этого равенства подобно (5.2), получим, что $\| F^n \widehat{v} \|_{H_S} \leqslant c_2 M_n$, т. е. вектор $\widehat{v}$ — квазианалитический относительно F. Благодаря самосопряженности A_l л. о. векторов $\widehat{v}$ плотная в H_S. ■

Поясним, как доказать лемму в случае M_n^{-}, указанном в сноске на стр. 292. Сейчас в качестве u_p берем $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathfrak{E}$, и при оценке (5.2) неравенство (4.2) не применяем, а непосредственно получаем, что $\| A_e^n u \|_{H_S} \leqslant M_{p+n}$. Нетрудно также показать (с учетом (4.2)), что теперь $\| F^n \hat{v} \|_{H_S} \leqslant c_3 (M_{p+n} + M_{p+1+n})$. Затем нужно воспользоваться тем обстоятельством, что из квазианалитичности класса $C\{M_n\}$ следует квазианалитичность $C\{M_{p+n}\}$ и $C\{M_{p+n} + M_{p+1+n}\}$.

Рассмотрим случай квазиопределенной S. Пусть $(e_\mu)_{\mu=2}^{\infty}$ — последовательность из $\mathfrak{E}$ и вектор $e_1 = \overline{e}_1$ такие, что л. о. $((e_\mu)_{\mu=1}^{\infty})$ плотная в $\mathfrak{H}$. Построим систему эрмитовых операторов $(A_{e_\mu})_{\mu=1}^{\infty}$. Повторяя доказательство леммы 2, убедимся, что подсистема $(A_{e_\mu})_{\mu=2}^{\infty}$ состоит из самосопряженных коммутирующих операторов. Сейчас подобно доказательству теоремы М. С. Лившица о коммутирующих операторах (см. также [21, 22] и [1, гл. VIII, теорема 2.6]) установим следующую лемму.

Лемма 3. *Оператор A_{e_1} можно расширить до самосопряженного оператора $\widetilde{A}_{e_1}$ таким образом, чтобы $\widetilde{A}_{e_1}$ коммутировал с каждым оператором A_{e_μ} $(\mu = 2, 3, \ldots)$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразования Кэли $U_{z_\mu}^{(\mu)} = (A_{e_\mu} - \overline{z}_\mu \mathbf{1}) \times (A_{e_\mu} - z_\mu \mathbf{1})^{-1}$ ($z_\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ фиксированы; $\mu = 1, 2, \ldots$). При $\mu = 2, 3, \ldots$ эти операторы унитарные, а оператор $U_{z_1}^{(1)}$ изометрически переводит $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$ в $\mathfrak{R}(A_{e_1} - \overline{z}_1 \mathbf{1})$. Покажем сначала, что каждое из этих подпространств инвариантно относительно $U_{z_\mu}^{(\mu)}$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$ и в них эти операторы унитарны. Достаточно рассмотреть $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$ и $U_{z_2}^{(2)}$. Из (3.2) как и при доказательстве леммы 2 заключаем, что $A_{e_2}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0 \subseteq (A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0 \subset \mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$. Это позволяет рассматривать сужение A_{e_2} на $(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0$ как оператор в пространстве $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$. Согласно рассуждению при доказательстве леммы 2 замыкание этого оператора самосопряжено в $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$. Поэтому множество векторов $(A_{e_2} - z_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0$ плотно в $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$. Это множество посредством оператора $U_{z_2}^{(2)}$ переводится, притом изометрически, в множество $(A_{e_2} - \overline{z}_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0$, которое опять в силу той же аргументации плотно в $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$. Отсюда следует утверждаемое.

Таким образом, на $\mathfrak{R}(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})$ имеют смысл оба произведения $U_{z_\mu}^{(\mu)} U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_1}^{(1)} U_{z_\mu}^{(\mu)}$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$; покажем, что они равны. Пусть $\mu = 2$, равенство достаточно проверить на $(A_{e_2} - z_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \widehat{C}_0$. Для $u \in C_0$ благодаря коммутируемости A_{e_2} и A_{e_1} на $\widehat{C}_0$ получим

$$U_{z_2}^{(2)} U_{z_1}^{(1)} (A_{e_2} - z_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \hat{u} = U_{z_2}^{(2)} U_{z_1}^{(1)} (A_{e_1} - z_1 \mathbf{1})(A_{e_2} - z_2 \mathbf{1}) \hat{u} = U_{z_2}^{(2)} (A_{e_1} - \overline{z}_1 \mathbf{1})(A_{e_2} - z_2 \mathbf{1}) \hat{u} = U_{z_2}^{(2)} (A_{e_2} - z_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - \overline{z}_1 \mathbf{1}) \hat{u} = (A_{e_2} - \overline{z}_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - \overline{z}_1 \mathbf{1}) \hat{u}.$$

Точно так же покажем, что $U_{z_1}^{(1)} U_{z_2}^{(2)} (A_{e_2} - z_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - z_1 \mathbf{1}) \hat{u} = (A_{e_2} - \overline{z}_2 \mathbf{1})(A_{e_1} - \overline{z}_1 \mathbf{1}) \hat{u}$, откуда и следует требуемая коммутируемость.

