1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.917:517.946:519.2

Усреднение в стохастических системах

Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец

Изучение влияния случайных сил на колебательные системы является исключительно важной проблемой. Задачи подобного типа имеют большое значение в радиотехнике, акустике, измерительной технике, гидроаэроупругости и других разделах физики и техники, связанных в большинстве случаев с повышением чувствительности и помехоустойчивости радиоприемных и измерительных устройств, устойчивостью систем при параметрических случайных воздействиях и т. п.

При исследовании предельного поведения линейной колебательной системы, находящейся под воздействием случайных сил, в пределе превращающихся в «белый шум», Н. Н. Боголюбов [1] показал, что движение такой системы описывается марковским процессом, переходные вероятности которого удовлетворяют уравнению Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП).

Уравнение КФП известно из классических работ по теории вероятностей.

Связь между поведением частицы, участвующей в броуновском движении, и дифференциальным уравнением в частных производных была установлена впервые Эйнштейном, затем получила дальнейшее развитие в работах Смолуховского, Фоккера и Планка [2]. Более общие уравнения для марковских процессов были получены А. Н. Колмогоровым [3] и применены затем для изучения нелинейных динамических систем А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным и А. А. Виттом [4].

Однако предельный переход в уравнениях динамики не был строго обоснован.

Развивая идеи Н. Н. Боголюбова, И. И. Гихман [5, 6] дал общее определение динамической системы, находящейся под влиянием случайного процесса с независимыми приращениями, показал, что такая система описывается марковским процессом, и вывел для переходных вероятностей широкого класса систем уравнения КФП.

В середине сороковых и начале пятидесятых годов К. Ито [7] и независимо от него И. И. Гихман [8] провели прямое построение траекторий диффузионных марковских процессов с помощью стохастических интегральных уравнений.

Появление стохастических интегральных уравнений открыло новые возможности для применения вероятностных методов в теории дифференциальных уравнений.

Здесь впервые было введено понятие стохастического дифференциала, найдены условия существования и единственности решений стохастического дифференциального уравнения, доказана дифференцируемость решений по начальным данным и выведены уравнения КФП для переходных вероятностей. Новые теоремы существования и единственности решений стохастических уравнений, полученные А. В. Скороходом [9], дали возможность построить многомерный диффузионный процесс. В недавних работах И. И. Гихман и А. В. Скороход [10] построили самое общее стохастическое дифференциальное уравнение, основанное на понятии криволинейного интеграла от случайного поля вдоль случайной кривой.

Возросший интерес к теории дифференциальных уравнений со случайными параметрами и функциями стимулировал не только математические работы, но и исследования прикладного характера. Здесь следует указать на работы И. Л. Берштейна [11], С. М. Рытова [12], Р. Л. Стратоновича [13], В. И. Тихонова [14] и др.

Эффективным методом исследования случайных процессов в нелинейных колебательных системах является метод уравнений КФП, хотя они в большинстве случаев трудно поддаются аналитическому решению, за исключением частного случая линейных систем. В первых исследованиях броуновского движения рассматривались только линейные задачи.

Применение принципа усреднения позволяет получить интересные и важные результаты и для квазилинейных систем, содержащих малый параметр. Метод уравнений КФП дает в этом случае приемлемые и обозримые результаты, если рассматриваемые исходные уравнения, описывающие случайный колебательный процесс, могут быть приведены к стандартному виду. Усреднение можно провести или в самих стандартных уравнениях, которые затем с помощью уравнений КФП легко анализируются, или в составленном для них уравнении КФП, которое в этом случае также имеет стандартный вид. Первые результаты по применению и обоснованию принципа усреднения для стохастических систем принадлежат И. И. Гихману [6]. Дальнейшее развитие затем он получил в работах Р. Л. Стратоновича [13], Р. З. Хасьминского [15], И. И. Гихмана [16], И. Вркоча [17], Ю. А. Митропольского и В. Г. Коломийца [18] и др.

Переходя к анализу колебательных стохастических систем, кратко остановимся на сущности метода уравнений КФП и основных положениях теории дифференциальных уравнений со случайными функциями.

Пусть марковский процесс $Z(t)$ представляет собой совокупность n процессов $Z_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, тогда уравнение КФП для плотности распределения вероятности $W(z_1, \ldots, z_n, t \,|_{z_1^0, \ldots, z_n^0, t^0})$ записывается в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z_1, \ldots, z_n, t) W] = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} [B_{ik}(z_1, \ldots, z_n, t) W], \qquad (1)$$

где

$$A_i = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \mathbf{M}\{U_i - Z_i\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (u_i - z_i) p(z_1, \ldots, z_n, t; u_1, \ldots, u_n, t+\tau)\, du_1 \ldots du_n,$$

$$B_{ik} = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \mathbf{M}\{(U_i - Z_i)(U_k - Z_k)\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (u_i - z_i)(u_k - z_k) p(z_1, \ldots, z_n, t; u_1, \ldots$$

$$\ldots, u_n, t+\tau)\, du_1 \ldots du_n,$$

$$U_i = Z_i(t+\tau) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$p(z_1, \ldots, z_n, t; u_1, \ldots, u_n, t+\tau)$ — плотность вероятности перехода, $\mathbf{M}$ — математическое ожидание.

Если марковский процесс $Z(t) = \{Z_1(t), \ldots, Z_n(t)\}$ является решением некоторой системы стохастических дифференциальных уравнений, то A_i и B_{ik} легко определяются из вида системы этих уравнений. Пусть, например, уравнение движения автономной системы, находящейся под воздействием стационарных гауссовских шумов, записано в каноническом виде

$$\frac{dZ}{dt} = f(Z) + g(Z)\dot{\xi}(t), \tag{2}$$

где вектор $Z = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ описывает состояние системы, $\dot{\xi}(t) = \{\dot{\xi}_1(t), \ldots$ $\ldots, \dot{\xi}_n(t)\}$ — векторный процесс «белого шума», $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — вектор-функция, $g(Z)$ — квадратная матрица n-го порядка.

В этом случае $A_i = f_i$, $B_{ik} = g_{im}g_{km}$.

Уравнение КФП, соответствующее системе уравнений (2), может быть записано в форме

$$\frac{\partial W(z, t|_{z_0, t_0})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(f_i(z) W(z, t|_{z_0, t_0})) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,k,m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k}(g_{im}(z) g_{km}(z) W(z, t|_{z_0, t_0})). \tag{3}$$

Метод уравнений КФП применим также и для неавтономных систем с той лишь разницей, что коэффициенты переноса A_i и коэффициенты диффузии B_{ik} будут зависеть от времени t. Функция W должна удовлетворять следующим условиям:

а) $W \geqslant 0$ при всех z и t;

б) $W \to 0$ при $z \to \pm\infty$ и всех t;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} W dz_1 \ldots dz_n = 1$ при всех t.

При исследовании нелинейных систем особый интерес представляет случай таких систем, для которых W стремится со временем к стационарной плотности распределения вероятности, не зависящей от времени и начальных условий.

В этом случае $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\partial W}{\partial t} = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} W(z_1, \ldots, z_n, t|_{z_1^0, \ldots, z_n^0, t^0}) = W_{\text{ст}}(z_1, \ldots$ $\ldots, z_n)$ и уравнение (1) переходит в стационарное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}(A_i(z_1, \ldots, z_n) W_{\text{ст}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k}(B_{ik}(z_1, \ldots, z_n) W_{\text{ст}}). \tag{4}$$

Для уравнений первого порядка уравнение (4) всегда можно легко проинтегрировать, для нелинейных же систем более высокого порядка в некоторых случаях можно проинтегрировать методом разделения переменных, а в остальных случаях может быть применен численный анализ. Прежде чем остановиться более подробно на применении принципа усреднения для дифференциальных стохастических уравнений, сделаем некоторые замечания, относящиеся к основным положениям теории дифференциальных уравнений со случайными функциями. Основные результаты здесь принадлежат И. И. Гихману и А. В. Скороходу [10].

Рассматривая стохастические дифференциальные уравнения, следует прежде всего условиться, что мы понимаем под решением стохастического уравнения. Если, например, задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

где x — n-мерный вектор, принадлежащий n-мерному евклидовому пространству E_n, t — время, то оно описывает в E_n движение, обладающее скоростью.

Вместе с тем, даже самые простые и интересные случайные процессы (броуновское движение, диффузионные процессы) не обладают скоростью.

Поэтому определение дифференциального уравнения для случайного процесса должно быть дано в такой форме, чтобы оно охватывало также и возможность существования недифференцируемых решений. Это можно достичь различными способами — или заменить дифференциальное уравнение интегральным, или ввести некоторые другие определения. Остановимся на определении, данном И. И. Гихманом [16].

Пусть $\{U, \gamma, P\}$ — некоторое вероятностное пространство; $\alpha(t, x) = \alpha(t, x, u)$, $u \in U$ — случайное векторное поле со значениями в E_n, определенное для всех $t \in [t_0, T]$, $x \in E_n$. Обозначим через $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_n = T\}$ разбиение отрезка $[t_0, T]$ и пусть $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Для каждого x_0 и λ построим случайную функцию $\xi_\lambda(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ с помощью соотношений

$$\xi_\lambda(t_0) = x_0,$$

$$\xi_\lambda(t) = \xi_\lambda(t_{k-1}) + \alpha(t, \xi_\lambda(t_{k-1})) - \alpha(t_{k-1}, \xi_\lambda(t_{k-1})).$$

Если при $|\lambda| \to 0$ существует предел $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} \xi_\lambda(t) = \xi(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$, то этот предел называется решением дифференциального стохастического уравнения

$$d\xi = \alpha(t, \xi, dt), \ \xi(t_0) = x_0 \tag{5}$$

на интервале $[t_0, T]$.

