1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 23, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.948:513.88:518.

О быстроте сходимости некоторых проекционных методов для линейных операторных уравнений

А. Ю. Лучка

Рассмотрим в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H уравнение

$$Lx = f, \tag{1}$$

где L — линейный оператор с плотной в H областью определения $Д(L)$.

Как известно, согласно проекционному методу приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \tag{2}$$

а коэффициенты c_k определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$(Lx_n - f, \psi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Сходимость последовательности (2) к решению x^* уравнения (1) и невязки $f - Lx_n$ к нулю достаточно полно изучена в работах [1—10]. Быстрота сходимости изучалась в работах [10—14]. Ниже рассматриваются аналогичные вопросы для некоторых частных случаев проекционных методов при других, как нам кажется, условиях, налагаемых на оператор L и системы элементов $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$.

Оператор T, определенный на плотном множестве $Д(T) \subset H$, называется K-положительно определенным [8,9], если существует оператор K, допускающий замыкание, $Д(K) \supset Д(T)$, и отображающий множество $Д(T)$ на плотное множество $KД(T) \subset H$, и положительные постоянные α_1 и α_2, что для всех $x \in Д(T)$ выполняются неравенства

$$(Tx, Kx) \geqslant \alpha_1 \| x \|^2, \qquad \| Kx \|^2 \leqslant \alpha_2 (Tx, Kx). \tag{4}$$

Оператор T называется K-симметричным, если для любых $x, y \in Д(T)$ имеем

$$(Tx, Ky) = (Kx, Ty). \tag{5}$$

В случае, когда H — комплексное пространство, в работе [8] доказано, что из K-положительной определенности вытекает K-симметричность. Для действительного пространства H, вообще говоря, этот факт не имеет места.

Гильбертово пространство, получающееся при замыкании множества $Д(T)$ в метрике $[u, v]_0 = (Tu, Kv)$, $| u |_0^2 = [u, u]_0$, обозначим через $\mathcal{H}_0$. Через $\mathcal{H}_1$ обозначим гильбертово пространство, полученное при замыкании множества $Д(K)$ в метрике $[u, v]_1 = (Ku, Kv)$, $| u |_1 = \| Ku \|$.

Элемент $x^* \in H$ будем называть обобщенным решением уравнения (1), если для любого $u \in Д(L^*\bar{K})$, где L^* — оператор, сопряженный с L, $\bar{K}$ — замыкание оператора K в H, справедливо равенство

$$(x^*, L^*\bar{K}u) = (f, \bar{K}u). \tag{6}$$

§ 1. Об условии (A) Польского

Пусть B — самосопряженный положительно определенный оператор, имеющий точечный спектр, и его собственные элементы φ_k расположены по возрастающим собственным значениям, т. е.

$$B\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \qquad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \tag{7}$$

Будем считать, что система $\{\varphi_k\}$ ортонормирована в H и пусть P_n и Q_n — операторы, определяемые равенствами $P_n g = \sum\limits_{k=1}^{n} (g, \varphi_k)\varphi_k$, $Q_n = I - P_n$, $g \in H$, где I — тождественный оператор в H.

Тогда имеют место очевидные соотношения:

$$P_n B = BP_n, \quad Q_n B = BQ_n, \quad Q_n B^{-1} = B^{-1} Q_n,$$

$$\| P_n B \| = \lambda_n, \quad \| Q_n B^{-1} \| = \lambda_{n+1}^{-1}, \tag{8}$$

$$\| By \|^2 \leqslant \lambda_n (By, y), \quad y \in H_n, \tag{9}$$

где H_n — подпространство, порожденное первыми n элементами системы $\{\varphi_k\}$.

Лемма. *Пусть уравнение*

$$Ax = g, \tag{10}$$

где A — линейный оператор с плотной в H областью определения $Д(A)$, имеет при любом $g \in H$ решение x^*, принадлежащее $Д(B)$, и выполняются неравенства:

$$(By, y) \leqslant \sigma |(Ay, y)|, \quad \sigma > 0, \quad n \geqslant n_0, \tag{11}$$

$$\| A^* y \| \leqslant \alpha \| By \|, \quad \alpha > 0, \quad y \in H_n, \tag{12}$$

$$\| Ax \| \leqslant \beta \| Bx \|, \quad \beta > 0, \quad x \in Д(B), \tag{13}$$

где A^* — оператор, сопряженный с A.