Обозначим $N_{z_1}=H_S\ominus\Re(A_{e_1}-z_1\mathbf{1})$, $N_{\overline{z}_1}=H_S\ominus\Re(A_{e_1}-\overline{z}_1\mathbf{1})$ дефектные подпространства оператора A_{e_1}. Пусть X — некоторый оператор, изометрически переводящий N_{z_1} в $N_{\overline{z}_1}$. Тогда $U^{(1)}_{z_1}\oplus X$ будет преобразованием Кэли $\widetilde{U}^{(1)}_{z_1}$ некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}_{e_1}$ оператора A_{e_1}, определяемого оператором X. Для коммутируемости $\widetilde{A}_{e_1}$ и A_{e_μ} $(\mu=2,3,\ldots)$ достаточно X выбрать таким образом, чтобы $\widetilde{U}^{(1)}_{z_1}=U^{(1)}_{z_1}\oplus X$ и $U^{(\mu)}_{z_\mu}$ $(\mu=2,3,\ldots)$ коммутировали. Но сужения $U^{(\mu)}_{z_\mu}$ $(\mu=2,3,\ldots)$ на $\Re(A_{e_1}-z_1\mathbf{1})$ и $\Re(A_{e_1}-\overline{z}_1\mathbf{1})$ действуют в этих подпространствах и $U^{(\mu)}_{z_\mu}U^{(1)}_{z_1}=U^{(1)}_{z_1}U^{(\mu)}_{z_\mu}$. Поэтому для такой коммутируемости достаточно выполнения равенств $U^{(\mu)}_{z_\mu}Xf=XU^{(\mu)}_{z_\mu}f$ $(f\in N_{z_1};\ \mu=2,3,\ldots)$ (сужения $U^{(\mu)}_{z_\mu}$ на N_{z_1} и $N_{\overline{z}_1}$, конечно, действуют унитарным образом в этих подпространствах). Иными словами, достаточно выполнения равенств

$$E^{(\mu)}(\Delta_\mu)Xf=XE^{(\mu)}(\Delta_\mu)f\quad(f\in N_{z_1};\ \mu=2,3,\ldots),\tag{6.2}$$

где $E^{(\mu)}(\Delta)$ — разложение единицы оператора A_{e_μ}, а $\Delta_\mu\subseteq\mathbf{R}$ — произвольное борелевское множество. Построим по системе $(A_{e_\mu})_{\mu=2}^{\infty}$ коммутирующих самосопряженных операторов их общее разложение единицы $E(\Delta)$, где Δ — элемент σ-алгебры $\mathcal{Ц}_\sigma$, натянутой на цилиндрические множества (см., например, [18, стр. 998—1003]). Тогда (6.2) будет эквивалентно соотношению

$$E(\Delta)Xf=XE(\Delta)f\quad(f\in N_{z_1};\ \Delta\in\mathcal{Ц}_\sigma).\tag{7.2}$$

Теперь заметим, что в пространстве H_S определена инволюция $f\to f^{\circ}$ — она строится с помощью перехода к фактор-пространству и расширению по непрерывности из отображения $C_0\ni(u_j)_{j=0}^{\infty}\to(\overline{u}_j)_{j=0}^{\infty}\in C_0$ (при этом надо учесть вещественность S_n: $\overline{S}_n=S_n$, см. стр. 293). Благодаря тому, что $\overline{e}_\mu=e_\mu$ $(\mu=1,2,\ldots)$, операторы A_{e_μ} $(\mu=1,2,\ldots)$ вещественны относительно инволюции $\circ$, и поэтому, в частности, $N^{\circ}_{z_1}=N_{\overline{z}_1}$.

После сказанного подбор оператора X, удовлетворяющего (7.2), осуществляется точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.6 [1, гл. VIII, стр. 644—646]. ■

Построим систему самосопряженных коммутирующих операторов $(A_{e_\mu})_{\mu=1}^{\infty}$ в H_S. В случае определенной проблемы моментов эти операторы строятся по фиксированной последовательности $(e_\mu)_{\mu=1}^{\infty}$ векторов из $\mathfrak{E}$ таких, что л. о. $((e_\mu)_{\mu=1}^{\infty})$ плотная в $\mathfrak{H}$; их самосопряженность и коммутируемость следует из леммы 2. В квазиопределенном случае мы используем систему операторов леммы 3, причем оператор $\widetilde{A}_{e_1}$ обозначаем через A_{e_1}. В обоих случаях операторы A_{e_μ} $(\mu=1,2,\ldots)$ вещественны относительно инволюции $\circ$ (для оператора $\widetilde{A}_{e_1}$ это следует из конструкции самосопряженного расширения). Мы будем строить разложение по общим собственным векторам системы $(A_{e_\mu})_{\mu=1}^{\infty}$, пользуясь результатами работы [18]. Для такого построения необходимо сконструировать должным образом цепочку

$$H_{-,S}\supseteq H_S\supseteq\hat{H}_+\tag{8.2}$$

с квазиядерным вложением $\hat{H}_+\to H_S$.