При этом везде под пределом понимается предел в смысле средней квадратичной сходимости случайных величин.

Сформулируем теорему, обеспечивающую существование решения дифференциального стохастического уравнения (5).

Теорема [16]. *Пусть для стохастического дифференциального уравнения* (5) *выполняются следующие условия*:

1) $|\mathbf{M}\{\Delta\alpha(t, x)|_{\mathfrak{f}_t}\}| \leqslant (\chi + C|x|)\Delta t,$

$$\mathbf{M}\{|\Delta\alpha(t, x)|^2|_{\mathfrak{f}_t}\} \leqslant (\chi + C|x|^2)\Delta t;$$

2)
$$|\mathbf{M}\{(\Delta\alpha(t, x) - \Delta\alpha(t, y)|_{\mathfrak{f}_t}\}| \leqslant C|x - y|\Delta t,$$

$$\mathbf{M}\{|\Delta\alpha(t, x) - \Delta\alpha(t, y)|^2|_{\mathfrak{f}_t}\} \leqslant C|x - y|^2\Delta t,$$

где χ — *случайная величина, не зависящая от* t *и* x *и такая, что* $\mathbf{M}\chi^2 < \infty$, C — *постоянная*, $\Delta\alpha(t, x) = \alpha(t + \Delta t, x) - \alpha(t, x)$, $|x|$ — *норма вектора* x, $M\{z|_{\mathfrak{f}_t}\}$ *обозначает условное математическое ожидание* z *относительно монотонно неубывающего семейства* σ-*алгебр* $\{\mathfrak{f}_t, t \in [t_0, T]\}$. *Тогда уравнение* (5) *имеет единственное решение.*

В приложениях проще рассматривать уравнение

$$d\xi = a(t, \xi)\, dt + b(t, \xi)\, d\alpha, \tag{6}$$

понимая его как уравнение, определяющее неизвестную случайную функцию $\xi(t)$, обладающую свойствами:

а) $\xi(t)$ при каждом t f_t-измерима;

б) $\xi(t) - \xi(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau, \xi(\tau))\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau, \xi(\tau))\, d\alpha(\tau).$

Второй интеграл в б) является стохастическим интегралом по винеровскому процессу или мартингалу [16].

В случае, когда $a(t, x)$ и $b(t, x)$ ограничены и удовлетворяют условиям Липшица, существует единственный случайный процесс $\xi(t)$, являющийся решением интегрального уравнения б). Существование и единственность решения уравнения (6), когда $\alpha(t)$ — мартингал, доказывается аналогично случаю, когда $\alpha(t)$ — винеровский процесс.

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, находящуюся под воздействием стационарного гауссового «белого шума» и описываемую следующим дифференциальным уравнением второго порядка [18, 19]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sigma f_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t), \tag{7}$$

где ε — малый положительный параметр, ω, σ — некоторые постоянные величины, f_1 и f_2 — нелинейные функции, удовлетворяющие всем необходимым условиям, $\dot{\xi}(t)$ — процесс «белого шума» *.

Введя замену $\frac{dx}{dt} = y$, уравнение (7) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} &dx = y\,dt, \\ &dy = [-\omega^2 x + \varepsilon f_1(x, y)]\, dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma f_2(x, y)\, d\xi(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Под решением системы (8) мы понимаем решение следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau, \\ y(t) &= y_0 + \int\limits_0^t [-\omega^2 x(\tau) + \varepsilon f_1(x(\tau), y(\tau))]\, d\tau + \sqrt{\varepsilon}\sigma \int\limits_0^t f_2(x(\tau), y(\tau))\, d\xi(\tau). \end{aligned} \tag{9}$$

С математической точки зрения уравнения (8) представляют собой квазилинейные дифференциальные стохастические уравнения двумерного диффузионного марковского процесса.

Вследствие малости параметра ε возможно применение асимптотических методов Крылова—Боголюбова [20]. Применяя метод Крылова—Боголюбова, целесообразно перейти от уравнений (8) к системе уравнений первого порядка относительно амплитуды и фазы колебаний. Для этого, как обычно принято [20], произведем в уравнениях (8) замену переменных согласно формулам

$$\begin{aligned} x &= a \cos\psi, \\ y &= -a\omega \sin\psi \quad (\psi = \omega t + \theta). \end{aligned} \tag{10}$$

---

* Здесь и раньше «белым шумом» называем обобщенную производную от процесса Винера или процесса броуновского движения $\xi(t)$ $(\mathbf{M}\xi(t) = 0,\ \mathbf{M}\xi^2(t) = t)$.

Тогда для новых переменных a и θ — амплитуды и фазы — получим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} da = -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi dt - \\ -\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\omega} f_2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\xi(t), \\ d\theta = -\frac{\varepsilon}{a\omega} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi dt - \\ -\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\omega} f_2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\xi(t). \end{gathered} \tag{11}$$

Полученные уравнения представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме для двумерного диффузионного марковского процесса.

Заметим, что эти уравнения являются точными и в общем случае достаточно сложными.

Остановимся теперь на вопросе, как следует обобщать принцип усреднения на дифференциальные стохастические уравнения. Рассмотрим простейший пример

$$dx(t) = \sin t d\xi(t). \tag{12}$$

Если к уравнению (12) обычным образом применить принцип усреднения, то для усредненного уравнения мы получили бы $d\bar{x}(t) = 0$.

В действительности же усреднение уравнения (12) должно привести к уравнению

$$d\bar{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} d\xi(t). \tag{13}$$

В работах И. Л. Берштейна [11], Р. Л. Стратоновича [13], В. Г. Коломийца [21] и в ряде других проводилось частичное усреднение, усреднялись только неслучайные члены в правых частях уравнений (11), флюктуационные члены усреднялись в составленном потом уравнении КФП.

Эти усреднения в два приема можно объединить в одно усреднение, если под усредненной системой стохастических дифференциальных уравнений, соответствующей системе (11), понимать следующую систему:

$$\begin{gathered} d\bar{a} = \bar{f}_1^{(1)}(\bar{a})\, dt + \bar{f}_2^{(1)}(\bar{a})\, d\xi(t), \\ d\bar{\theta} = \bar{f}_1^{(2)}(\bar{a})\, dt + \bar{f}_2^{(2)}(\bar{a})\, d\xi(t), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{f}_1^{(1)} = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{-\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(\bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin\bar{\psi}\right\}, \\ \bar{f}_2^{(1)} = \sqrt{\underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2} f_2^2(\bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin^2\bar{\psi}\right\}}, \\ \bar{f}_1^{(2)} = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{-\frac{\varepsilon}{\bar{a}\omega} f_1(\bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos\bar{\psi}\right\}, \\ \bar{f}_2^{(2)} = \sqrt{\underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\frac{\varepsilon\sigma^2}{\bar{a}^2\omega^2} f_2^2(\bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos^2\bar{\psi}\right\}}, \end{gathered}$$

M — оператор усреднения по времени

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\{U(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\,dt. \tag{15}$$

Поскольку время t входит в уравнения (11) только через ψ, оператор усреднения принимает вид

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\{V(\psi)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\,d\psi. \tag{16}$$

Поэтому в нашем случае оператор $\underset{t}{\mathbf{M}}$ имеет вид (16).

При некоторых предположениях марковский процесс $\{a(t), \theta(t)\}$ слабо сходится на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ к марковскому процессу $\{\overline{a}(t)\ \overline{\theta}(t)\}$.

При исследовании случайных колебаний неавтономной системы, описываемой нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением второго порядка [22]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sigma g\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t), \tag{17}$$

где $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ и $g\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ — нелинейные функции, являющиеся целыми полиномами относительно $\sin\nu t$, $\cos\nu t$, x, $\frac{dx}{dt}$ и представимые в виде сумм

$$f = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad g = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} g_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

следует различать нерезонансный и резонансный случаи [20].

В нерезонансном случае, совершая в уравнении замену переменных согласно формулам (10), после ряда выкладок получим следующую систему в стандартной форме для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\omega} g(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\dot{\xi}(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\omega} g(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\dot{\xi}(t). \end{aligned} \tag{18}$$