Тогда выполняется условие (A) Польского [5], *т. е. существует положительная постоянная C, не зависящая от n, что для всех $n \geqslant n_0$ и $y \in H_n$ справедливо неравенство*

$$\| Ay \| \leqslant C \| P_n Ay \|. \tag{14}$$

Доказательство. На основании теоремы 15.2 работы [10] достаточно для любого $g \in H$ установить соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \| g - Ax_n \| = 0, \tag{15}$$

где x_n определяется из уравнения

$$P_n A x_n = P_n g, \qquad x_n \in H_n. \tag{16}$$

Заметим, что если выполняется условие (11), то для любого $n \geqslant n_0$ уравнение (16) однозначно разрешимо. Действительно, предположим, что уравнение $P_n A w_n = 0$ имеет нетривиальное решение $w_n \in H_n$. Тогда $(Aw_n, w_n) = 0$. Следовательно, в силу условия (11) имеем

$$0 = \sigma |(Aw_n, w_n)| \geqslant (Bw_n, w_n) \geqslant \lambda_1 \| w_n \|^2,$$

откуда вытекает $w_n = 0$, что противоречит предположению.

Пусть $z_n = P_n x^* - x_n$, тогда, учитывая (16), имеем

$$(Az_n, z_n) = (AP_n x^* - Ax_n, z_n) = (AP_n x^* - g, z_n) =$$
$$= (AP_n x^* - Ax^*, z_n) = -(Q_n x^*, A^* z_n),$$

откуда, принимая во внимание неравенства (11) и (12), получаем

$$(Bz_n, z_n) \leqslant \sigma \| Q_n x^* \| \| A^* z_n \| \leqslant \alpha\sigma \| Bz_n \| \| Q_n x^* \|. \tag{17}$$

Из соотношений (9) и (17) следует неравенство

$$\| Bz_n \|^2 \leqslant \alpha\sigma\lambda_n \| Bz_n \| \| Q_n x^* \|,$$

т. е.

$$\| Bz_n \| \leqslant \alpha\sigma\lambda_n \| Q_n x^* \|. \tag{18}$$

Если воспользоваться соотношением (8), то неравенство (18) можно представить в виде

$$\| Bz_n \| \leqslant \alpha\sigma\lambda_n \| Q_n B^{-1} Q_n B x^* \| \leqslant \alpha\sigma\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \| Q_n B x^* \| \leqslant C_1 \| Q_n B x^* \|. \tag{19}$$

В силу неравенств (13) и (19) окончательно имеем

$$\| g - Ax_n \|^2 = \| A(x^* - x_n) \|^2 \leqslant \beta^2 \| B(x^* - x_n) \|^2 =$$
$$= \beta^2 \{ \| BQ_n x^* \|^2 + \| BP_n (x^* - x_n) \|^2 \} \leqslant \beta^2 (1 + C_1^2) \| Q_n B x^* \|^2,$$

откуда следует соотношение (15).

Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что если выполняется условие леммы, то из результатов § 15 работы [10] следует неравенство

$$\| g - Ax_n \| \leqslant C \| g \|. \tag{20}$$

В случае, когда A и B — сходные операторы, т. е. положительно определенные самосопряженные операторы и $Д(A) = Д(B)$, неравенства (11) — (13) выполняются для любых n и $x \in Д(A)$. Для этого случая лемма установлена в работе [10].

§ 2. Исследование быстроты сходимости одного проекционного метода

1. Рассмотрим частный случай алгоритма (2)—(3), когда в качестве системы $\{\varphi_k\}$ в (2) взята система собственных элементов самосопряженного положительно определенного оператора B, а коэффициенты c_k определяются из системы уравнений

$$(f - Lx_n, K\varphi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Теорема 1. *Если существует обобщенное решение x^* уравнения* (1), *для любых $y \in H_n$, $n \geqslant n_0$, и $x \in Д(B)$ выполняются условия*

$$(By, y) \leqslant \sigma |(Ly, Ky)|, \ \sigma > 0, \tag{22}$$

$$\| (L^* K)^* y \| \leqslant \alpha \| By \|, \ \alpha > 0, \tag{23}$$

$$\| L^* K x \| \leqslant \beta \| Bx \|, \ \beta > 0, \tag{24}$$

и уравнение $L^* K v = g$ имеет решение $v^* \in Д(B)$ при любом $g \in H$, то, начиная с $n \geqslant n_0$, справедливо неравенство

$$\| x^* - x_n \| \leqslant C \| Q_n x^* \|. \tag{25}$$

Если, кроме того, $x^* \in Д(B^s)$, *то*

$$\| B^m (x^* - x_n) \| \leqslant \frac{C}{\lambda_{n+1}^{s-m}} \| Q_n B^s x^* \|, \qquad 0 \leqslant m \leqslant s. \tag{26}$$

