УДК 517.512.2

Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье

Ю. А. Пономаренко, М. Ф. Тиман

Пусть $L_p^{(k)}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ означает пространство всех измеримых, периода 2π по каждой из переменных функций $f(x_1, \ldots, x_k)$, удовлетворяющих условию:

$$\| f(x_1, \ldots, x_k) \|_{L_p^{(k)}} = \left\{ \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} | f(x_1, \ldots, x_k) |^p \, dx_1 \ldots dx_k \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

и

$$\| f(x_1, \ldots, x_k) \|_{L_\infty^{(k)}} = \operatorname*{vraisup}_{x_i (i=1,2,\ldots,k)} | f(x_1, \ldots, x_k) | < \infty.$$

Пусть для функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ ряд

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=0}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k}(x_1, \ldots, x_k) \tag{1}$$

будет ее рядом Фурье по тригонометрической системе, т. е.

$$A_{n_1,\ldots,n_k}(x_1, \ldots, x_k) = \mu_{n_1,\ldots,n_k} \sum_{i_1=1}^{2} \ldots \sum_{i_k=1}^{2} a_{n_1,\ldots,n_k}^{(i_1,\ldots,i_k)} \prod_{\nu=1}^{k} \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu),$$

где $\mu_{n_1,\ldots,n_k} = 2^{-m}$ (m — количество индексов n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, равных нулю),

$$a_{n_1,\ldots,n_k}^{(i_1,\ldots,i_k)} = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{\nu=1}^{k} \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu) \, dx_1 \ldots dx_k;$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \cos nx, & i = 1, \\ \sin nx, & i = 2. \end{cases}$$

Каждой функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с помощью матрицы чисел $\{\lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_k}^{(n_1,\ldots,n_k)}\}$ $(\lambda_{0,\ldots,0}^{(n_1,\ldots,n_k)} = 1$, $\lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_k}^{(n_1,\ldots,n_k)} = 0$, если хотя бы одно из чисел $\nu_i > n_i)$ поставим в соответствие полиномы:

$$U_{n_1,\ldots,n_k}(f;\, x;\, \lambda) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} \lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_k}^{(n_1,\ldots,n_k)} A_{\nu_1,\ldots,\nu_k}(x_1, \ldots, x_k).$$

Определение. Если в некоторой точке $x(x_1, \ldots, x_k)$ при любом $i \leqslant k$ выполнены следующие $2^k - 1$ условия:

$$\sum_{n_{\nu_1}=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_{\nu_i}=1}^{\infty} \Delta_{n_{\nu_1}} \ldots \Delta_{n_{\nu_i}} U_{n_1,\ldots,n_k}(f;\, x_1, \ldots, x_k;\, \lambda) < \infty \tag{2}$$

(при фиксированных остальных индексах), где $\nu_\mu \neq \nu_r$ при $\mu \neq r$ и

$$\Delta_{n_i} U_{n_1,\ldots,n_k} = U_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i,n_{i+1},\ldots n_k} - U_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_k}, \tag{3}$$

то ряд (1) абсолютно суммируемый методом $\{\lambda^{(n_1,\ldots,n_k)}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}\}$ в данной точке $x(x_1\ldots \ldots, x_k)$.

Очевидно, что в случае, когда $\lambda^{(n_1,\ldots,n_k)}_{\nu_1,\ldots,\nu_k} = 0$, если хотя бы одно из $\nu_i > n_i$, и $\lambda^{(n_1,\ldots,n_k)}_{\nu_1,\ldots,\nu_k} = 1$ для остальных ν_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то это определение дает абсолютную сходимость ряда (1).

Полагая, например, $\lambda^{(n_1,\ldots,n_k)}_{\nu_1,\ldots,\nu_k} = \prod\limits_{i=1}^{k} A^{(\beta_i)}_{n_i-\nu_i} (A^{(\beta_i)}_{n_i})^{-1}$ при $\nu_i \leqslant n_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$, где $A^{(\beta)}_n = \dfrac{(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{n!}$ и $\lambda^{(n_1,\ldots,n_k)}_{\nu_1,\ldots,\nu_k} = 0$, если хотя бы одно из $\nu_i > n_i$, получаем известное в кратном случае определение абсолютной чезаровской суммируемости или, так называемой, $|C;\ \beta_1, \ldots, \beta_k|$-суммируемости ряда.