Обозначим $(\widetilde{\tau}(n))_{n=0}^{\infty}$ $(\widetilde{\tau}(n) \in T)$ такую последовательность индексов, что для каждого n вложение $\mathfrak{H}_{\widetilde{\tau}(n)} \to \mathfrak{H}_{\tau(n)}$ квазиядерно; пусть d_n — гильбертовская норма этого оператора вложения. Рассмотрим последовательности чисел $(p_j)_{j=0}^{\infty}$ и $(q_j)_{j=0}^{\infty}$ таких, что

$$p_j, q_j \geqslant 1, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j} \leqslant 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} d_{2j}^{2j} \frac{p_j}{q_j} \leqslant 1, \tag{9.2}$$

и построим (пополнением с C_0) гильбертово пространство H_+ последовательностей $u = (u_j)_{j=0}^{\infty} (u_j \in \mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)})$ со скалярным произведением $(u,v)_{H_+} = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, v_j)_{\mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)}} q_j$. Произведем в H_+ факторизацию $u \to \hat{u}$ по подпространству $\{w \in H_+ \mid \langle w, w \rangle_S = 0\}$ и полученное пространство обозначим $\hat{H}_+$.

Лемма 4. *Вложение $\hat{H}_+ \to H_S$ квазиядерно и его норма $\leqslant 1$.*

Доказательство. Построим вспомогательное пространство H_1 последовательностей $u = (u_j)_{j=0}^{\infty}$ $(u_j \in \mathfrak{H}^j_{\tau(j)})$ со скалярным произведением $(u,v)_{H_1} = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, v_j)_{\mathfrak{H}^j_{\tau(2j)}} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} p_j$. Благодаря (4.2) и (9.2) для $u \in C_0$ получим

$$\langle u, u \rangle_S = \sum_{j,k=0}^{\infty} (S_{j+k}, u_j \otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}} \leqslant \sum_{j,k=0}^{\infty} |(S_{j+k}, u_j \otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}}| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} (S_{2j}, u_j \otimes \bar{u}_j)^{1/2}_{\mathfrak{H}_0^{2j}} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} \| S_{2j} \|^{1/2}_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} \| u_j \|_{\mathfrak{H}^j_{\tau(2j)}} \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j} \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|^2_{\mathfrak{H}^j_{\tau(2j)}} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} p_j \leqslant \| u \|^2_{H_1}.$$

Поэтому отображение $C_0 \ni u \to \hat{u}$ действует непрерывно из H_1 в H_S и имеет норму $\leqslant 1$. Продолжая его по непрерывности на все H_1, получим отображение $H_1 \to H_S$ с такими же свойствами.

Далее, благодаря (9.2) $(u \in H_+)$

$$\| u \|^2_{H_1} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|^2_{\mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)}} d_{2j}^{2j} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} p_j \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|^2_{\mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)}} q_j = \| u \|^2_{H_+},$$

поэтому вложение $H_+ \to H_1$ непрерывно с нормой $\leqslant 1$. Покажем, что оно будет и квазиядерным. Для этого обозначим через $(e_j^k)_{k=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, тогда векторы $(1, 0, 0, \ldots)$, $e^{(k,j)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, q_j^{-1/2} e_j^k, 0, 0, \ldots)$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированный базис в H_+. Утверждение вытекает из неравенства (см. (9.2))

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \| e^{(k,j)} \|^2_{H_1} = \sum_{j,k=1}^{\infty} \| e_j^k \|^2_{\mathfrak{H}^j_{\tau(2j)}} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} \frac{p_j}{q_j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e_j^k \|^2_{\mathfrak{H}^j_{\tau(2j)}} \right) \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} \frac{p_j}{q_j} = \sum_{j=1}^{\infty} d_{2j}^{2j} \| S_{2j} \|_{\mathfrak{H}^{2j}_{-\tau(2j)}} \frac{p_j}{q_j} \leqslant 1.$$

Из сказанного следует, что отображение $H_+ \to H_1 \to H_S$ как суперпозиция квазиядерного $H_+ \to H_1$ и непрерывного $H_1 \to H_S$ будет квазиядерным; его норма $\leqslant 1$. Проводя указанную факторизацию H_+, придем к утверждению леммы. ■