Доказательство. Разрешимость системы (21) при $n \geqslant n_0$ вытекает из условия (22). Пусть $z_n = P_n x^* - x_n$ и элемент $y_n \in H_n$ определяется из уравнения

$$P_n L^* K y_n = z_n. \tag{27}$$

Тогда, принимая во внимание (6), (21) и (27), имеем

$$\| x^* - x_n \|^2 = (x^* - x_n, x^* - x_n - L^* K y_n) =$$

$$= (Q_n x^*, x^* - x_n - L^* K y_n) \leqslant \| Q_n x^* \| \| x^* - x_n - L^* K y_n \|. \tag{28}$$

Если положить $L^* K = A$, то условия теоремы совпадают с условиями леммы, следовательно, существует такая постоянная $C > 0$, что выполняются неравенства (14) и (20). Полагая в (20) $g = x^* - x_n$, получим

$$\| x^* - x_n - L^* K y_n \| \leqslant C \| x^* - x_n \|. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29) следует неравенство (25).

Учитывая тот факт, что $\| x^* - x_n \|^2 = \| z_n \|^2 + \| Q_n x^* \|^2$, неравенство (25) можно представить в виде

$$\| z_n \| \leqslant C^* \| Q_n x^* \|, \quad C^{*2} = C^2 - 1. \tag{30}$$

Так как $z_n \in H_n$, то для любого m, $0 \leqslant m \leqslant s$, в силу соотношений (8) и (30) имеем

$$\| B^m z_n \| = \| (P_n B)^m z_n \| \leqslant \lambda_n^m \| z_n \| \leqslant C^* \lambda_{n+1}^m \| Q_n x^* \| =$$

$$= C^* \lambda_{n+1}^m \| Q_n B^{-m} Q_n B^m x^* \| \leqslant C^* \| Q_n B^m x^* \|. \tag{31}$$

На основании (31) получаем

$$\| B^m (x^* - x_n) \|^2 = \| B^m z_n \|^2 + \| Q_n B^m x^* \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \| Q_n B^m x^* \|^2 = C^2 \| Q_n B^{m-s} Q_n B^s x^* \|^2 \leqslant C^2 \lambda_{n+1}^{2m-2s} \| Q_n B^s x^* \|^2,$$

откуда следует неравенство (26).

Теорема доказана.

Заметим, что если $Д(L^* \overline{K}) = Д((L^* \overline{K})^*) = Д(B)$, то условия (23) и (24) выполняются (см. [1, стр. 427]).

Предположим, что оператор L замкнутый и существует его порядок ν относительно оператора B. Если выполняются условия теоремы и $x^* \in Д(L)$, то

$$\| f - L x_n \| \leqslant \frac{C_2}{\lambda_{n+1}^{s-\nu}} \| Q_n B^s x^* \|, \quad s \geqslant \nu. \tag{32}$$

Действительно, в случае, когда существует порядок ν замкнутого оператора L, справедливо неравенство [15]

$$\| L v \| \leqslant k \| B^\nu v \|, \quad v \in Д(B^\nu). \tag{33}$$

Из неравенств (26) и (33) следует

$$\| f - L x_n \| = \| L (x^* - x_n) \| \leqslant k \| B^\nu (x^* - x_n) \| \leqslant \frac{Ck}{\lambda_{n+1}^{s-\nu}} \| Q_n B^s x^* \|.$$

Если же $Д(L) = Д(B^{\nu})$, то непосредственно из неравенства (32) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| f - Lx_n \| = 0.$$

2. Рассмотрим случай, когда оператор L^*K представим в виде

$$L^*K = A + S, \tag{34}$$

где A и S — линейные операторы, причем $Д(A) = Д(L^*K) \subset Д(S)$.