В данной статье выясняется, какими свойствами должна обладать функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ лишь по каждой из переменных в отдельности для того, чтобы ее ряд Фурье был абсолютно суммируемым некоторыми методами. В качестве характеристик свойств функций $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}_p$ по каждой из переменных будут служить величины:

$$\omega^{(\nu)}_r(f; h)_{L^{(k)}_p} = \sup_{|t| \leqslant h} \left\| \sum_{\mu=0}^{r} (-1)^{r-\mu} \binom{r}{\mu} f(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu + \mu t, x_{\nu+1}, \ldots, x_k) \right\|_{L^{(k)}_p}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, k;\ r = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$E^{(\nu)}_{n,\infty}(f)_{L^{(k)}_p} = \inf_T \| f(x_1, \ldots, x_k) - T_n[x_1, \ldots, x_{\nu-1}, (x_\nu), x_{\nu+1}, \ldots, x_k] \|_{L^{(k)}_p}, \tag{5}$$

где $T = T_n[x_1, \ldots, x_{\nu-1}, (x_\nu), x_{\nu+1}, \ldots, x_k]$ — тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ по переменной x_ν с коэффициентами, принадлежащими $L^{(k-1)}_p$. Величину, определенную равенством (4), принято называть частным модулем гладкости порядка r функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ по переменной x_ν в метрике $L^{(k)}_p$, а величину, определенную равенством (5), частным наилучшим приближением порядка n тригонометрическими полиномами по переменной x_ν функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ в метрике $L^{(k)}_p$.

Часть результатов статьи опубликована ранее без доказательства в [1, 2].

§ 1. Конструктивные характеристики функции и абсолютная суммируемость кратного ряда Фурье

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $f(x_1, x_2) \in L^{(2)}_2$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta_\nu} E^{(\nu)}_{n,\infty}(f)_{L^{(2)}_2} < \infty, \tag{1.1}$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C;\ \beta_1, \beta_2|$-суммируемый $\left(0 < \beta_\nu \leqslant 1/2\right)$.

Теорема 2. *Если $f(x_1, x_2) \in L^{(2)}_2$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{-\frac{1}{2}} E^{(\nu)}_{n,\infty}(f)_{L^{(2)}_2} < \infty, \tag{1.2}$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемый при $\beta_\nu > 1/2$ $(\nu = 1, 2)$.

Теорема 3. *Если $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}} \{E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_\nu} < \infty \quad (\alpha_\nu > 0),\ \nu = 1, 2;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{1.3}$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемый при $-1 < \beta_\nu \leqslant 1/2$.

Теорема 4. *Если $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+2)}} \{E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_\nu} < \infty, \tag{1.4}$$

где $\beta_\nu > \frac{1}{2}$, $\alpha_\nu > 0$; $\nu = 1, 2$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемый.

Теоремы 1 и 3 при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ установлены М. Ф. Тиманом (см. [3, 4]). Для случая одной переменной ($k = 1$) критерии абсолютной сходимости ($\beta = 0$) ряда Фурье функции $f(x)$ из пространства $L_2^{(1)}$ приведены С. Б. Стечкиным [5]. Затем М. Ф. Тиман установил при $k = 1$ критерии $|C; \beta|$-суммируемости ряда Фурье функции $f(x) \in L_p^{(1)}$ для $-1 < \beta < 1/2$ (см. [6, 7]). Случай $\beta \geqslant \frac{1}{2}$, $k = 1$, рассмотрен в [1, 8].

Установим вначале предложения, обобщающие результаты Лейндлера [9] на случай двойных рядов Фурье.