Итак, будем пользоваться цепочкой (9.2) с построенным пространством $\widehat{H}_+$. Эта цепочка допускает продолжение оснащения: в качестве пространства $Д$, топологически вложенного в H_+, можно взять $\widehat{C}_0$ с естественной топологией. Применяя к системе операторов $(A_{e_\mu})_{\mu=1}^{\infty}$ теорему 2 [18], получим равенство Парсеваля в виде

$$\mathbf{1} = \int\limits_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(\mathrm{M})} P(\lambda(\cdot))\, d\sigma(\lambda(\cdot)). \tag{10.2}$$

Здесь интегрирование ведется по пространству $\Lambda_{\mathrm{Re}}(\mathrm{M})$ вещественных последовательностей $\lambda(\mu)$ $(\mu \in \mathrm{M} = \{1, 2, \ldots\})$, $\sigma(\Delta(\cdot))$ — неотрицательная конечная мера, определенная на некоторой σ-алгебре множеств из $\Lambda_{\mathrm{Re}}(\mathrm{M})$, $P(\lambda(\cdot))$ — определенная σ-почти для всех $\lambda(\cdot)$ операторная функция, значениями которой служат неотрицательные квазиядерные операторы, действующие из H_+ в $H_{-,S}$. Их гильбертовская норма $|P(\lambda(\cdot))| \leqslant 1$, интеграл в (10.2) сходится по этой норме. Существует множество $Л(\cdot) \subseteq \Lambda_{\mathrm{Re}}(\mathrm{M})$ полной σ-меры такое, что $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ при $\lambda(\cdot) \in Л(\cdot)$ состоит из общих обобщенных собственных векторов для операторов A_{e_μ} с собственными значениями $\lambda(\mu)$:

$$\langle P(\lambda(\cdot))\widehat{u},\ A_{e_\mu}\widehat{v}\rangle_S = \lambda(\mu)\,\langle P(\lambda(\cdot))\,\widehat{u},\ \widehat{v}\rangle_S \qquad (\widehat{u} \in \widehat{H}_+,\ \widehat{v} \in \widehat{C}_0). \tag{11.2}$$

Наряду с (8.2) рассмотрим цепочку $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, где $H_0 = \oplus \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathfrak{H}_0^j$; пространство H_- строится подобно H_+, но с заменой $\mathfrak{H}^j_{\widetilde{\tau}(2j)}$ на $\mathfrak{H}^j_{-\widetilde{\tau}(2j)}$ и q_j на q_j^{-1}. Образуем ее тензорный квадрат $H_- \otimes H_- \supseteq H_0 \otimes H_0 \supseteq H_+ \otimes H_+$; элементами $H_- \otimes H_-$ будут служить матрицы $K = (K_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, где

$$K_{jk} \in \mathfrak{H}^j_{-\widetilde{\tau}(2j)} \otimes \mathfrak{H}^k_{-\widetilde{\tau}(2k)},$$

$$\|K\|^2_{H_-\otimes H_-} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \|K_{jk}\|^2_{\mathfrak{H}^j_{-\widetilde{\tau}(2j)} \otimes \mathfrak{H}^k_{-\widetilde{\tau}(2k)}} \frac{1}{q_j q_k}.$$

Преобразуем выражение $\langle P(\lambda(\cdot))\,\widehat{u},\ \widehat{v}\rangle_S$ $(\lambda(\cdot) \in Л(\cdot);\ \widehat{u},\ \widehat{v} \in \widehat{H}_+)$. Пусть $\mathbf{I}_1 : H_{-,S} \to \widehat{H}_+$ — изометрический оператор, связанный с цепочкой (8.2), а Q — оператор ортогонального проектирования $u \to \widehat{u}$ на $\widehat{H}_+$ в H_+. Тогда $\langle P(\lambda(\cdot))\widehat{u},\ \widehat{v}\rangle_S = (\mathbf{I}_1 P(\lambda(\cdot))\,\widehat{u},\ \widehat{v})_{\widehat{H}_+} = (Q\mathbf{I}_1 P(\lambda(\cdot))Qu,\ v)_{H_+}$. Оператор $Q\mathbf{I}_1 P(\lambda(\cdot))Q :$ $H_+ \to H_+$ — квазиядерный, следовательно, существует $S(\lambda(\cdot)) \in H_+ \otimes H_+$ такое, что $(Q\mathbf{I}_1 P(\lambda(\cdot))\,Qu,\ v)_{H_+} = (S(\lambda(\cdot)),\ v \otimes \overline{u})_{H_+\otimes H_+}$ $(u, v \in H_+)$. Обозначая через $\mathbf{I}_2 : H_- \otimes H_- \to H_+ \otimes H_+$ изометрический оператор, связанный с соответствующей цепочкой, получим

$$(S(\lambda(\cdot)),\ v \otimes \overline{u})_{H_+\otimes H_+} = (\mathbf{I}_2^{-1} S(\lambda(\cdot)),\ v \otimes \overline{u})_{H_0\otimes H_0} = (\Omega(\lambda(\cdot)),\ v \otimes \overline{u})_{H_0\otimes H_0},$$