В нерезонансном случае уравнениям (18) будет отвечать усредненная система стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{a}}{dt} &= \overline{f}^{(1)}(\overline{a}) + \overline{g}^{(1)}(\overline{a})\,\dot{\xi}(t), \\ \frac{d\overline{\theta}}{dt} &= \overline{f}^{(2)}(\overline{a}) + \overline{g}^{(2)}(\overline{a})\,\dot{\xi}(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\bar{f}^{(1)}(\bar{a}) = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi, \bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin\bar{\psi}\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\bar{g}^{(1)}(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2}{4\pi^2\omega^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(\varphi, \bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\sin^2\bar{\psi}\,d\varphi\,d\bar{\psi}},$$

$$\bar{f}^{(2)}(\bar{a}) = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2\bar{a}\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi, \bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos\bar{\psi}\,d\varphi\,d\bar{\psi},$$

$$\bar{g}^{(2)}(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2}{4\pi^2\bar{a}^2\omega^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(\varphi, \bar{a}\cos\bar{\psi}, -\bar{a}\omega\sin\bar{\psi})\cos^2\bar{\psi}\,d\varphi\,d\bar{\psi}}$$

$$(\bar{\psi} = \omega t + \bar{\theta}).$$

В резонансном случае случайные функции a и θ являются решением такой системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon\Delta s}{\nu r}\, a\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right) - \\
&- \frac{\varepsilon s}{\nu r} f\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times \\
&\times\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right) - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma s}{\nu r} g\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),\right. \\
&\left. -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\dot{\xi}(t), \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\varepsilon\Delta s}{\nu r}\cos^2\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right) - \frac{\varepsilon s}{r\nu a} f\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),\right. \\
&\left. -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right) - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma s}{r\nu a}\times \\
&\times g\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times \\
&\times\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\dot{\xi}(t) \quad \left(\omega^2 = \left(\frac{r}{s}\right)^2\nu^2 + \varepsilon\Delta\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Усредненная система будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}}{dt} &= \bar{f}^{(1)}(\bar{a}, \bar{\theta}) + \bar{g}^{(1)}(\bar{a}, \bar{\theta})\,\dot{\xi}(t), \\
\frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \bar{f}^{(2)}(\bar{a}, \bar{\theta}) + \bar{g}^{(2)}(\bar{a}, \bar{\theta})\,\dot{\xi}(t),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\bar{f}^{(1)} = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{-\frac{\varepsilon s}{\nu r} f\left(\nu t, \bar{a}\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \bar{\theta}\right),\right.\right.$$

$$-\bar{a}\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\right)\sin\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\Big\},$$

$$\bar{g}^{(1)}=\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2}{\nu^2r^2}\underset{t}{\mathbf{M}}\Big\{g^2\left(\nu t,\bar{a}\cos\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right),-\bar{a}\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\right)\times}$$

$$\overline{\times\sin^2\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\Big\}},$$

$$\bar{f}^{(2)}=\frac{\varepsilon\Delta s}{2\nu r}+\underset{t}{\mathbf{M}}\Big\{-\frac{\varepsilon s}{r\nu\bar{a}}f\left(\nu t,\bar{a}\cos\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right),\right.$$

$$\left.-\bar{a}\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\right)\cos\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\Big\},$$

$$\bar{g}^{(2)}=\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2s^3}{r^2\nu^2\bar{a}^2}\underset{t}{\mathbf{M}}\Big\{g^2(\nu t,\bar{a}\cos\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right),-\bar{a}\frac{r}{s}\nu\times}$$

$$\overline{\times\sin\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right),\cos^2\left(\frac{r}{s}\nu t+\bar{\theta}\right)\Big\}}.$$

Применение метода уравнений КФП для усредненных уравнений упрощается особенно в стационарном случае.

Изложенному выше методу усреднения в стохастических дифференциальных уравнениях в стандартной форме можно придать математическую строгость. Здесь может быть также доказана теорема об оценке разности между решением точной и решением усредненной системы на конечном временном интервале.

Первые результаты по применению принципа усреднения для некоторых дифференциальных уравнений со случайными функциями получены И. И. Гихманом [6]. Им изучено движение динамической системы в быстропеременном поле сил $A\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)$ при наличии быстропеременных случайных возмущений $f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, описываемой уравнением

$$\frac{dx}{dt}=A\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)+f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).\tag{22}$$

При $\varepsilon\to 0$ определяемая этим уравнением система стохастически стремится к системе, определяемой уравнением

$$\frac{dy}{dt}=a(y),\tag{23}$$

где

$$a(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t,y)\,dt.$$

Рассмотрим сначала систему стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x)+\varepsilon\frac{dY}{dt},\tag{24}$$

где x, X — n-мерные векторы евклидового пространства E_n, $Y(t)$ — n-мерный винеровский процесс.

Допустим, что вектор-функция $X(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существуют такие положительные постоянные K и λ, что при всех $t \geqslant 0$ для любых $x, x', x'' \in D \subset E_n$ выполняются неравенства

$$|X(t, x)| \leqslant K,$$
$$|X(t, x') - X(t, x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|;$$

б) равномерно по $x \in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x).$$

При этих условиях справедлива такая теорема.

Т е о р е м а [21]. *Пусть для системы* (24) *выполняются условия* а) и б).

Тогда для любых наперед заданных сколь угодно малых чисел $\varrho > 0$, $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* L *можно указать такое* ε_0, *что если* $\bar{x}(t)$ *является решением системы*

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\bar{x}), \tag{25}$$

определенным при $0 \leqslant t < \infty$ *и лежащим в области* D *вместе со своей* ϱ*-окрестностью, то для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в интервале* $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ $x(t)$ *сходится по вероятности* к $\bar{x}(t)$, *т. е.*

$$P\{|x(t) - \bar{x}(t)| > \eta\} \to 0, \tag{26}$$

где $x(t)$ — *решение системы* (24), *совпадающее с решением* $\bar{x}(t)$ *при* $t = 0$.

Эта теорема справедлива и для системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma \frac{dY}{dt}, \tag{24'}$$

только в качестве усредненной системы следует взять следующую:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon}\, \sigma \frac{dY}{dt}. \tag{25'}$$

При указанных предположениях решение системы (24) сходится также в среднем к решению системы (25). Последнее справедливо и для систем (24′) и (25′).

И. И. Гихманом [16] принцип усреднения распространен на стохастические дифференциальные уравнения более общего вида

$$d\xi = a(t, \xi, \mu)\, dt + \sum_{s=1}^{n} b^s(t, \xi, \mu)\, d\alpha_s, \tag{27}$$

где $\alpha_s = \alpha_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — винеровский процесс, а векторные функции $a(t, x, \mu)$, $b^s(t, x, \mu)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют соответствующим условиям регулярности.

Следует также считать весьма важным обоснование принципа усреднения для дифференциальных стохастических уравнений, не предпологающее, что стохастическая часть этого уравнения выражается через винеровские процессы, хотя последний случай и является очень важным. Зачастую можно считать, что винеровские процессы появляются только в пределе при $\mu \to 0$, а до предельного перехода случайные возмущения имеют более общую стохастическую природу.

В соответствии с этим рассмотрим два случая. В первом допустим, что только $a(t, x, \mu)$ может быть интегрально непрерывно при $\mu = 0$, а функции $b^s(t, x, \mu)$ непрерывны при $\mu = 0$ в более сильном смысле. Во втором случае предположим, что возмущающий случайный процесс $\alpha_s(t)$ зависит от параметра μ, и сформулируем теорему, которая соответствует в этом случае принципу усреднения.

Для уравнения (27) принцип усреднения вытекает из свойств непрерывной зависимости решений дифференциальных стохастических уравнений от параметра, ели $a(t, x, \mu)$ и $b^s(t, x, \mu)$ интегрально непрерывны по параметру μ и удовлетворяют условию Липшица.

Итак, пусть для уравнения (27) выполнены следующие условия:

$$|a(t, x, \mu) - a(t, y, \mu)| + \sum_{s=1}^{n} |b^s(t, x, \mu) - b^s(t, y, \mu)| \leqslant C|x - y|; \qquad (28)$$

$$\left| \int_t^{t+\Delta} [a(\tau, x, \mu) - a_0(\tau, x)]\, d\tau \right| \leqslant \psi(\mu)(1 + |x|); \qquad (29)$$

$$\int_0^T \frac{|b^s(t, x, \mu) - b_0^s(t, x)|^2 dt}{1 + |x|^2} \leqslant \psi(\mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (30)$$

для всех $x, y \in E_n$, $t \geqslant 0$, $\mu \in [0, \mu_0]$, где $a_0(t, x) = a(t, x, 0)$, $b_0^s(t, x) = b^s(t, x, 0)$, C не зависит от x, y, μ, $\psi(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, $\alpha_s(t)$ — векторный мартингал ($\mathbf{M}\Delta\alpha_s(t) = 0$, $\mathbf{M}|\Delta\alpha_s|^2 = \Delta\lambda_s(t)$), функции $\lambda_s(t)$ абсолютно непрерывны и $\lambda_s'(t) \leqslant \lambda_0$.

При этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема [16]. *Пусть для уравнения* (27) *выполнены условия* (28) — (30), *тогда его решение* $\xi^\mu(t)$ *непрерывно в среднем квадратическом при* $\mu \to 0$, *т. е.*

$$\mathbf{M}|\xi^\mu(t) - \xi^0(t)|^2 \to 0. \qquad (31)$$

Кратко остановимся на доказательстве этой теоремы. Пусть $T > 0$ — любое число. Разобъем отрезок $[0, T]$ на частичные отрезки точками деления t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и положим $\xi_k^\mu = \xi^\mu(t_k)$. Рассмотрим разность

$$\xi_{k+1}^0 - \xi_{k+1}^\mu = \xi_k^0 - \xi_k^\mu + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [a_0(t, \xi^0(t)) - a(t, \xi^\mu(t), \mu)]\, dt +$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{s=1}^{n} [b_0^s(t, \xi^0(t)) - b^s(t, \xi^\mu(t), \mu)]\, d\alpha_s.$$

Эту разность можно представить в виде

$$\xi_{k+1}^0 - \xi_{k+1}^\mu = \xi_k^0 - \xi_k^\mu + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = \xi_k^0 - \xi_k^\mu + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_0, \qquad (32)$$