Теорема 5. А. *Если $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{n_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1\right)} 2^{n_2\left(\frac{1}{2}-\beta_2\right)} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}} \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}} \varrho_{k_1,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1\right)} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \varrho_{k_1,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{n_2\left(\frac{1}{2}-\beta_2\right)} \left\{ \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \varrho_{0,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.5}$$

где $\varrho_{n_1,n_2} = \mu_{n_1,n_2} \sqrt{\sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} |a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)}|}$, то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемый при $-1 < \beta_1, \beta_2 < 1/2$.

В. *Если $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sqrt{n_1 n_2} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \varrho_{k_1,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sqrt{n_1} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \varrho_{k_1,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{n_2=1}^{\infty} \sqrt{n_2} \left\{ \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \varrho_{0,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.6}$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $\left|C; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right|$-суммируемый.

С. *Если $f(x_1, x_2) \in L_2^{(2)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1} \sum_{k_2=2^{n_2}}^{2^{n_2+1}-1} \varrho_{k_1,k_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

$$\sum_{n_i=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_i=2^{n_i}}^{2^{n_i+1}-1}\varrho_{k_i,0}^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty \qquad (i=1,2), \tag{1.7}$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$ почти всюду $|C;\ \beta_1,\ \beta_2|$-суммируемый при $\beta_1,\ \beta_2>\frac{1}{2}$.

Доказательство теоремы 5. Покажем, что для ряда

$$A_{0,0}+\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,0}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}(y)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}(x,\ y) \tag{1.8}$$

из (1.5) — (1.7) почти для всех точек $M(x, y)$ вытекает при соответствующих $\beta_1,\ \beta_2$ выполнение условий

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta_{m,n}\sigma_{m,n}^{(\beta_1,\beta_2)}|=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_{m,n}^{(\beta_1,\beta_2)}-\sigma_{m-1,n}^{(\beta_1,\beta_2)}-\sigma_{m,n-1}^{(\beta_1,\beta_2)}+\sigma_{m-1,n-1}^{(\beta_1,\beta_2)}|<\infty, \tag{1.9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{m,0}^{(\beta_1,\beta_2)}-\sigma_{m-1,0}^{(\beta_1,\beta_2)}|<\infty, \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_{0,n}^{(\beta_1,\beta_2)}-\sigma_{0,n-1}^{(\beta_1,\beta_2)}|<\infty, \tag{1.11}$$

где $\sigma_{m,n}^{(\beta_1\beta_2)}$ — $(C;\ \beta_1,\ \beta_2)$-средние ряда (1.8), что и означает $|C;\ \beta_1,\ \beta_2|$-суммируемость почти всюду ряда (1.8).

Известно [10], что для двойного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}(x,\ y) \tag{1.12}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta_{m,n}\sigma_{m,n}^{(\beta_1,\beta_2)}|=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mA_m^{(\beta_1)}nA_n^{(\beta_2)})^{-1}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}klA_{m-k}^{(\beta_1-1)}A_{n-l}^{(\beta_2-1)}A_{k,l}(x,\ y)\right|. \tag{1.13}$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mA_m^{(\beta_1)}nA_n^{(\beta_2)})^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}klA_{m-k}^{(\beta_1-1)}A_{n-l}^{(\beta_2-1)}A_{k,l}(x,y)\right|dxdy.$$

Из сходимости последнего ряда следует сходимость почти всюду ряда (1.13) и, следовательно, $|C;\ \beta_1,\ \beta_2|$-суммируемость ряда (1.8).

Так как $A_n^{(\beta)}\asymp n^{\beta^*}$, то применяя неравенство Шварца и равенство Парсеваля, будем иметь

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}(\mu^{1+\beta_1}\nu^{1+\beta_2})^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{\nu}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{klA_{k,l}(x,\ y)}{(\mu-k+1)^{1-\beta_1}(\nu-l+1)^{1-\beta_2}}\right|dxdy\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B(m,\ n,\ \beta_1,\ \beta_2)\times$$

* $x\leqslant y$, $x\asymp y$ означает соответственно следующие порядковые соотношения: $x\leqslant Cy$, $C_1y\leqslant x\leqslant C_2y$, где $C,\ C_1,\ C_2$ — некоторые положительные константы.

$$\times\left\{\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\left(\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=1}^{2^n-1}+\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=2^n}^{\nu}+\sum_{k=2^m}^{\mu}\sum_{l=2^n}^{\nu}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{k^2l^2\varrho_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\beta_1}(\nu-l+1)^{2-2\beta_2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^{4}\sigma_{\beta_1,\beta_2}^{(i)},\tag{1.14}$$

где $B(m, n, \beta_1, \beta_2)=2^{-m/2(1+2\beta_1)}2^{-n/2(1+2\beta_2)}$.