где $\Omega(\lambda(\cdot)) = \mathrm{I}_2^{-1} S(\lambda(\cdot)) \in H_- \otimes H_-$. В конечном счете

$$\langle P(\lambda(\cdot)) \hat{u}, \hat{v} \rangle_S = (\Omega(\lambda(\cdot)), v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} \qquad (u, v \in H_+). \tag{12.2}$$

Элементарные ядра $\Omega(\lambda(\cdot)) \in H_- \otimes H_-$, поэтому

$$\Omega(\lambda(\cdot)) = (\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)))_{j,k=0}^{\infty} \qquad (\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)) \in \mathfrak{H}^j_{-\tilde{\tau}(2j)} \otimes \mathfrak{H}^k_{-\tilde{\tau}(2k)}); \tag{13.2}$$

они п. о. в смысле (2.1) благодаря п. о. $P(\lambda(\cdot))$. Далее, переписывая соотношение (11.2) при помощи (12.2) и учитывая вид (2.2) операции $\mathbf{A}_{e_\mu}$, получим (второе из этих равенств следует из первого благодаря эрмитовости $\Omega(\lambda(\cdot)) : \Omega_{jk}(\lambda(\cdot)) = \overline{\Omega_{kj}(\lambda(\cdot))}$)

$$(\Omega_{j+1k}(\lambda(\cdot)), e_\mu \otimes v_j \otimes u_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k+1}} = \lambda(\mu)(\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)), v_j \otimes u_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}}, \tag{14.2}$$

$$(\Omega_{jk+1}(\lambda(\cdot)), v_j \otimes e_\mu \otimes u_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k+1}} = \lambda(\mu)(\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)), v_j \otimes u_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}} \tag{15.2}$$

$$(u_k \in \mathfrak{H}^k_{\tilde{\tau}(2k)},\ v_j \in \mathfrak{H}^j_{\tilde{\tau}(2j)};\ j, k = 0, 1, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots;\ \lambda(\cdot) \in Л(\cdot)).$$

Как уже говорилось на стр. 300, операторы A_{e_μ} $(\mu = 1, 2, \ldots)$ вещественны относительно инволюции $\circ$, поэтому вещественны и $P(\lambda(\cdot))$, т. е. $\overline{\Omega_{jk}(\lambda(\cdot))} = \Omega_{jk}(\lambda(\cdot))$ $(j, k = 0, 1, \ldots;\ \lambda(\cdot) \in Л(\cdot))$. Таким образом, в (13.2) при обозначениях пространств можно поставить индексы Re.

Лемма 5. *Пусть матрица* (13.2) *с вещественными элементами удовлетворяет системе* (14.2) — (15.2) *при фиксированном* $\lambda(\cdot)$. *Тогда* $\Omega_{jk}(\lambda(\cdot))$ *продолжаются до элементов из* $\mathfrak{H}^{j+k}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$ *и имеют следующий вид:*

$$\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)) = \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{j+k} \Omega_{00}(\lambda(\cdot)) \qquad (j, k = 0, 1, \ldots), \tag{16.2}$$

где $\lambda = \Omega_{10}(\lambda(\cdot)) = \Omega_{01}(\lambda(\cdot)) \in \mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$ *.

Доказательство. Из п. о. $\Omega(\lambda(\cdot))$ следует, что $\Omega_{00}(\lambda(\cdot)) \geqslant 0$. Если $\Omega_{00}(\lambda(\cdot)) = 0$, то из дальнейшего будет видно, что и $\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)) = 0$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$, поэтому (16.2) имеет место. В случае $\Omega_{00}(\lambda(\cdot)) > 0$, который рассматривается ниже, без ограничения общности можно считать $\Omega_{00}(\lambda(\cdot)) = 1$.

Полагая в (14.2) и (15.2) $j = k = 0$, получим

$$(\Omega_{10}(\lambda(\cdot)), e_\mu)_{\mathfrak{H}_0} = \lambda(\mu) = (\Omega_{01}(\lambda(\cdot)), e_\mu)_{\mathfrak{H}_0} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{17.2}$$

Ввиду плотности в. л. о. $((e_\mu)_{\mu=1}^{\infty})$ в $\mathfrak{H}_{\mathrm{Re}}$, а значит и в $\mathfrak{H}_{\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$, и включения $\Omega_{10}(\lambda(\cdot))$, $\Omega_{01}(\lambda(\cdot)) \in \mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$ из (17.2) заключаем, что $\Omega_{10}(\lambda(\cdot)) = \Omega_{01}(\lambda(\cdot)) = \lambda \in \mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$. Итак, (16.2) установлено при $j + k = 1$. Рассмотрим теперь случаи $j + k = 2, 3, \ldots$.