Теорема 2. *Если существуют ограниченные обратные операторы A^{-1} и $(L^*K)^{-1}$, оператор A удовлетворяет условиям* (11) — (13), *SA^{-1} — вполне непрерывный оператор и $x^* \in Д(B^s)$, то, начиная с $n \geqslant N$,*

$$\| B^m (x^* - x_n) \| \leqslant \frac{C + \varepsilon_n}{\lambda_{n+1}^{s-m}} \| Q_n B^s x^* \|, \ 0 \leqslant m \leqslant s, \tag{35}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку оператор A удовлетворяет условию леммы, то выполняется неравенство (14). Следовательно, принимая во внимание теорему 16.1 [10], для всех достаточно больших n уравнение

$$P_n (I + SA^{-1}) u_n = P_n g, \quad u_n = Ay_n, \quad y_n \in H_n, \tag{36}$$

имеет при любом $g \in H$ единственное решение и существует независящая от n положительная постоянная γ такая, что

$$\| u_n \| = \| Ay_n \| \leqslant \gamma \| g \|, \ n \geqslant n_* . \tag{37}$$

Заметим, что из однозначной разрешимости уравнения (36) при $n \geqslant n_*$ вытекает однозначная разрешимость системы уравнений (21).

Пусть P_n^* — проектор, порожденный первыми n элементами системы $\{A\varphi_k\}$ и $Q_n^* = I - P_n^*$. Тогда из результатов § 15.3 работы [10] и неравенства (14) следует, что

$$(1 - \| P_n^* Q_n \|^2)^{-1} \leqslant C^2, \quad n \geqslant n_0 . \tag{38}$$

На основании соотношений (36) — (38) имеем:

$$\| g - Ay_n - Sy_n \|^2 = \| P_n^* (g - Ay_n - Sy_n) \|^2 + \| Q_n^* (g - Ay_n - Sy_n) \|^2 =$$

$$= \| P_n^* Q_n (g - Ay_n - Sy_n) \|^2 + \| Q_n^* (g - SA^{-1} Ay_n) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| P_n^* Q_n \|^2 \| g - Ay_n - Sy_n \|^2 + \{(1 + \gamma \| Q_n^* SA^{-1} \|) \| g \|\}^2,$$

откуда найдем

$$\| g - Ay_n - Sy_n \| \leqslant (C + \varepsilon_n) \| g \|, \tag{39}$$

где $\varepsilon_n = C\gamma \| Q_n^* SA^{-1} \|$, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как SA^{-1} — вполне непрерывный оператор и система $\{A\varphi_k\}$ полна в H (в силу свойств оператора A и системы $\{\varphi_k\}$).

Пусть $g = x^* - x_n$, тогда из неравенств (28) и (39) следует

$$\| x^* - x_n \|^2 \leqslant (C + \varepsilon_n) \| Q_n x^* \| \| x^* - x_n \|,$$

т. е.

$$\| x^* - x_n \| \leqslant (C + \varepsilon_n) \| Q_n x^* \|. \tag{40}$$

Таким образом, неравенство (35) установлено при $m = s = 0$. Справедливость неравенства (35) для случая $0 < m \leqslant s$ доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема доказана.

Если в представлении (34) $A = B$, то условие (14) всегда выполняется (причем $C = 1$) и $Q_n^* = Q_n$. Для этого случая неравенство (35) приобретает вид

$$\| B^m (x^* - x_n) \| \leqslant \frac{1 + \varepsilon_n}{\lambda_{n+1}^{s-m}} \| Q_n B^s x^* \|, \; 0 \leqslant m \leqslant s. \tag{41}$$

Если же $B^\nu S B^{-1}$ — ограниченный оператор, то

$$\varepsilon_n = \gamma \| Q_n S B^{-1} \| = \gamma \| Q_n B^{-\nu} B^\nu S B^{-1} \| \leqslant \overline{C} \lambda_{n+1}^{-\nu},$$

следовательно,

$$\| B^m (x^* - x_n) \| \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^{s-m}} \left(1 + \frac{\overline{C}}{\lambda_{n+1}^{\nu}} \right) \| Q_n B^s x^* \|. \tag{41'}$$

§ 3. Быстрота сходимости некоторых проекционных методов в пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$

1. Обозначим через η_k и ω_k соответственно собственные элементы и собственные значения K-положительно определенного оператора T, т. е.

$$T\eta_k = \omega_k K \eta_k, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