Оценим первое слагаемое в правой части (1.14)

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}^{(1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B(m, n, \beta_1, \beta_2)\left\{\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{k=1}^{2^m-1}\sum_{l=1}^{2^n-1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{k^2l^2\varrho_{k,l}^2}{(\mu-k+1)^{2-2\beta_1}(\nu-l+1)^{2-2\beta_2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B(m, n, \beta_1, \beta_2)\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}k^2l^2\varrho_{k,l}^2\sum_{\mu=2^m}^{2^{m+1}-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}(\mu-k+1)^{2\beta_1-2}(\nu-l+1)^{2\beta_2-2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда для $\beta_1, \beta_2, <1/2$ находим, что

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}^{(1)}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B(m, n, \beta_1, \beta_2)\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}k^2l^2\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B(m, n, \beta_1, \beta_2)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}2^{i+1}2^{j+1}\{r_{i,j}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $r_{i,j}=\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}\varrho_{k,l}^2$.

Меняя порядок суммирования, получим

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}^{(1)}\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2^{i+j+2}\{r_{i,j}\}^{\frac{1}{2}}\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}B(m, n, \beta_1, \beta_2)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2^{\frac{i(1-2\beta_1)}{2}}2^{\frac{j(1-2\beta_2)}{2}}\{r_{i,j}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\beta_1=\beta_2=1/2$, то

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}^{(1)}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-m-n}\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\sum_{l=2^j}^{2^{j+1}-1}k^2l^2\varrho_{k,l}^2\right)\ln 2^m\ln 2^n\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2^{i+j}\{r_{i,j}\}^{\frac{1}{2}}\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}2^{-m-n}\sqrt{(m+1)(n+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{(i+1)(j+1)}\{r_{i,j}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично, для $\beta_1, \beta_2 > 1/2$ получим

$$\sigma^{(1)}_{\beta_1,\beta_2} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B(m, n, \beta_1, \beta_2)\, 2^{m\beta_1+n\beta_2}\, 2^{-\frac{m+n}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{2(i+j)} r_{i,j} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B(m, n, \beta_1, \beta_2)\, 2^{m\beta_1+n\beta_2}\, 2^{\frac{m+n}{2}} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \{r_{i,j}\}^{1/2} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \{ r_{i,j} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Так же оценивается и $\sigma^{(i)}_{\beta_1,\beta_2}$ $(i = 2, 3, 4)$.

Таким образом, из условий (1.5) — (1.7) при соответствующих β_1, β_2 вытекает $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемость почти всюду ряда (1.12).

Из условий (1.5) — (1.7), в силу теоремы Лейндлера для простых рядов Фурье, вытекает также $|C; \beta_1|$-суммируемость почти всюду ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{m,0}(x)$ и $|C; \beta_2|$-суммируемость почти всюду ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{0,n}(y)$.

Отметим, что для функции двух переменных, кроме рассмотренных, возможны еще три случая: 1) $\beta_1 < 1/2$, $\beta_2 > 1/2$; 2) $\beta_1 < 1/2$, $\beta_2 = 1/2$; 3) $\beta_1 > 1/2$, $\beta_2 = 1/2$.

Теорема 6. *Если $f(x, y) \in L^{(2)}_2$ и выполнены условия*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\beta_1)} \{ r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\beta_1)} \{ r^{(1)}_m \}^{\frac{1}{2}} < \infty, \ \sum_{n=0}^{\infty} \{ r^{(2)}_n\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x, y)$ почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемый при $-1 < \beta_1 < 1/2$, $\beta_2 > 1/2$, где $r^{(1)}_m = \sum\limits_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \varrho^2_{k,0}$, $r^{(2)}_n = \sum\limits_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \varrho^2_{0,l}$.