Случай $j + k = 2$. Положим в (14.2) $j = 1$, $k = 0$ и заменим v_1 на e_ν. Учитывая (17.2), получим

$$\begin{aligned}(\Omega_{20}(\lambda(\cdot)), e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} &= \lambda(\mu)(\Omega_{10}(\lambda(\cdot)), e_\nu)_{\mathfrak{H}_0} = \lambda(\mu)\lambda(\nu) = \\ &= (\lambda, e_\mu)_{\mathfrak{H}_0}(\lambda, e_\nu)_{\mathfrak{H}_0} = (\lambda \otimes \lambda, e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{18.2}$$

* Ср. с леммой из [7] и леммами 4.2, 3.4 [10] и 1.3 [9], где решаются близкие уравнения без предположения, что л. о. $((e_\mu)_{\mu=1}^{\infty})$ — плотная в $\mathfrak{H}$.

Так как в. л. о. $((e_\mu \otimes e_\nu)_{\mu,\nu=1}^\infty)$ плотная в $\mathfrak{H}^2_{\widetilde{\tau(4)},\mathrm{Re}}$, $\mathfrak{H}^2_{\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, а $\Omega_{20}(\lambda(\cdot)) \in \mathfrak{H}^2_{-\widetilde{\tau(4)},\mathrm{Re}}$, $\lambda \otimes \lambda \in \mathfrak{H}^2_{-\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, то (18.2) показывает, что $\Omega_{20}(\lambda(\cdot)) = \lambda \otimes \lambda$.

Положим в (14.2) $j=0$, $k=1$ и заменим u_1 на e_ν. Учитывая (17.2), получим

$$(\Omega_{11}(\lambda(\cdot)), e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} = \lambda(\mu)(\Omega_{01}(\lambda(\cdot)), e_\nu)_{\mathfrak{H}_0} = \lambda(\mu)\lambda(\nu) =$$
$$= (\lambda \otimes \lambda, e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{19.2}$$

Так как в. л. о. $((e_\mu \otimes e_\nu)_{\mu,\nu=1}^\infty)$ плотная в $\mathfrak{H}^2_{\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, а $\Omega_{11}(\lambda(\cdot)), \lambda \otimes \lambda \in \mathfrak{H}^2_{-\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, то (19.2) показывает, что $\Omega_{11}(\lambda(\cdot)) = \lambda \otimes \lambda$.

Положим в (15.2) $j=0$, $k=1$ и заменим u_1 на e_ν. Учитывая (17.2), получим

$$(\Omega_{02}(\lambda(\cdot)), e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} = \lambda(\mu)(\Omega_{01}(\lambda(\cdot)), e_\nu)_{\mathfrak{H}_0} = \lambda(\mu)\lambda(\nu) =$$
$$= (\lambda \otimes \lambda, e_\mu \otimes e_\nu)_{\mathfrak{H}_0^2} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots).$$

Опять, подобно случаю $j=1$, $k=0$, заключаем, что $\Omega_{02}(\lambda(\cdot)) = \lambda \otimes \lambda$.

Случай $j+k=3$. Положим в (14.2) $j=2$, $k=0$ и заменим v_2 на $e_\nu \otimes e_\pi$. Учитывая (18.2) и (17.2), получим

$$(\Omega_{30}(\lambda(\cdot)), e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\pi)_{\mathfrak{H}_0^3} = \lambda(\mu)(\Omega_{20}(\lambda(\cdot)), e_\nu \otimes e_\pi)_{\mathfrak{H}_0^2} = \tag{20.2}$$
$$= \lambda(\mu)\lambda(\nu)\lambda(\pi) = (\lambda, e_\mu)_{\mathfrak{H}_0}(\lambda, e_\nu)_{\mathfrak{H}_0}(\lambda, e_\pi)_{\mathfrak{H}_0} = (\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda, e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\pi)_{\mathfrak{H}_0^3}$$
$$(\mu, \nu, \pi = 1, 2, \ldots).$$

Так как в. л. о. $((e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\pi)_{\mu,\nu,\pi=1}^\infty)$ плотная в $\mathfrak{H}^3_{\widetilde{\tau(6)},\mathrm{Re}}$, $\mathfrak{H}^3_{\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, а $\Omega_{30}(\lambda(\cdot)) \in \mathfrak{H}^3_{-\widetilde{\tau(6)},\mathrm{Re}}$, $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda \in \mathfrak{H}^3_{-\widetilde{\tau(2)},\mathrm{Re}}$, то (20.2) показывает, что $\Omega_{30}(\lambda(\cdot)) = \lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$.