Очевидно, что $\omega_k > 0$. Предположим, что система $\{\eta_k\}$ ортонормирована в $\mathcal{H}_1$ и расположена в порядке возрастания собственных значений, т. е. $0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \leqslant \ldots$ В случае, когда H — действительное пространство, будем предполагать, что T — K-положительно определенный и K-симметрический оператор. Пусть $\widetilde{H}_n$ — подпространство, порожденное первыми n элементами системы $\{\eta_k\}$. Очевидно, $\widetilde{H}_n \subset \mathcal{H}_1$. Тогда для любого $y \in \widetilde{H}_n$ справедливо неравенство

$$\| Ty \|^2 \leqslant \omega_n (Ty, Ky) = \omega_n | y |_0^2. \tag{43}$$

Действительно, принимая во внимание равенства (42) и учитывая тот факт, что $y = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \eta_k$, имеем

$$(Ty, Ty) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i \overline{a}_k (T\eta_i, T\eta_k) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 | a_k |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \omega_n \sum_{k=1}^{n} \omega_k | a_k |^2 = \omega_n \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i \overline{a}_k (T\eta_i, K\eta_k) = \omega_n (Ty, Ky).$$

Возьмем в алгоритме (2) — (3) в качестве φ_i и ψ_i соответственно η_i и $K\eta_i$, т. е. приближенное решение уравнения (1) ищем в виде $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \eta_k$, а параметры c_k определяем из условия

$$(Lx_n - f, K\eta_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{44}$$

Теорема 3. *Пусть L — K-симметрический оператор и существует обобщенное решение x^* уравнения* (1), *т. е. для любого $u \in \mathcal{H}_0$*

$$(f, Ku) = (Kx^*, Lu). \tag{45}$$

Если $x^* \in \mathcal{H}_0$, *система* $\{\eta_k\}$ *полна в* $\mathcal{H}_1$ *и выполняются условия*

$$(Ty, Ky) \leqslant \sigma |(Ly, Ky)|, \ \sigma > 0, \ n \geqslant n_0, \tag{46}$$

$$\| Ly \| \leqslant \overline{\beta} \| Ty \|, \ \overline{\beta} > 0, \ y \in \widetilde{H}_n, \tag{47}$$

то

$$| x^* - x_n |_0 \leqslant C | x^* - v_n |_0, \tag{48}$$

где элемент $v_n \in \widetilde{H}_n$ *выбирается из условия минимума нормы* $| x^* - v_n |_0$.

Если $Д(T) = Д(L)$, $x^* \in Д(L)$ *и для любых* $x \in Д(T)$ *имеет место неравенство*

$$\| Lx \| \leqslant \beta \| Tx \|, \ \beta > 0, \tag{49}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \| f - Lx_n \| = 0. \tag{50}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость системы уравнений (44) при $n \geqslant n_0$ следует из неравенства (46).

Представим невязку в виде

$$f - Lx_n = f - Lv_n - Lz_n, \tag{51}$$

где $z_n = x_n - v_n$, v_n — произвольный элемент из $\widetilde{H}_n$. Тогда на основании (44) и (45) получаем

$$(Lz_n, Kz_n) = (f - Lv_n, Kz_n) = (K(x^* - v_n), Lz_n),$$

откуда, учитывая (47),

$$|(Lz_n, Kz_n)| \leqslant \overline{\beta} | x^* - v_n |_1 \| Tz_n \|. \tag{52}$$

Из неравенств (43), (46) и (52) следует

$$\begin{gathered} | z_n |_0^2 \leqslant \sigma\overline{\beta} | x^* - v_n |_1 \sqrt{\omega_n} | z_n |_0, \\ | z_n |_0 \leqslant \sigma\overline{\beta} \sqrt{\omega_n} | x^* - v_n |_1, \end{gathered} \tag{53}$$

$$\| Tz_n \| \leqslant \sigma\overline{\beta}\omega_n | x^* - v_n |_1. \tag{54}$$

Пусть $v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k$, где α_k — коэффициенты Фурье элемента x^* в пространстве $\mathcal{H}_1$, т. е. $\alpha_k = [x^*, \eta_k]_1$, тогда, учитывая (42), несложными преобразованиями можно установить неравенство

$$| x^* - v_n |_1^2 \leqslant \frac{1}{\omega_{n+1}} | x^* - v_n |_0^2, \tag{55}$$

а также показать, что норма $| x^* - v_n |_0$ принимает минимальное значение.