где обозначено

$$\omega_1 = [a_0(t, \xi^0(t)) - a_0(t, \xi_k^0)]\, dt + \sum_{s=1}^{n} [b_0^s(t, \xi^0(t)) - b_0^s(t, \xi_k^0)]\, d\alpha_s,$$

$$\omega_2 = [a_0(t, \xi_k^0) - a_0(t, \xi_k^\mu)]\, dt + \sum_{s=1}^{n} [b_0^s(t, \xi_k^0) - b_0^s(t, \xi_k^\mu)]\, d\alpha_s,$$

$$\omega_3 = [a_0(t, \xi_k^\mu) - a(t, \xi_k^\mu, \mu)]\, dt + \sum_{s=1}^{n} [b_0^s(t, \xi_k^\mu) - b^s(t, \xi_k^\mu, \mu)]\, d\alpha_s,$$

$$\omega_4 = [a(t, \xi_k^\mu, \mu) - a(t, \xi^\mu(t), \mu)]\, dt + \sum_{s=1}^{n} [b^s(t, \xi_k^\mu, \mu) - b^s(t, \xi^\mu(t), \mu)\, d\alpha_s,$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4.$$

Положим $\delta_k = \mathbf{M}\,|\xi_k^0 - \xi_k^\mu|^2$. Тогда из соотношения (32) находим

$$\delta_{k+1} = \delta_k + 2\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_0\right) + \mathbf{M}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_0\right|^2. \tag{33}$$

Заменив ω_0 на $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$, оценим различные слагаемые в правой части формулы (33). Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, неравенствами (28) — (30) и неравенством

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant 2^n (a_1^2 + \ldots + a_n^2),$$

получим

$$\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_1\right) \leqslant \sqrt{\delta_k}\, C \sqrt{\Delta t_k} \left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{M}\,|\xi^0(t) - \xi_k^0|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(\Delta t_k = t_{k+1} - t_k),$$

где C_1 — символ некоторой абсолютной постоянной такой, что $C^2 = C$, $10C = C$ и т.д.

Используя свойства стохастического интеграла по мартингалу, можно показать, что моменты второго порядка от решения дифференциального стохастического уравнения при некоторых предположениях равномерно ограничены на отрезке времени $[0, T]$ и

$$\mathbf{M}\,|\xi(t + \Delta t) - \xi(t)|^2 \leqslant C_1 \Delta t, \tag{34}$$

где C_1 зависит от T и постоянной C, входящей в условие Липшица.

Учитывая неравенство (34), можем записать

$$\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_1\right) \leqslant C \sqrt{\delta_k}\, \Delta t_k^{\frac{3}{2}}.$$

Аналогично оценивается слагаемое, соответствующее ω_4:

$$\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_4\right) \leqslant C \sqrt{\delta_k}\, \Delta t_k^{\frac{3}{2}}.$$

Далее имеем

$$\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu, \int_{t_k}^{k+1} \omega_2\right) \leqslant C\, \delta_k \Delta t_k,$$

$$\mathbf{M}\left(\xi_k^0 - \xi_k^\mu \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_3\right) \leqslant \psi(\mu)\, [C + \delta_k].$$

Также оценивается третье слагаемое в формуле (33). Новой является только оценка вида

$$\mathbf{M}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}[b_0^s(t,\xi_k^\mu)-b^s(t,\xi_k^\mu,\mu)]\,d\alpha_s\right|^2\leqslant \mathbf{M}(1+|\xi_k^\mu|^2).$$

Таким образом,

$$\delta_{k+1}\leqslant[1+C(\Delta t_k+\psi(\mu))]\,\delta_k+C[\Delta t_k^{\frac{3}{2}}+\psi(\mu)].$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\delta_0=0$, получим

$$\delta_n\leqslant e^{C(T+n\psi(\mu))}C[T\max_k\Delta t_k+n\psi(\mu)].$$

Выбрав теперь $\max\limits_k \Delta t_k\leqslant\left(\dfrac{\varepsilon}{2TCe^{C(T+1)}}\right)^2$ и μ настолько малым, чтобы $\psi(\mu)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2nCe^{C(T+1)}}$ и $\psi(\mu)<\dfrac{1}{n}$, получим $\delta_n<\varepsilon$, откуда без затруднений получаем условие (31), что и требовалось доказать.

Доказательство предыдущих и некоторых последующих утверждений может быть проведено по аналогичной схеме.

Рассмотрим теперь дифференциальное стохастическое уравнение, в котором от параметра μ зависит случайный процесс $\alpha_s(t)=\alpha_s^\mu(t)$, так что вместо уравнения (27) имеем уравнение

$$d\xi^\mu=a(t,\xi^\mu)\,dt+\sum_{s=1}^n b^s(t,\xi^\mu)\,d\alpha_s^\mu.$$

Как известно [16], из слабой сходимости процесса $\alpha_s^\mu(t)$ к процессу $\alpha_s^0(t)$ вытекает слабая сходимость процесса $\xi^\mu(t)$ к $\xi^0(t)$. Объединяя последний результат с предыдущей теоремой, приходим к теореме И. И. Гихмана об усреднении для дифференциальных стохастических уравнений.

Теорема [16]. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$d\xi^\mu=a(t,\xi^\mu,\mu)\,dt+\sum_{s=1}^n b^s(t,\xi^\mu,\mu)\,d\alpha_s^\mu \tag{35}$$

удовлетворяют условиям (28) — (30) *с постоянными, не зависящими от* μ, *при* $\mu\to 0$ *процесс* $\alpha_s^\mu(t)$ *слабо сходится к* $\alpha_s^0\,(s=1,\ldots,n)$. *Тогда процесс* $\xi^\mu(t)$ *слабо сходится к процессу* $\xi^0(t)$.

Аналогичная теорема об усреднении справедлива и для уравнений запаздывающего и нейтрального типов.

Исходя из изложенного, очевидно, что принцип усреднения может быть легко распространен на стохастические системы в стандартной форме вида

$$dx=\varepsilon X(t,x)\,dt+\sqrt{\varepsilon}\,\sigma X^*(t,x)\,d\xi(t), \tag{36}$$

где X, X^* — функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения, $\xi(t)$ — n-мерный винеровский процесс. Замена неизвестной функции [10] позволяет преобразовать систему (36) в систему, в которой все $X^*(t,x)=1$.

Как известно, принцип усреднения имеет место не только для конечномерного евклидового пространства, но и в случае гильбертового и банахового пространств.

Остановимся на вопросе о применении метода усреднения для исследования уравнений в гильбертовом пространстве.

Пусть в гильбертовом пространстве H задано поле векторной случайной функции $X(t, x)$, для которой в области $D \subset H$ выполняются условия а) и б) (стр. 327) с вероятностью 1 и, кроме того, существует $X_0(x)$ такая, что равномерно по x в области D

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{M} \left| \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt - X_0(x) \right| = 0. \tag{37}$$

Тогда, если $\overline{x} = \overline{x}(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\overline{x}), \tag{38}$$

определенное для всех значений $0 \leqslant t < \infty$ и принадлежащее вместе со своей ρ-окрестностью области D, а $x = x(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{39}$$

совпадающее в начальный момент времени $x(0) = \overline{x}(0) = x_0$, то для любых сколь угодно малых $\eta > 0$, $\varrho > 0$ и сколь угодно большого L можно указать такое ε_0, что для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}$ решение уравнения (39) сходится в среднем к решению уравнения (38), т. е.

$$\mathbf{M}\,|x(t) - \overline{x}(t)| < \eta. \tag{40}$$

Если $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T X dt \to X_0 (T \to \infty)$ по вероятности, тогда решение уравнения (39) сходится по вероятности к решению уравнения (38).

При некоторых других предположениях эта сходимость может быть среднеквадратической.

Р. З. Хасьминским [23, 24] рассмотрено поведение при $\varepsilon \to 0$ на отрезке времени порядка $O\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ траектории случайного процесса, определяемого дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x, t, \omega) \tag{41}$$

и начальным условием $x(0) = x_0$, $(\Omega = \{\omega\}, U, P)$ — вероятностное пространство.

Пусть $F(x, t, \omega)$ $(x \in E_n, t > 0, \omega \in \Omega)$ удовлетворяет условию

$$|F(x_2, t, \omega) - F(x_2, t, \omega)| < L\,|x_2 - x_1|$$

и при каждом фиксированном x $F(x_1, t, \omega)$ — измеримый случайный процесс.

При этих условиях уравнение (41) имеет единственное решение, являющееся непрерывным с вероятностью 1 случайным процессом.

В уравнении (41) сделаем замену $\tau = \varepsilon t$

$$\frac{dx}{d\tau} = F\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}, \omega\right), \quad x_\varepsilon(0) = x_0 \tag{42}$$

и рассмотрим поведение решения этого уравнения на отрезке времени $[0, \tau_0]$, τ_0 — любое положительное число.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема [23, 24]. *Пусть задача* (42) *имеет единственное решение, а для процессов* $F(x, t, \omega)$ *выполнен закон больших чисел в форме*

$$\sup_{t_0 > 0} \mathbf{M} \left| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(x, t, \omega)\, dt - \overline{F}(x) \right| \to 0 \quad (T \to \infty). \tag{43}$$

Тогда решение $x_\varepsilon(\tau, \omega)$ *задачи* (42) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *в среднем к решению* $x^0(\tau)$ *задачи*

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \overline{F}(x^0) \qquad x^0(0) = x_0 \tag{44}$$

равномерно для $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, *т. е. при* $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0} \mathbf{M} \,|\, x_\varepsilon(\tau, \omega) - x^0(\tau) \,| \to 0. \tag{45}$$

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства принципа усреднения в детерминированном случае и поэтому на нем останавливаться не будем.