Из сказанного ясно, каким образом завершается доказательство (16.2) при $j+k=3$ и рассматривается общий случай $j+k \geqslant 4$. ■

Из формулы (10.2) при помощи (1.2), (12.2) и (16.2) получаем для любых $u, v \in C_0$ (производимые ниже перестановки интегралов, сумм и действий функционалов законны ввиду оценки $\| P(\lambda(\cdot)) \| \leqslant 1$ и вытекающих отсюда оценок для $\Omega(\lambda(\cdot))$)

$$\sum_{j,k=0}^\infty (S_{j+k}, v_j \otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}} = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_S = \int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} \langle P(\lambda(\cdot))\hat{u}, \hat{v} \rangle_S \, d\sigma(\lambda(\cdot)) =$$
$$= \int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} (\Omega(\lambda(\cdot)), v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} d\sigma(\lambda(\cdot)) = \sum_{j,k=0}^\infty \int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} (\Omega_{jk}(\lambda(\cdot)), v_j \otimes$$
$$\otimes \bar{u}_k)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}} d\sigma(\lambda(\cdot)) = \sum_{j,k=0}^\infty \left(\int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{j+k} \Omega_{00}(\lambda(\cdot))\, d\sigma(\lambda(\cdot)), v_j \otimes \bar{u}_k \right)_{\mathfrak{H}_0^{j+k}},$$

т. е.

$$S_n = \int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} \Omega_{00}(\lambda(\cdot))\, d\sigma(\lambda(\cdot)) = \tag{21.2}$$
$$= \int_{\Lambda_{\mathrm{Re}}(M)} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} d\varrho(\lambda(\cdot)) \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ d\varrho(\lambda(\cdot)) = \Omega_{00}(\lambda(\cdot))\, d\sigma(\lambda(\cdot))).$$

Рассмотрим теперь пересечение множеств σ-алгебры, где были заданы меры $d\sigma(\lambda(\cdot))$ и $d\varrho(\lambda(\cdot))$, с $\mathit{Л}(\cdot)$. Сужение $d\varrho(\lambda(\cdot))$ на так получаемую σ-алгебру обозначим $d\varrho_1(\lambda(\cdot))$. Очевидно, в последнем интеграле из (21.2) $d\varrho(\lambda(\cdot))$ можно заменить на $d\varrho_1(\lambda(\cdot))$, а $\Lambda_{\mathrm{Re}}(\mathrm{M})$ на $\mathit{Л}(\cdot)$. Посредством отображения $\mathit{Л}(\cdot) \ni \lambda(\cdot) \to \Omega_{10}(\lambda(\cdot)) = \lambda \in \mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}}$ меру $d\varrho_1(\lambda(\cdot))$ переведем в меру $d\varrho(\lambda)$, определенную на некотором σ-кольце множеств из $\mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2),\mathrm{Re}} \subset \subset \mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$. Доопределяя ее нулем вне образа $\mathit{Л}(\cdot)$, получим меру на σ-алгебре множеств из $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}$. Делая в только что преобразованном интеграле замену переменных $\lambda(\cdot) \to \lambda$, приведем его к виду $\int\limits_{\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} d\varrho(\lambda)$. При такой замене некорректностей, связанных с, вообще говоря, не взаимной однозначностью отображения $\lambda(\cdot) \to \lambda$, не появится, так как подынтегральная функция зависит от λ — образа $\lambda(\cdot)$. В результате получим представление (4.1).

На самом деле мера $d\varrho(\lambda)$ сосредоточена на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{-\tilde{\tau}(2)\mathrm{Re}}$, откуда следует замечание в) на стр. 293. Легко также проследить, что построенная мера принадлежит классу мер, упоминающемуся в б) на стр. 293. Основная часть теоремы доказана.

Докажем единственность определения меры $d\varrho(\lambda)$ из (4.1) в случае определенной проблемы моментов. Это проще всего сделать, сведя вопрос к классической проблеме моментов. Пусть $\varphi \in \mathfrak{H}_{\mathrm{Re}}$, числовая моментная последовательность $s_n(\varphi) = (S_n, \underbrace{\varphi \otimes \ldots \otimes \varphi}_{n})_{\mathfrak{H}_0^n}$ допускает благодаря (4.1) представление

$$s_n(\varphi) = \Big(\int\limits_{\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} d\varrho(\lambda), \underbrace{\varphi \otimes \ldots \otimes \varphi}_{n} \Big)_{\mathfrak{H}_0^n} = \tag{22.2}$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}}} (\lambda, \varphi)_{\mathfrak{H}_0}^n d\varrho(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} t^n d\varrho_\varphi(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