Теорема 7. *Если $f(x, y) \in L^{(2)}_2$ и выполнены условия*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\beta_1)} \{ (n+1)\, r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\beta_1)} \{r^{(1)}_m\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+1)\, r^{(2)}_n\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x, y)$ почти всюду $|C; \beta_1, 1/2|$-суммируемый.

Теорема 8. *Если $f(x, y) \in L^{(2)}_2$ и выполнены условия*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)\, r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \{r^{(1)}_m\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+1)\, r^{(2)}_n\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x, y)$ почти всюду $|C; \beta_1, 1/2|$-суммируемый.

Замечание. Условия (1.5) при $0 \leqslant \beta_1, \beta_2 < 1/2$, если у функции $f(x, y) \in L^{(2)}_2$ коэффициенты Фурье монотонно убывают по каждому из индексов, являются не только достаточными, но и необходимыми для $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемости почти всюду ряда Фурье этой функции (для функции одной переменной (см. [7])).

Действительно, благодаря неравенству Конюшкова [11]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\delta} \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} d_n \right\}^{\delta} \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} d^{\delta}_n$$

($0<\delta<1$, $\gamma-\delta>-1$, $d_n\geqslant 0$ монотонно убывают) легко получить оценку

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\gamma_1-\delta}n^{\gamma_2-\delta}\left\{\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty} d_{\mu,\nu}\right\}^{\delta}\leqslant M\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{\gamma_1}n^{\gamma_2}d_{m,n}^{\delta}$$

($0<\delta<1$, $\gamma_1-\delta>-1$, $\gamma_2-\delta>-1$, $d_{m,n}\geqslant 0$ монотонно убывают по m и n).

Положив $\delta=1/2$, $\gamma_1=-\beta_1$, $\gamma_2=-\beta_2$, $d_{m,n}=\varrho_{m,n}^2$, получим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{1+2\beta_1}{2}}n^{-\frac{1+2\beta_2}{2}}\left\{\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac12}\leqslant M\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}m^{-\beta_1}n^{-\beta_2},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1+2\beta_1}{2}}\left\{\sum_{\mu=m}^{\infty}\varrho_{\mu,0}^2\right\}^{\frac12}\leqslant M\sum_{m=1}^{\infty}\varrho_{m,0}m^{-\beta_1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_2}{2}}\left\{\sum_{\nu=n}^{\infty}\varrho_{0,\nu}^2\right\}^{\frac12}\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_{0,n}n^{-\beta_2}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-m\beta_1-n\beta_2}\left\{2^{m+n}r_{m,n}\right\}^{\frac12}\leqslant M_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_{m,n}m^{-\beta_1}n^{-\beta_2},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\beta_1}\left\{2^m r_m^{(1)}\right\}^{\frac12}\leqslant M_2\sum_{m=1}^{\infty}\varrho_{m,0}m^{-\beta_1};\quad \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\beta_2}\left\{2^n r_n^{(2)}\right\}^{\frac12}\leqslant M_3\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_{n,0}n^{-\beta_2}. \tag{1.15}$$

Чтобы закончить доказательство, сошлемся на теорему Когбетлианца [12, стр. 252], которая утверждает, что из $|C;\alpha|$-суммируемости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ($\alpha>0$) следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\alpha}$. Теорема Когбетлианца была обобщена И. Е. Жаком [13] на случай двойных рядов. Поэтому из $|C;\beta_1,\ \beta_2|$-суммируемости почти всюду ряда Фурье функции $f(x,\ y)$ вытекает абсолютная сходимость почти всюду рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-\beta_1}n^{-\beta_2}A_{m,n}(x,y);\quad \sum_{m=1}^{\infty}m^{-\beta_1}A_{m,0}(x);\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta_2}A_{0,n}(y).$$

Но тогда по теореме Лузина — Данжуа сходятся и ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^{-\beta_1}n^{-\beta_2}\varrho_{m,n};\quad \sum_{m=1}^{\infty}m^{-\beta_1}\varrho_{m,0};\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta_2}\varrho_{0,n}.$$

Благодаря (1.15) получаем наше утверждение.