Приведем некоторые результаты, полученные И. Вркочем [17]. Пусть выполняются следующие предположения:

1) вектор $a(t, x)$ и квадратная матрица $B(t, x)$ непрерывны по t, x и удовлетворяют условию Липшица по x;

2) $|a(t, 0)| \leqslant K$, $|B(t, 0)| \leqslant K$, где $|B| = \sqrt{\Sigma b_{ij}^2}$ и b_{ij} — составляющие матрицы B;

3) задано семейство процессов $w_\varepsilon(t)$ с независимыми приращениями, для которых

$$\mathbf{M}(w_\varepsilon(t_2) - w_\varepsilon(t_1)| = 0, \quad \mathbf{M}\,|\, w_\varepsilon(t_2) - w_\varepsilon(t_1)\,|^2 = F_\varepsilon(t_2) - F_\varepsilon(t_1)$$

и функции $F_\varepsilon(t)$ непрерывны;

4) существует функция $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon) > 0$ для $\varepsilon > 0$, так что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\overline{w}_\varepsilon(t_2) - \overline{w}_\varepsilon(t_1)) = w_0(t_2) - w_0(t_1)$ равномерно на каждом компактном множестве значений t_1 и t_2, где $\overline{w}_\varepsilon(t) = \sqrt{\varphi(\varepsilon)}\, w\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)$;

5) $w_\varepsilon^*(t) = \overline{w}_\varepsilon(t) - w_0(t)$ — процессы с независимыми приращениями;

6) существует монотонно неубывающее семейство σ-алгебр $F(t)$;

7) существует вектор $\overline{a}(x)$ такой, что $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T a(t, x)\, dt = \overline{a}(x)$ равномерно по x;

8) существует матрица $\overline{B}(x)$ такая, что $\lim\limits_{T \to \infty} \displaystyle\int_{\alpha T}^{\alpha T + \beta T} |B(t, x) - \overline{B}(x)|^2 \, dF\left(\frac{t}{T}\right) = 0$ равномерно по x при всех α, β, $0 \leqslant \alpha \leqslant L$, $0 \leqslant \beta \leqslant L$, где L — заданное положительное число;

9) случайная величина $x_0(\omega)$ независима от всех приращений $w_\varepsilon(t_2) -$

$$- w_\varepsilon(t_1) \text{ и } \mathbf{M}\,|\, x_0(\omega)\,|^2 < \infty.$$

При этих предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема [17]. *Пусть выполнены условия* 1) —9) *и пусть* $x(t)$, $y(t)$ — *решения уравнений*

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau + \sqrt{\varphi(\varepsilon)} \int_0^t B(\tau, x(\tau))\, dw_\varepsilon(\tau), \tag{46}$$

$$y(t) = x_0 + \int_0^t \overline{a}(y(\tau))\, d\tau + \int_0^t \overline{B}(y(\tau))\, dw_0(\tau). \tag{47}$$

Тогда для заданных $\eta > 0$, $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое что* $\mathbf{M}\left(\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}} |x(t) - y(t)|^2\right) < \eta$ *для* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Заметим, что в случае, когда $w_0(t)$ — винеровский процесс, условие 7) перейдет в условие $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T |B(t, x) - \overline{B}(x)|^2\, dt = 0$ равномерно по x.

В дальнейшем в работах И. И. Гихмана [10, 16] и И. Вркоча [17] принцип усреднения был обоснован непосредственно для стохастических уравнений более общего вида и изучались условия, при которых решение сходится к пределу в среднем квадратическом.

Пусть $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$ — семейство марковских случайных процессов в n-мерном евклидовом пространстве E_n, описываемое системой стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{gathered} dX_i^{(\varepsilon)}(t) = A_i(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\, dt + \sum_{r=1}^{n} \sigma_i^{(r)}(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\, d\xi_r(t), \\ dY_j^{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{\varepsilon} B_j(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\, dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{r=1}^{n} \varphi_j^{(r)}(X^{(\varepsilon)}, Y^{(\varepsilon)})\, d\xi_r(t) \end{gathered} \tag{48}$$

$$(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, m;\ k + m = n)$$

и начальным условием

$$X^{(\varepsilon)}(0) = x_0, \qquad Y^{(\varepsilon)}(0) = y_0, \tag{49}$$

где $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ — независимые винеровские процессы ($\mathbf{M}\xi_r(t) = 0$, $\mathbf{M}\xi_r^2(t) = t$).

Процесс $X^{(\varepsilon)}(t)$ называется «медленной», а процесс $Y^{(\varepsilon)}(t)$ — «быстрой» компонентой рассматриваемого движения.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) векторы A, $\sigma^{(r)}$, B, $\varphi^{(r)}$ удовлетворяют условию Липшица по x, y и справедливо неравенство

$$|A(x, y)|^2 + \sum_{r=1}^{n} |\sigma^{(r)}(x, y)|^2 < C(1 + |x|^2);$$

2) для процесса $Y^{(x,y)}(t)$, описываемого стохастическим уравнением Ито

$$dY^{(x,y)}(t) = B(x, Y^{(x,y)})\, dt + \sum_{r=1}^{n} \varphi^{(r)}(x, Y^{(x,y)})\, d\xi_r(t)$$

и начальным условием

$$Y^{(x,y)}(0) = y,$$

существуют функции $\overline{A}(x)$ и $a_{ij}(x)$ такие, что для некоторой функции $\alpha(\tau)$, стремящейся к нулю при $\tau \to \infty$, выполнены неравенства

$$\left| \mathbf{M} \frac{1}{\tau} \int\limits_t^{t+\tau} A(x, Y^{(x,y)}(s))\, ds - \overline{A}(x) \right| < \alpha(\tau)(1 + |x|^2),$$

$$\left| \mathbf{M} \frac{1}{\tau} \int_{t}^{t+\tau} \sum_{r=1}^{n} \sigma_i^{(r)} \sigma_j^{(r)} (x, Y^{(x,y)}(s))\, ds - a_{ij}(x) \right| < \alpha(\tau)(1 + |x|^2).$$

При этих предположениях Р. З. Хасьминским доказана следующая теорема.

Теорема [25]. *Пусть для процесса* $(X^{(\varepsilon)}(t), Y^{(\varepsilon)}(t))$, *определяемого системой* (48) *и условием* (49), *выполнены условия* 1) *и* 2). *Тогда процесс* $X^{(\varepsilon)}(t)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *слабо сходится на отрезке* $[0, T]$ *к марковскому случайному процессу* $X^{(0)}(t)$, *являющемуся решением задачи*

$$dX^{(0)}(t) = \overline{A}(X^{(0)})\, dt + \sum_{r=1}^{n} \overline{\sigma}^{(r)}(X^{(0)})\, d\xi_r(t),$$

$$X^{(0)}(0) = x_0, \tag{50}$$

где $\overline{\sigma}(x)$ — *квадратный корень из симметричной матрицы* $(a_{ij}(x))$.

В этой теореме наложено менее ограничительное условие 2), чем соответствующее условие в теоремах И. И. Гихмана [16] и И. Вркоча [17].

В последнее время возрос интерес к задачам исследования случайных процессов в стохастических системах, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом и случайными параметрами и функциями.

В. Г. Коломийцем [26] проведено обобщение теоремы Р. З. Хасьминского [23, 24] на дифференциально-разностные уравнения со случайными параметрами и функциями. Речь идет о поведении при $\varepsilon \to 0$ на отрезке времени $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ решения системы в стандартной форме вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X(t, x(t), x(t-\Delta), \omega), \tag{51}$$

где Δ — постоянная, характеризующая запаздывание, t — время $(0 \leqslant t < \infty)$, x, $y = x(t-\Delta)$, X — точки n-мерного евклидового пространства E_n, ω—элементарное событие некоторого вероятностного пространства Ω.

Справедлива следующая теорема.

Теорема [26]. *Пусть для системы уравнений* (51) *выполнены условия:*

1) *вектор-функции* $X(t, x, y, \omega)$ *ограничены в области* $t \in [0, \infty)$, x, $y \in D$ $(D \subset E_n)$, $\omega \in \Omega$, *т. е.*

$$|X(t, x, y, \omega)| \leqslant K; \tag{52}$$

2) *для всех вещественных значений* $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$ *и для любых точек* x', y'', x'', y'' *из области* D *функции* $X(t, x, y, \omega)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$|X(t, x', y', \omega) - X(t, x'', y'', \omega)| \leqslant \lambda \{|x' - x''| + |y' - y''|\}, \tag{53}$$

K, λ — *некоторые положительные постоянные;*

3) *при каждых фиксированны х* x, y $X(t, x, y, \omega)$ *является измеримым векторным случайным процессом;*

4) *для процессов* $X(t, x, y, \omega)$ *выполнен усиленный закон больших чисел в следующей форме:*

$$\lim_{T \to \infty} \mathbf{M} \left| \frac{1}{T} \int_{0}^{T} X(t, x, y, \omega)\, dt - X_0(x, y) \right| = 0 \tag{54}$$

при фиксированных $x,\ y \in D$, *т. е.* $\frac{1}{T}\int\limits_0^T X dt \to X_0\,(T\to\infty)$ *с вероятностью* 1.

Тогда, если $x(t, \omega, \varepsilon)$ — *решение системы* (51), *для которого* $x(0, \varepsilon) = x_0$, *а* $\xi(t, \varepsilon)$ — *решение усредненной системы*

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \varepsilon X_0(\xi(t), \xi(t)), \tag{55}$$

определенное в интервале $0 \leqslant t < \infty$, *для которого* $\xi(t, \varepsilon) = x_0$, *для всех* $t \in [-\Delta, 0]$ $x(t, \omega, \varepsilon) = \xi(\varepsilon t) = \xi(t, \varepsilon)$, *то для любых* $L > 0$ *и* $\eta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ *такое, что для всех* $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ *в интервале* $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,|x(t, \omega, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)| < \eta. \tag{56}$$

Короче говоря, решение $x(t, \omega, \varepsilon)$ системы (51) сходится при $\varepsilon \to 0$ в среднем к решению $\xi(t, \varepsilon)$ системы (55), т. е.

$$\mathbf{M}\,|x(t, \omega, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0). \tag{57}$$

Если случайный процесс X как функция t удовлетворяет усиленному закону больших чисел (54), то для X существует предел $X_0(x, y) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathbf{M}X(t, x, y, \omega)\,dt$, который не зависит от ω. Поэтому решение системы (51) в этом случае может быть с вероятностью 1 приближенно детерминированным решением системы (55).