(мы сделали замену переменных $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Re}} \ni \lambda \to (\lambda, \varphi)_{\mathfrak{H}_0} = t \in \mathbf{R}^1$). В случае $\varphi \in$ в. л. о. ($\mathfrak{E}$) проблема моментов (22.2) определенная: сейчас $\|\varphi\|_{\mathfrak{H}_\tau} \leqslant \leqslant cd(\tau, \mathfrak{E})$, откуда

$$s_{2n}^2(\varphi) \leqslant s_0(\varphi)\, s_{4n}(\varphi) = s_0(\varphi)\, (S_{4n}, \underbrace{\varphi \otimes \ldots \otimes \varphi}_{4n})_{\mathfrak{H}_0^{4n}} \leqslant$$

$$\leqslant s_0(\varphi)\, \|S_{4n}\|_{\mathfrak{H}^{4n}_{-\tau(4n)}} \|\varphi\|^{4n}_{\mathfrak{H}_{\tau(4n)}} \leqslant s_0(\varphi)\, \|S_{4n}\|_{\mathfrak{H}^{4n}_{-\tau(4n)}} c^{4n} d^{4n}(\tau(4n), \mathfrak{E})$$

и, следовательно, класс $C\{(s_{2n}(\varphi))^{1/2}\}$ — квазианалитический (см. (3.1)). Таким образом, $d\varrho_\varphi(t)$ при $\varphi \in$ в. л. о. ($\mathfrak{E}$) определяется по S однозначно.

Предположим, что имеются два представления одной и той же S с мерами $d\varrho'(\lambda)$ и $d\varrho''(\lambda)$. Достаточно доказать, что $\varrho'(\mathit{Ц}_\Delta) = \varrho''(\mathit{Ц}_\Delta)$ (см. стр. 293). Зафиксируем $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in$ в. л. о. ($\mathfrak{E}$); меры $\varrho'(\mathit{Ц}_\Delta)$ и $\varrho''(\mathit{Ц}_\Delta)$ относительно $\Delta \subseteq \mathbf{R}^n$ принимают одинаковые значения на любом полупространстве из $\mathbf{R}^n$ — это, очевидно, следует из доказанного равенства $d\varrho'_\varphi(t) = d\varrho''_\varphi(t)$ ($\varphi \in$ в. л. о. ($\mathfrak{E}$)). Но тогда по известной теореме эти меры совпадают, т. е. $\varrho'(\mathit{Ц}_\Delta) = \varrho''(\mathit{Ц}_\Delta)$, и единственность установлена.

Наконец, моментность каждой последовательности вида (4.1) устанавливается непосредственной проверкой. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
2. А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин, Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах, Труды Моск. матем. о-ва, т. 9, 1960.
3. Р. Стритер, А. С. Вайтман, РСТ, спин, статистика и все такое, «Наука», М., 1966.
4. Р. Йост, Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967.
5. Ю. М. Березанский, О самосопряженности полевых операторов и интегральных представлениях функционалов типа Уайтмана, УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
6. Ю. М. Березанский, М. Л. Горбачук, Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана, Математический конгресс (Тезисы кратких научных сообщений, секция 5), М., 1966.
7. Ю. М. Березанский, Одно обобщение степенной проблемы моментов, ДАН СССР, т. 172, № 3, 1967.
8. Ю. М. Березанский, Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана, УМЖ, т. 19, № 1, 1967.
9. Ю. М. Березанский, Представление функционалов типа Вайтмана посредством континуальных интегралов, Функц. анализ и его прилож., т. 3, № 2, 1969.
10. Ю. М. Березанский, Обобщенная степенная проблема моментов, Труды Моск. матем. о-ва, т. 21, 1970.
11. Ю. М. Березанский, Об обобщенной степенной проблеме моментов, УМЖ, т. 22, № 4, 1970.
12. V. P. Gachok, Integral representations of vacuum expectation values involving local commutativity, препринт ИТФ-67-16, Ин-т теоретической физики АН УССР, К., 1967.
13. V. P. Gachok, Integral representations in the euclidean quantum field theory and their consequences in relativistic case, препринт ИТФ-67-50, Ин-т теоретической физики АН УССР, К., 1967.
14. В. П. Гачок, Проблема моментов в квантовой теории поля, Автореферат докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, К., 1968.
15. Ю. С. Самойленко, Л. М. Корсунский, Интегральное представление инвариантных положительно определенных матричных ядер, УМЖ, т. 21, № 4, 1969.
16. A. Grossman, Hilbert space of type S, J. of Math. Phys., t. 6, n. 1, 1965, 54—67.
17. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, т. 2, Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, М., 1958.
18. Ю. М. Березанский, Разложение по обобщенным собственным векторам и интегральное представление положительно определенных ядер в форме континуального интеграла, Сиб. матем. ж., т. 9, № 5, 1968.
19. Р. А. Минлос, Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, Труды Моск. матем. о-ва, т. 8, 1959.
20. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, т. 4, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, М., 1961.
21. Р. С. Исмагилов, Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов, ДАН СССР, т. 133, № 3, 1960.
22. Г. И. Эскин, Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов, ДАН СССР, т. 133, № 3, 1960.

Поступила 29.XII 1970 г.

Институт математики АН УССР,
Киевский государственный университет