Доказательство теоремы 1. Доказательство разобьем на два случая.

1. Пусть $\beta_\nu=1/2$ ($\nu=1,\ 2$). Используя неравенство (см. [14, стр. 308])

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}+\ldots)^p\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}(a_n n)^p\quad(0<p<1),$$

находим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\left\{mnU_{m,n}\right\}^{\frac12}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}U_{k,l}\right\}^{\frac12}. \tag{1.16}$$

Положив в неравенстве (1.16) $U_{m,n} = r_{m,n}$, будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{mn\,r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} r_{k,l}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{m+n}\left\{2^{-2(m+n)}\sum_{k=2^{m-1}}^{\infty}\sum_{l=2^{n-1}}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(mn)^{-2}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из тождества (см. [4])

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| = |U_{0,0}| + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,\nu}| + \sum_{\mu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,\nu}|\right)$$

с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \leqslant |U_{0,0}| + \sum_{n=0}^{\infty}2^n\left\{\left(\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left.+\left(2\sum_{\mu=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1}|U_{\mu,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leqslant |U_{0,0}| + \sum_{n=0}^{\infty}2^n(g_{2^n} + \gamma_{2^n}),$$

где $g_l = \left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=l}^{\infty}|U_{\mu,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_k = \left(\sum_{\mu=k}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|U_{\mu,\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

Так как g_l и γ_k монотонно убывают с возрастанием k и l, то

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \leqslant |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1} g_l + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\gamma_k =$$

$$= |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty} g_n + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = |U_{0,0}| + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n + \gamma_n). \tag{1.17}$$

Полагая в этом неравенстве $U_{m,n} = \left\{\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, получим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}| \leqslant \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + O(1).$$

Оценим первое слагаемое

$$\sigma^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mu+1)^{-2}(\nu+1)^{-2}\sum_{k=\mu}^{\infty}\sum_{l=\nu}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)^{-1}\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично,

$$\sigma^{(2)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)^{-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{mnr_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)^{-1}\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)^{-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\frac{1}{2}}E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\frac{1}{2}}E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}.$$

Отсюда следует, что выполнение условий (1.1) обеспечивает $|C;\ 1/2,\ 1/2|$-суммируемость почти всюду ряда (1.12). Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$E_n(\varphi)_{L_2^{(1)}}\leqslant E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}};\quad E_n(\psi)_{L_2^{(1)}}\leqslant E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}},\tag{1.18}$$

где

$$\varphi(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,0}(x),\quad \psi(y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}(y).$$

В самом деле, достаточно сравнить

$$E_n(\varphi)_{L_2^{(1)}}=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_{k,0}^2+b_{k,0}^2)\right\}^{\frac{1}{2}};\ E_n(\psi)_{L_2^{(1)}}=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_{0,k}^2+c_{0,k}^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}};\ E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому из условий (1.1) и (1.18) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\frac{1}{2}}E_n(\varphi)_{L_2^{(1)}}<\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\frac{1}{2}}E_n(\psi)_{L_2^{(1)}}<\infty.$$

Следовательно, выполнение условий (1.1) обеспечивает также $|C;\ 1/2|$-суммируемость почти всюду рядов $\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,0}(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}(y)$.

Таким образом, для случая $\beta_1=\beta_2=1/2$ теорема доказана.