Если для процессов X выполнен закон больших чисел и $X_0(x, y) = X_0(x, y, \omega)$, то принцип усреднения также справедлив, однако в этом случае решение $\xi(t, \varepsilon) = \xi(t, \omega, \varepsilon)$ является случайным.

Если $\frac{1}{T}\int\limits_0^T X dt \to X_0$ $(T \to \infty)$ по вероятности, тогда решение системы (51) сходится по вероятности к решению системы (55). Эти результаты обобщаются на случай уравнений нейтрального типа.

Р. З. Хасьминский [15] доказал непрерывную зависимость от параметра μ при $\mu = \mu_0$ решений уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu + d = 0, \tag{58}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(t, x, \mu)$, $b_j = b_j(t, x, \mu)$, $c = c(t, x, \mu)$, $d = d(t, x, \mu)$ интегрально непрерывные по параметру μ при $\mu = \mu_0$ и удовлетворяют всем необходимым условиям.

Из этой теоремы, как следствие, вытекает принцип усреднения для уравнений в частных производных параболического типа. Кроме того, из теоремы Р. З. Хасьминского можно получить принцип усреднения для систем обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений. Соответствующий результат можно сформулировать следующим образом. Пусть коэффициенты системы уравнений [25]

$$dX_\varepsilon(t) = A(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\,dt + \sum_{r=1}^{n} \sigma_r(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\,d\xi_r(t),$$
$$\frac{dY_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{59}$$

(X, A, σ_r — векторы n-мерного евклидового пространства E_n) удовлетворяют условию Липшица по x равномерно относительно y и равномерно относительно x, t существуют пределы средних

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} A(x, y)\,dy = \overline{A}(x),$$
$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r^{(i)}\sigma_r^{(j)}(x, y)\,dy = a_{ij}(x). \tag{60}$$

Тогда конечномерные распределения процесса $X_\varepsilon(t)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса $X_0(t)$, удовлетворяющего системе уравнений

$$dX_0(t) = \overline{A}(X_0)\,dt + \sum_{r=1}^{n} \overline{\sigma}_r(X_0)\,d\xi_r(t), \tag{61}$$

где матрица $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ представляет собой квадратный корень из симметричной матрицы $\| a_{ij} \|$.

Приведенные результаты обобщаются на стохастические системы с запаздыванием и уравнения нейтрального типа.

Как мы уже говорили вначале, для дифференциальных стохастических уравнений в стандартной форме принцип усреднения может быть применен в составленном для них уравнении КФП.

Системе уравнений (11) можно поставить в соответствие следующее уравнение КФП:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}[K_a W] + \frac{\partial}{\partial \theta}[K_\theta W] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_a W] + 2\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}[D_{a\theta} W] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}[D_\theta W]\right\}, \tag{62}$$

где $W = W(a, \theta, t\,|_{a_0, \theta_0, t_0})$ — плотность совместного распределения амплитуды и фазы, K_a, K_θ — коэффициенты переноса (сноса) амплитуды и фазы, D_a, D_θ — коэффициенты диффузии амплитуды и фазы соответственно, $D_{a\theta}$ — смешанный коэффициент диффузии амплитуды и фазы имеют вид

$$K_a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}\Delta a}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi,$$
$$K_\theta = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}\Delta \theta}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon}{a\omega} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi,$$
$$D_a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}\Delta a^2}{\Delta t} = \frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin^2\psi, \tag{63}$$
$$D_{a\theta} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}\Delta a\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\varepsilon\sigma^2}{a\omega^2} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\cos\psi,$$
$$D_\theta = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}\Delta \theta^2}{\Delta t} = \frac{\varepsilon\sigma^2}{a^2\omega^2} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos^2\psi.$$

Уравнение (62) является параболическим дифференциальным уравнением. По терминологии Н. Н. Боголюбова [1] назовем его также уравнением в стандартной форме.

Для дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon L(x, t, \varepsilon)\, u, \tag{64}$$

где L — дифференциальный оператор второго порядка параболического типа, исходя из теоремы о непрерывной зависимости решения уравнения в частных производных параболического типа от параметра (здесь $\mu = \varepsilon$, $\mu_0 = 0$), Р. З. Хасьминским [15] установлен принцип усреднения, согласно которому решение задачи Коши для этого уравнения при $\varepsilon \to 0$ можно приблизить равномерно на отрезке времени $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon L_0(x, \varepsilon)\, v, \tag{65}$$

где L_0 — дифференциальный оператор параболического типа, коэффициенты которого являются средними значениями коэффициентов оператора L по явно содержащемуся времени.

Для уравнений (11) уравнение (65) имеет вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \varepsilon\left\{-\frac{\partial}{\partial a}[\overline{K}_a(a) W_1] - \frac{\partial}{\partial\theta}[\overline{K}_\theta(a) W_1]\right\} + \tag{66}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\overline{D}_a(a) W_1] + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}[\overline{D}_{a\theta}(a) W_1] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[\overline{D}_\theta(a) W_1]\right\},$$

где

$$\overline{K}_a(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$\overline{K}_\theta(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_1(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi,$$

$$\overline{D}_a(a) = \frac{\sigma^2}{2\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin^2\psi d\psi,$$

$$\overline{D}_{a\theta}(a) = \frac{\sigma^2}{2\pi a\omega^2}\int_0^{2\pi} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\cos\psi d\psi,$$

$$\overline{D}_\theta(a) = \frac{\sigma^2}{2\pi a^2\omega^2}\int_0^{2\pi} f_2^2(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos^2\psi d\psi.$$

Для анализа колебательных систем со случайными воздействиями важную роль играет стационарная плотность распределения амплитуды. Стационарные точки этой плотности (если они существуют) соответствуют устойчивым и неустойчивым состояниям исходной системы в зависимости от того, достигается в этой точке соответственно максимум или минимум.

Для неавтономной колебательной системы (17) в нерезонансном случае усредненное уравнение КФП имеет вид (66) с коэффициентами переноса и диффузии

$$\overline{K}_a(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\varphi d\psi,$$

$$\overline{K}_\theta(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\varphi d\psi,$$

$$\overline{D}_a(a) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2\omega^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin^2\psi d\varphi d\psi,$$

$$\overline{D}_{a\theta}(a) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 a\omega^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\cos\psi\, d\varphi d\psi,$$

$$\overline{D}_\theta(a) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2\omega^2 a^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos^2\psi d\varphi d\psi.$$

Анализ уравнения КФП в нерезонансном случае такой же, как и для случая автономной колебательной системы.

В резонансном случае усредненные коэффициенты переноса и диффузии зависят не только от амплитуды a, но и от фазы θ. Их следует находить по формулам из уравнений (20)

$$\overline{K}_a(a, \theta) = -\underset{t}{\mathbf{M}}\frac{s}{r\nu} f\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),$$

$$\overline{K}_\theta(a, \theta) = -\underset{t}{\mathbf{M}}\frac{s}{r\nu a} f\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right) + \frac{\Delta s}{2r\nu},$$

$$\overline{D}_a(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\frac{s^2\sigma^2}{\nu^2 r^2} g^2\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times$$
$$\times\sin^2\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),$$

$$\overline{D}_{a\theta}(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\frac{s^2\sigma^2}{r^2\nu^2 a} g^2\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),$$

$$\overline{D}_\theta(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\frac{s^2\sigma^2}{r^2\nu^2 a^2} g^2\left(\nu t, a\cos\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right), -a\frac{r}{s}\nu\sin\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right)\right)\times$$
$$\times\cos^2\left(\frac{r}{s}\nu t + \theta\right),$$

$\underset{t}{\mathbf{M}}$ — оператор усреднения по явно содержащемуся времени (15). Анализ уравнения КФП в этом случае затруднителен. Для его решения может быть использован численный анализ.

В связи с рядом актуальных задач физики и техники приходится сталкиваться с весьма важной проблемой нестационарных явлений, возникающих при изменении масс, частот и ряда других параметров нелинейной колебательной системы случайным образом.

Рассмотрим стохастическую колебательную систему, описываемую системой нелинейных дифференциальных стохастических уравнений вида [27]

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left[m(y)\frac{dx}{dt}\right]+c(y)x=\varepsilon F\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)+\sqrt{\varepsilon}\sigma g\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)\dot{\xi}(t),\\ \frac{dy}{dt}=\varepsilon f\left(y,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right),\end{gathered}\tag{67}$$

где $\frac{d\theta}{dt}=\nu(y)>0$, $m(y)$, $c(y)$—положительные при любых y, определяющихся из системы (67) с вероятностью 1, F, g, f — нелинейные, периодические по θ с периодом 2π, функции, $\dot{\xi}(t)$ — процесс «белого шума».