Действительно,

$$| x^* - v_n |_1^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} | [x^*, \eta_k]_1 |^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} | (Kx^*, T\eta_k) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} | [x^*, \eta_k]_0 |^2 = \frac{1}{\omega_{n+1}} | x^* - v_n |_0^2.$$

На основании неравенств (53) и (55) имеем

$$|x^*-x_n|_0^2=|x^*-v_n|_0^2+|z_n|_0^2\leqslant|x^*-v_n|_0^2+$$
$$+\frac{\sigma^2\bar\beta^2\omega_n}{\omega_{n+1}}|x^*-v_n|_0^2\leqslant C^2|x^*-v_n|_0^2,$$

следовательно, оценка (48) установлена.

Если $x^*\in Д(L)$, то $f=Lx^*$, поэтому из (51), (49) и (54) получаем

$$\|f-Lx_n\|\leqslant\beta\|T(x^*-v_n)\|+\beta\|Tz_n\|\leqslant$$
$$\leqslant\beta\|T(x^*-v_n)\|+\sigma\beta\bar\beta\omega_n|x^*-v_n|_1. \tag{56}$$

Система элементов $\{K\eta_k\}$ ортонормирована и полна в H. Разложим по этой системе элемент Tx^* в ряд Фурье. Пусть b_k — коэффициенты Фурье, т. е. $b_k=(Tx^*, K\eta_k)$. Очевидно, между коэффициентами α_k и b_k существует связь, а именно: $b_k=\omega_k\alpha_k$. Положим, как и выше, $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\eta_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\omega_k}\eta_k$. Тогда, учитывая (42), имеем

$$\|T(x^*-v_n)\|^2=\|Tx^*-\sum_{k=1}^{n}b_kK\eta_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2=\varrho_n^2, \tag{57}$$

$$|x^*-v_n|_1^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\alpha_k|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{\omega_k^2}\leqslant\frac{\varrho_n^2}{\omega_{n+1}^2}, \tag{58}$$

причем, в силу полноты системы $\{K\eta_k\}$ в H, $\varrho_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, на основании неравенств (56) — (58) окончательно имеем

$$\|f-Lx_n\|\leqslant\beta\left(1+\frac{\sigma\bar\beta\omega_n}{\omega_{n+1}}\right)\varrho_n\leqslant M\varrho_n,$$

откуда следует (50). Теорема доказана.

2. Рассмотрим случай, когда оператор K имеет обратный K^{-1}, определенный на всем H. Положим $Kx=u$, $Kx_n=u_n$, $\varphi_k=K\eta_k$, $A=LK^{-1}$, $B=TK^{-1}$ и $\widetilde{B}=K^{-1}T$, тогда уравнения (1), (42) и (44) примут соответственно вид

$$Au=f, \tag{1'}$$

$$B\varphi_k=\omega_k\varphi_k,\quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{42'}$$

$$(Au_n-f, \varphi_i)=0,\quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{44'}$$

Заметим, что если T — K-положительный и K-симметрический оператор, то B и $\widetilde{B}$ — симметрические и положительно определенные соответственно в H и $\mathcal{H}_1$ операторы. Действительно, оператор B определен на плотном в H множестве, так как область $Д(B)$, очевидно, совпадает с областью $KД(T)$, но последняя, в силу определения K-положительной определенности, плотна в H. Симметричность и положительная определенность вытекает из (4) и (5). В самом деле, пусть u, $v\in Д(B)$, т. е. $u=Kx$, $v=Ky$, x, $y\in Д(T)$, тогда

$$(Bu, v) = (Tx, Ky) = (Kx, Ty) = (u, Bv),$$

$$(Bu, u) = (Tx, Kx) \geqslant \alpha_2^{-1} \| Kx \|^2 = \gamma^2 \| u \|^2.$$

Далее, для любых x и $y \in Д(T)$ в силу (4) и (5) имеем

$$[\widetilde{B}x, y]_1 = (Tx, Ky) = (Kx, Ty) = [x, \widetilde{B}y]_1,$$

$$[\widetilde{B}x, x]_1 = (Tx, Kx) \geqslant \alpha_2^{-1} \| Kx \|^2 = \gamma^2 | x |_1^2,$$

откуда видно, что оператор $\widetilde{B}$ — симметрический и положительно определенный в $\mathcal{H}_1$.

В дальнейшем будем считать, что B и $\widetilde{B}$ — самосопряженные операторы соответственно в H и $\mathcal{H}_1$, так как в противном случае их можно расширить в указанных пространствах до самосопряженных, и имеют точечный спектр.

Теорема 4. *Пусть существует решение x^* уравнения* (1) (*возможно обобщенное*), $x^* \in Д(B^m K)$, $m \geqslant 0$, *и выполняются условия* (46) *и* (47).