Введем вместо x и $\frac{dx}{dt}$ в системе уравнений (67) новые переменные a и ψ по формулам

$$\begin{gathered}x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),\\ \frac{dx}{dt}=-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right).\end{gathered}\tag{68}$$

В результате получим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений в переменных a, ψ, y:

$$\begin{gathered}\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{m(y)\omega(y)}f\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\times\\ \times\sin^2\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)-\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}F\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\times\\ \times\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{m(y)\omega(y)}g\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\times\\ \times\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\dot{\xi}(t),\\ \frac{d\psi}{dt}=\omega(y)-\frac{p}{q}\nu(y)-\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)}\frac{d[m(y)\omega(y)]}{dy}\times\\ \times f\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)-\\ -\frac{\varepsilon}{m(y)\omega(y)a}F\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\times\\ \times\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{m(y)\omega(y)a}g\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right]\times\\ \times\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\dot{\xi}(t),\\ \frac{dy}{dt}=\varepsilon f\left[y,\theta,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right),-a\omega(y)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)\right].\end{gathered}\tag{69}$$

В резонансной зоне $\omega(y) - \frac{p}{q}\nu(y) = \varepsilon\Delta(y)$ система (69) является системой уравнений в стандартной форме. Решением этой системы, как известно, будет трехмерный марковский диффузионный процесс $\{a(t), \psi(t), y(t)\}$, исследование которого можно провести при помощи уравнений КФП аналогично изложенному выше. Аналогичные результаты справедливы и в случае стохастических уравнений более высоких порядков, рассматривая при этом одночастотный режим колебаний, а также в случае нелинейных систем с медленно изменяющимися случайными параметрами [28].

Рассмотрим задачу о параметрическом случайном возбуждении линейной колебательной системы. Исследование влияния параметрических флюктуаций играет важную роль в связи с тем, что это влияние может привести систему, находящуюся в покое, к неустойчивому состоянию или, наоборот, к срыву имеющихся в системе колебаний. Итак, рассмотрим линейную колебательную систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\left[1 + \sqrt{\varepsilon}\sigma_1\dot{\xi}(t)\right]\frac{dx}{dt} + \omega^2\left[1 + \sqrt{\varepsilon}\sigma_2\dot{\xi}(t)\right]x = 0, \tag{70}$$

где σ_1, σ_2, δ, ω — постоянные коэффициенты, $\delta > 0$ и $\delta < \omega$.

Введем в уравнение (70) новые переменные a и θ согласно формулам (10). Тогда получим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} da = -2\delta a\sin^2\psi dt + \sqrt{\varepsilon}a\left[\frac{\omega\sigma_2}{2}\sin 2\psi - 2\delta\sigma_1\sin^2\psi\right]d\xi(t), \\ d\theta = -\delta\sin 2\psi\, dt + \sqrt{\varepsilon}\left[\omega\sigma_2\cos^2\psi - \delta\sigma_1\sin 2\psi\right]d\xi(t). \end{gathered} \tag{71}$$

Второе уравнение этой системы не зависит от амплитуды. Поэтому решением его будет одномерный процесс Маркова.

Усредняя уравнения (71), получим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} d\bar{a} = -\delta\bar{a}dt + \sqrt{\varepsilon}\bar{a}\sqrt{\frac{\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{3\sigma_1^2\delta^2}{2}}\, d\xi(t), \\ d\bar{\theta} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{3\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{\delta^2\sigma_1^2}{2}}\, d\xi(t). \end{gathered} \tag{72}$$

Первое уравнение системы (72) с помощью формулы замены переменных Ито $u = \ln\bar{a}$ преобразуется к виду *

$$du = \left[-\delta - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{3\sigma_1^2\delta^2}{2}\right)\right]dt + \sqrt{\varepsilon\left(\frac{\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{3\sigma_1^2\delta^2}{2}\right)}\, d\xi(t). \tag{73}$$

Согласно этому уравнению для изменяющейся во времени плотности распределения логарифма амплитуды $W_1(u, t)$ уравнение КФП имеет вид

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + K\frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{D_u}{2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial u^2}, \tag{74}$$

где

$$K = -\delta - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{3\sigma_1^2\delta^2}{2}\right), \quad D_u = \varepsilon\left(\frac{\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{3\sigma_1^2\delta^2}{2}\right).$$

* Формула Ито заключается в следующем: если имеем стохастическое уравнение $da = \varphi dt + \psi d\xi$ и положим $u = f(a)$, то

$$du = \left(f'(a)\varphi + \frac{1}{2}f''(a)\psi^2\right)dt + f'(a)\psi d\xi.$$

Решением уравнения (74) при начальном условии $W_1(u, 0) = \delta(u)$ будет

$$W_1(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_u t}} \exp\left\{-\frac{(u - Kt)^2}{2D_u t}\right\}. \tag{75}$$

Стационарные амплитуды в системе (70) отсутствуют.

Согласно второму уравнению системы (72) дифференциальное уравнение для плотности распределения фазы имеет вид

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = \frac{D_\theta}{2}\frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta^2}, \tag{76}$$

где

$$D_\theta = \varepsilon\left(\frac{3\omega^2\sigma_2^2}{8} + \frac{\delta^2\sigma_1^2}{2}\right).$$

Решением этого уравнения при начальном условии $W_2(\theta, 0) = \delta(\theta)$ будет

$$W_2(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta t}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2D_\theta t}\right\}. \tag{77}$$

Таким образом, в случае параметрического случайного воздействия имеет место диффузионное расплывание фазы.

Рассмотрим воздействие малых случайных сил типа «белого шума» и малых периодических сил на простейшую нелинейную систему, описываемую известным уравнением Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon[1 - (x + E\sin\nu t)^2]\frac{dx}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\sigma x\dot{\xi}(t). \tag{78}$$

В нерезонансном случае [22] усредненное стационарное уравнение КФП для стационарной плотности распределения амплитуды принимает вид

$$-\frac{d}{da}\left[\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{E^2}{2}\right)W_{\text{ст}}(a)\right] + \frac{\sigma^2}{16}\frac{d^2}{da^2}[a^2 W_{\text{ст}}(a)] = 0. \tag{79}$$

Принимая во внимание граничные условия $W_{\text{ст}}(a) \to 0$, $\frac{dW(a)}{da} \to 0$ при $a \to \infty$, уравнение (79) легко интегрируется

$$W_{\text{ст}}(a) = Ca^{\frac{8 - 4E^2 - 2\sigma^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{a^2}{\sigma^2}}, \tag{80}$$

где постоянная C находится из условия нормирования $\int\limits_0^\infty W_{\text{ст}}(a)\,da = 1$.

Из анализа формулы (80) очевидно, что она имеет единственный максимум при

$$a = \sqrt{4 - 2E^2 - \sigma^2}. \tag{81}$$

При $\sigma \to 0$ амплитуда случайных колебаний совпадает с амплитудой детерминированных колебаний системы, в которой отсутствует случайное возмущение.

В случае $\sigma^2 = 4 - 2E^2$ колебания в системе отсутствуют. Если $\sigma^2 < 4 - 2E^2$, стационарные случайные колебания устойчивы и совершаются с амплитудой (81). В противоположном случае $\sigma^2 > 4 - 2E^2$ и никакой устойчивый режим колебаний невозможен.

Многие важные задачи о колебаниях упругих тел приводят нас к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных со случайными параметрами и функциями.

В самом общем случае движение таких систем описывается стохастическим уравнением

$$L^{2n}(u) = \varepsilon f\left(t, x, u, \frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \varepsilon\right) + \sqrt{\varepsilon}\sigma g\left(t, x, u, \frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \varepsilon\right)\dot{\xi}(t), \tag{82}$$

где $L^{2n}(u)$ — линейный однородный дифференциальный оператор с частными производными относительно u, $f\left(t, x, u, \frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \varepsilon\right)$, $g\left(t, x, u, \frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \varepsilon\right)$ — нелинейные функции, обладающие необходимыми свойствами гладкости, $2n \geqslant k = \alpha + \beta$.

Остановимся ради простоты на изучении одночастотных случайных колебаний упругих систем при случайном возбуждении, описываемых нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, близкими к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных гиперболического типа, следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \mu g\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \dot{\xi}(t), \tag{83}$$

где ε, μ — малые положительные параметры ($\mu \sim \sqrt{\varepsilon}$, $0 \leqslant x \leqslant l$), b — постоянная, $f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ и $g\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ — некоторые нелинейные целые рациональные функции относительно u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющие всем необходимым условиям.

Для уравнения (83) С. А. Василишиным и В. Г. Коломийцем [29] решена краевая задача с линейными краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = 0 \ \text{ при } \ x = l. \end{aligned} \tag{84}$$

При помощи асимптотических методов нелинейной механики и метода уравнений КФП исследуется решение этой краевой задачи в случае, когда в детерминированной системе ($\mu = 0$) устанавливается одночастотный колебательный режим. Как известно [30], принцип одночастотности колебаний с успехом используется при исследовании нелинейных систем.

Кратко остановимся на сущности предлагаемого подхода исследования.

В первом приближении решение задачи (83), (84), соответствующее k-му одночастотному режиму, ищем в виде

$$u(x, t) = a X_k(x) \cos(\omega_k t + \theta), \tag{85}$$

где $X_k(x)$, ω_k — k-я фундаментальная функция и k-я собственная частота колебаний невозмущенной краевой задачи ($\varepsilon = \mu = 0$), a и θ — искомые случайные функции времени определяются из системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon f_1(t, a) + \mu f_2(t, a) \dot{\xi}(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon f_3(t, a) + \mu f_4(t, a) \dot{\xi}(t), \end{aligned} \tag{86}$$

где

$$f_1 = -\frac{\int_0^l f_k X_k \sin\psi\, dx}{\omega_k \int_0^l X_k^2(x)\, dx}, \quad f_2 = -\frac{\int_0^l g_k X_k \sin\psi\, dx}{\omega_k \int_0^l X_k^2(x)\, dx},$$

$$f_3 = -\frac{\int\limits_0^l f_k X_k \cos\psi dx}{a\omega_k \int\limits_0^l X_k^2(x)\,dx}, \quad f_4 = -\frac{\int\limits_0^l g_k X_k \cos\psi dx}{a\omega_k \int\limits_0^l X_k^2(x)\,dx},$$

$$f_k = f\left(x,\, aX_k\cos\psi,\, -a\omega_k X_k \sin\psi,\, a\frac{dX_k}{dx}\cos\psi,\; a\frac{d^2X_k}{dx^2}\cos\psi\right),$$

$$g_k = g\left(x,\, aX_k\cos\psi,\, -a\omega_k X_k \sin\psi,\, a\frac{dX_k}{dx}\cos\psi,\; a\frac{d^2X_k}{dx^2}\cos\psi\right).$$

Уравнения (86) по виду такие же, как и уравнения (11). Эффективным методом их исследования является аналитический метод уравнений КФП для плотности вероятности совместного распределения амплитуды и фазы и принцип усреднения Н. Н. Боголюбова.

Метод усреднения позволяет и в данном случае решение соответствующего уравнения КФП при $\varepsilon \to 0$ равномерно приблизить на достаточно большом конечном интервале времени решением усредненного уравнения по виду такому же, только в качестве коэффициентов переноса и диффузии следует взять их средние по времени значения.

Аналогично можно провести исследование одночастотных случайных колебаний в неавтономных системах, когда $f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ и $g\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ являются периодическими функциями времени. При этом, как и обычно, различают нерезонансный и резонансный случаи. Нерезонансный случай ничем не отличается от рассмотренного выше, если функции $f\left(t, x, u, \frac{du}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ и $g\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ предварительно усреднить по явно содержащемуся в них времени.

В резонансном случае коэффициенты переноса и диффузии зависят от фазы θ, что, как указывалось, существенно затрудняет решение уравнений КФП.

В. Г. Коломийцем и Л. М. Порхун [31] исследовано поведение упругой системы при случайном возбуждении, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка. Найденное выражение стационарной плотности вероятности амплитуды используется для определения наиболее вероятных стационарных амплитуд колебаний исходной системы. С помощью изложенного выше алгоритма А. В. Вознюком и В. Г. Коломийцем [32] исследованы одночастотные колебания стержней переменного сечения при случайных квазилинейных граничных условиях.

Этот подход использован также С. А. Василишиным и В. Г. Коломийцем [33] для изучения влияния случайных сил на одночастотный режим колебаний нелинейной системы, описываемой стохастическим дифференциально-разностным уравнением в частных производных второго порядка.

В частности, проведено исследование одночастотных колебаний нелинейной системы с распределенными параметрами и постоянными запаздываниями при случайных воздействиях типа «белого шума». Эти исследования обобщаются на случай дифференциально-разностных уравнений в частных производных с переменными случайными запаздываниями, а также на краевые задачи с квазилинейными граничными условиями и уравнения нейтрального типа.

В самых разнообразных областях современной науки и техники встречаются системы, содержащие звенья с запаздыванием по времени. За последнее десятилетие диапазон задач с учетом запаздывания стал весьма широким. Преимущественно, однако, он включает в себя лишь задачи с детерминированными запаздываниями. Между тем запаздывание в реальных системах зачастую носит случайный характер. В этой связи В. Г. Коломийцем и Д. Г. Кореневским [34] изучены колебания квазилинейных систем со случайным запаздыванием. В самом общем случае движение таких систем описывается с помощью системы дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\Delta) + \varepsilon F(x(t), x(t-\Delta), \varepsilon), \tag{87}$$

где $\Delta = \Delta(t)$ — запаздывание, представляющее собой случайную функцию времени, x — вектор координат, характеризующий траекторию системы в евклидовом пространстве E_n, A и B — квадратные n-мерные матрицы с постоянными или переменными коэффициентами, F — n-мерная вектор-функция, в которую также может входить явно время t. Предполагается, что с вероятностью 1 $x(t-\Delta(t)) = 0$ при $t - \Delta(t) < 0$. Рассмотрен случай малых флюктуаций запаздывания, т. е.

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \varepsilon\sigma\xi(t, \mu), \tag{88}$$

где $\Delta_0 = \mathbf{M}\Delta(t) > 0$, $\sigma > 0$, $\xi(t, \mu)$ — стационарный случайный процесс, превращающийся при $\mu \to 0$ в «белый шум» $\dot{\xi}(t)$. Для исследования решения системы (87), как и обычно, следует ее свести к стандартному виду, а затем применить аналитический метод уравнений КФП.

При определенных условиях решение системы (87) в первом приближении ищем в виде

$$x(t) = a(t)\cos\psi(t), \tag{89}$$

где величины $a(t)$ и $\psi(t)$ как функции времени определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a, a, \xi(t, \mu)), \tag{90}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B(a, a, \xi(t, \mu)) \quad (\psi = \omega t + \theta(t)).$$

Для системы (87) исследованы одночастотные и многочастотные случайные колебания. Аналогичное исследование проведено и для систем с несколькими статистически независимыми случайными запаздываниями, а также в случае, когда A и B зависят от «медленного времени» $\tau = \varepsilon t$ и, кроме того, F является периодической функцией времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
2. А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Броуновское движение, Сб. статей (перев. с нем.), 1936.
3. А. Н. Колмогоров, Аналитические методы в теории вероятностей, УМН, вып. 5, 1933.
4. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, О статистическом рассмотрении динамических систем, Собр. тр. А. А. Андронова, Изд-во АН СССР, М., 1956.
5. І. І. Гіхман, Про влив випадкового процесу на динамічну систему, Наукові записки мех.-мат. ф-ту КДУ, т. V, 1941.
6. И. И. Гихман, О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями, УМЖ, т. 2, № 3, 1950.
7. К. Ито, О стохастических дифференциальных уравнениях, Математика (сб. переводов), 1 : 1, 1957.

8. И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, УМЖ, т. 2, № 4, 1950.
9. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд-во КГУ, К., 1961.
10. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, «Наукова думка», К., 1968.
11. И. Л. Берштейн, Флюктуации амплитуды и фазы лампового генератора, Изв. АН СССР, сер. физ., т. 14, № 2, 1950.
12. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», М., 1966.
13. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, «Советское радио», М., 1961.
14. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, «Советское радио», М., 1966.
15. Р. З. Хасьминский, О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией, ТВИП, т. 8, № 1, 1963.
16. И. И. Гихман, Дифференциальные уравнения со случайными функциями (Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике, Ужгород, 1964), Изд. Института математики АН УССР, К., 1964.
17. I. Vrkoč, Extension of the averaging method to stochastik equations, Czech. Math. J., m. 16 (91), № 4, 1966.
18. Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец, Применение принципа усреднения к исследованию влияния случайных воздействий на колебательные системы, Математическая физика, вып. 3, «Наукова думка», К., 1967.
19. В. Г. Коломиец, Случайные колебания квазилинейных систем, Abhandl. Deutsch. Akad. Wissensch. Berlin, Kl. Math., Phys., Tech., № 1, 1965.
20. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1963.
21. В. Г. Коломиец, Воздействие случайных сил на нелинейные колебательные системы, Автореф. канд. дисс., К., 1963.
22. В. Г. Коломиец, Случайные колебания неавтономных квазилинейных стохастических систем, УМЖ, т. 20, № 3, 1968.
23. Р. З. Хасьминский, О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром, ТВИП, вып. 2, 1966.
24. Р. З. Хасьминский, Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью, ТВИП, вып. 3, 1966.
25. Р. З. Хасьминский, О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито, Kybernetika, т. 3, № 4, 1968.
26. В. Г. Коломиец, О принципе усреднения для стохастических систем с последействием. Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, Изд. Института математики АН УССР, 1970.
27. В. И. Керзюк, В. Г. Коломиец, Исследование колебаний нелинейных систем с медленно изменяющимися параметрами и случайными функциями, Математическая физика, вып. 8, «Наукова думка», К., 1970.
28. В. И. Керзюк, В. Г. Коломиец, Об исследовании некоторых колебательных систем с медленно меняющимися случайными параметрами, Тр. семинара по математической физике и теории нелинейных колебаний, вып. 3, Изд. Института математики АН УССР, 1969.
29. С. А. Василишин, В. Г. Коломиец, Исследование колебаний нелинейных систем с распределенными параметрами при случайных возмущениях, УМЖ, т. 19, № 3, 1967.
30. Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Изд. Института математики АН УССР, 1968.
31. В. Г. Коломиец, Л. М. Порхун, Случайные колебания упругих нелинейных систем с распределенными параметрами, Математическая физика, вып. 5, «Наукова думка», К., 1968.
32. А. В. Вознюк, В. Г. Коломиец, Применение асимптотических методов нелинейной механики для исследования одночастотных колебаний стержней переменного сечения при случайных возмущениях, Математическая физика, вып. 6, «Наукова думка», К., 1969.
33. С. А. Василишин, В. Г. Коломиец, Исследование одночастотных колебаний нелинейных систем с распределенными параметрами и запаздываниями при случайных воздействиях, Математическая физика, вып 6, «Наукова думка», К., 1969.
34. В. Г. Коломиец, Д. Г. Кореневский, Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием, Математическая физика, вып. 3, «Наукова думка», К., 1967.

Поступила 10. I 1971 г.
Институт математики АН УССР