Если для любого $x \in Д(T)$ имеет место неравенство

$$c \| Tx \| \leqslant \| (LK^{-1})^* Kx \| \leqslant d \| Tx \|, \tag{59}$$

то, начиная с $n \geqslant n_0$,

$$| \widetilde{B}^m (x^* - x_n) |_1 \leqslant C^* | \widetilde{Q}_n \widetilde{B}^m x^* |_1, \tag{60}$$

а в случае, когда $Д(L^*) = Д(T^*)$,

$$\| x^* - x_n \| \leqslant C_1^* \| Q_n (K^*)^{-1} \| \, | \widetilde{Q}_n x^* |_1, \tag{61}$$

где $\widetilde{Q}_n = I - \widetilde{P}_n$, $\widetilde{P}_n$ — проектор в $\mathcal{H}_1$ на подпространство $\widetilde{H}_n$.

Доказательство. Если условия теоремы выполняются, то можно проверить, что оператор $A^* = (LK^{-1})^*$ удовлетворяет условию леммы. Следовательно, в нашем случае выполняется неравенство (14). Пусть u^* и u_n — решения соответственно уравнений (1′) и(44′). Заметим, что в силу (14) при $n \geqslant n_0$ уравнения (44′) однозначно разрешимы. Тогда, повторяя доказательство теоремы 1, получим

$$\| B^m (u^* - u_n) \| \leqslant C^* \| Q_n B^m u^* \|. \tag{62}$$

Поскольку между операторами B^m и $\widetilde{B}^m$ существует связь, а именно: $B^m K = K\widetilde{B}^m$, и для любого $g \in \mathcal{H}_1$ выполняется равенство $\| Q_n K g \| = | \widetilde{Q}_n g |_1$, то, принимая во внимание тот факт, что $u^* = Kx^*$ и $u_n = Kx_n$, на основании неравенства (62) имеем

$$| \widetilde{B}^m (x^* - x_n) |_1 = \| B^m (u^* - u_n) \| \leqslant C^* \| Q_n B^m u^* \| =$$

$$= C^* \| Q_n K \widetilde{B}^m x^* \| = C^* | \widetilde{Q}_n \widetilde{B}^m x^* |_1,$$

т. е. неравенство (60) имеет место.

Неравенство (59), учитывая положительную определенность и самосопряженность оператора B, можно представить в виде

$$c \| Bu \| \leqslant \| A^* u \| \leqslant d \| Bu \|, \tag{63}$$

откуда, принимая во внимание ограниченность оператора K^{-1}, следует существование и ограниченность в H оператора $[(LK^{-1})^*]^{-1}$. Так как *области*

$Д(K)$ и $R(K)$ плотны в H, то существуют операторы K^*, $(K^{-1})^*$ и $(K^*)^{-1} = (K^{-1})^*$. На основании сказанного легко установить существование ограниченного в H оператора $(L^*)^{-1}$. Действительно, $L^* = K^*(LK^{-1})^*$, ибо $L^* = (LK^{-1}K)^* \supset K^*(LK^{-1})^* \supset K^*(K^{-1})^* L^* = L^*$. Следовательно,

$$(L^*)^{-1} = [(LK^{-1})^*]^{-1}(K^*)^{-1}. \tag{64}$$

Если теперь учесть условие $Д(L^*) = Д(T^*)$, то, согласно теореме 4 (I.XII) [1], оператор $T^*(L^*)^{-1}$ ограничен в H, т. е.

$$\| T^*(L^*)^{-1} \| \leqslant M. \tag{65}$$

На основании (44′), (63) — (65) и того факта, что $B = (K^*)^{-1}T^*$, имеем

$$\| x^* - x_n \|^2 = (u^* - u_n, (K^*)^{-1}(x^* - x_n)) = (u^* - u_n, A^*(L^*)^{-1}(x^* - x_n)) =$$
$$= (u^* - u_n, A^*Q_n(L^*)^{-1}(x^* - x_n)) \leqslant d\,| x^* - x_n |_1 \| Q_n B(L^*)^{-1}(x^* - x_n) \|,$$

откуда вытекает, что

$$\| x^* - x_n \| \leqslant dM \| Q_n (K^*)^{-1} \| \; | x^* - x_n |_1. \tag{66}$$

Неравенство (61) следует из неравенств (60) и (66). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть D — некоторый оператор и пусть при некотором i оператор D^iB^{-m} действует из H в H и ограничен, тогда

$$\| D^i x \| = \| D^iB^{-m}B^m x \| \leqslant C' \| B^m x \|, \; x \in Д(B^m).$$

Следовательно, если выполняются условия теоремы 1 или 2, то вместо оценок (26), (35) и (41) можно получить соотношение

$$\| D^i(x^* - x_n) \| = o(\lambda_{n+1}^{m-s}), \; 0 \leqslant m \leqslant s. \tag{67}$$

П р и м е р. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lx \equiv x''' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{68}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x'(1) = x''(0) = 0, \tag{69}$$

где функции $a'(t)$, $b(t)$ и $f(t) \in L_2[0, 1]$.

Пусть $Kx \equiv -x'$, $x(0) = 0$. Тогда

$$L^*Kv \equiv v^{\mathrm{IV}} + (a(t)v')' - b(t)v',$$
$$v(0) = v'(1) = v''(0) = v'''(1) = 0. \tag{70}$$

Положим $Bv \equiv v^{\mathrm{IV}}$ с краевыми условиями (70) и $Sv \equiv (a(t)v')' - b(t)v'$. Легко проверить, что B — положительно определенный самосопряженный оператор с точечным спектром, причем $\lambda_k = \pi^4\left(k - \frac{1}{2}\right)^4$ и $\varphi_k(t) = \sin \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)t$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, его соответственно собственные значения и элементы, а также SB^{-1} — вполне непрерывный оператор. Предположим также, что существует при любом $f(t) \in L_2[0, 1]$ единственное решение $x^*(t)$ уравнения (68), удовлетворяющее условиям (69). Тогда можно проверить, что выполняются условия теоремы 2, причем $s = \frac{3}{4}$, а также операторы $D^iB^{-\frac{i}{4}}$, где $D = \frac{d}{dt}$, $i = 0, 1, 2, 3$, ограничены в $L_2[0, 1]$.

Если приближенное решение задачи (68) — (69) искать в виде $x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)t$, а c_k определять из системы уравнений

$$\int_0^1 \{f(t) - Lx_n(t)\} \cos\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)t dt = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

то, начиная с $n \geqslant n_0$, эта система однозначно разрешима и согласно формуле (67)

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i}(x^*(t) - x_n(t)) \right\| = o(n^{i-3}), \ i = 0, 1, 2, 3.$$

Если же учесть соотношение, содержащееся в работе [10, стр. 231], то

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left| \frac{d^i}{dt^i}(x^*(t) - x_n(t)) \right| = o(n^{i+\frac{1}{2}-3}), \ i = 0, 1, 2.$$

Замечание 2. При несколько измененных условиях теорем 1 и 2 оценки вида (26), (35) и (41) можно установить при целых неотрицательных m и для случая, когда B — самосопряженный оператор с точечным спектром, имеющий ограниченный обратный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
2. С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
3. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.
4. С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», М., 1966.
5. Н. И. Польский, О сходимости некоторых приближенных методов анализа, УМЖ, т. VII, № 1, 1955.
6. Н. И. Польский, Проекционные методы в прикладной математике, ДАН СССР, т. 143, № 4, 1962.
7. А. Е. Мартынюк, Некоторые новые приложения методов типа Галеркина, Матем. сб., т. 49 (91): 1, 1959.
8. W. V. Petryshyn, Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space, Trans. am. math. sos., v. 105, 1962.
9. W. V. Petryshyn, On a class of K — p. d. and non — K — p. d. operators and operator equations, Journal of math. anal. and applic., v. 10, N 1, 1965.
10. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», М., 1969.
11. А. В. Джишкариани, О методе Бубнова — Галеркина, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 7, № 6, 1967.
12. А. В. Джишкариани, О методах наименьших квадратов и Бубнова — Галеркина, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 8, № 5, 1968.
13. А. Ю. Лучка, О быстроте сходимости невязки и погрешности к нулю методов Бубнова — Галеркина и наименьших квадратов, Тр. семинара по дифф. и интегр. уравнениям, Изд. Ин-та математики АН УССР, вып. 1, 1969.
14. А. Ю. Лучка, Некоторые замечания о быстроте сходимости метода моментов, Тр. семинара матем. обеспечение ЭЦВМ и эфф. орган. вычисл. процесса, Изд. Ин-та кибернетики АН УССР, вып. 4, 1969.
15. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», М., 1966.

Поступила 19.VI 1970 г.

Институт математики АН УССР