2. Пусть $0<\beta_1,\ \beta_2<1/2$. Очевидно, что

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-m-n}B(m,n,\beta_1,\beta_2)\left\{\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу монотонности $g_{m,n}=\left\{\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\varrho_{k,l}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-m-n}B(m,n,\beta_1\,\beta_2)\,g_{2^m,2^n}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(m+1)^{-1-2\beta_1}(n+1)^{-1-2\beta_2}g_{m,n}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь неравенством (1.17) при $U_{m,n}=\{(m+1)^{-1-2\beta_1}(n+1)^{-1-2\beta_2}\times\times g_{m,n}^2\}^{\frac{1}{2}}$, находим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|U_{m,n}|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mu+1)^{-1-2\beta_1}(\nu+1)^{-1-2\beta_2}g_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}(\mu+1)^{-1-2\beta_1}(\nu+1)^{-1-2\beta_2}g_{\mu,\nu}^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+O(1)=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}+O(1).$$

Оценим первую сумму

$$\sigma^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \sum_{\mu=n}^{\infty} (\mu+1)^{-1-2\beta_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-1-2\beta_2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $0 < \beta_1, \beta_2 < 1/2$, то

$$\sigma^{(1)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta_1} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta_1} E_{n,\infty}^{(1)} (f)_{L_2^{(2)}}.$$

Аналогично,

$$\sigma^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} (\mu+1)^{-1-2\beta_1} (\nu+1)^{-1-2\beta_2} g_{\mu,\nu}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta_2} E_{n,\infty}^{(2)} (f)_{L_2^{(2)}}.$$

Благодаря условиям (1.1) и теореме 5 получим, что почти всюду для ряда (1.12) выполнено условие (1.9). В силу (1.18) и (1.1) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta_1} E_n(\varphi)_{L_2^{(1)}} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta_2} E_n(\psi)_{L_2^{(1)}} < \infty,$$

а последние неравенства обеспечивают выполнение условий (1.10) и (1.11), что завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{m,n})^{\frac{1}{2}}$.

Благодаря неравенству (см. [14, стр. 308])

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \right)^p \quad (0 < p < 1)$$

можно получить

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (U_{m,n})^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=m}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} U_{\mu,\nu} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.19}$$

Положив в этом неравенстве $U_{m,n} = r_{m,n}$, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} r_{k,l} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^m \ln 2^n}} g_{2^m, 2^n}. \tag{1.20}$$

В силу монотонности чисел $g_{m,n}$ сходимость ряда в правой части (1.20) будет следовать из сходимости ряда

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(m+1)^{-2} (n+1)^{-2}}{\ln(m+2) \ln(n+2)} g_{m,n}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в неравенстве (1.17) $U_{m,n} = \left\{ \frac{(m+1)^{-2} (n+1)^{-2}}{\ln(m+2) \ln(n+2)} g_{m,n}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\sigma \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+1)^{-2} (\nu+1)^{-2}}{\ln(\mu+2) \ln(\nu+2)} g_{\mu,\nu}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+\left[\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{(\mu+1)^{-2}(\nu+1)^{-2}}{\ln(\mu+2)\ln(\nu+2)}g_{\mu,\nu}^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}.$$

Оценим первое слагаемое. Меняя порядок суммирования, находим, что

$$\sigma^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k+1)^{-2}}{\ln(k+2)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)^{2}\ln(l+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}\sum_{\mu=n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_{\mu,\nu}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)\right]^{-\frac{1}{2}}E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}.$$

Аналогично, $\sigma^{(2)}\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\ln(n+2)\right]^{-\frac{1}{2}}E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}$. Тогда

$$\sigma\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}.$$

Таким образом, выполнение условий (1.2) обеспечивает сходимость ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(r_{m,n})^{\frac{1}{2}}$, что в силу теоремы 5 обеспечивает почти всюду (1.9) для ряда (1.12). Сходимость рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_{m,0}(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{0,n}(y)$ следует из неравенств

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}E_n(\varphi)_{L_2^{(1)}}<\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+2)}}E_n(\psi)_{L_2^{(1)}}<\infty.$$

Как видно из теорем 1 и 2, условия, обеспечивающие абсолютную суммируемость кратного ряда Фурье, фактически зависят от свойств функции $f(x_1, x_2)$ по той из переменных, по которой $E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}$ наиболее медленно стремится к нулю.

Теоремы 3 и 4 носят несколько иной характер: в них «слабые» свойства по одной переменной компенсируются более «сильными» свойствами по другой переменной.

Доказательство теоремы 3. Пусть $-1<\beta_\nu<1/2$. Воспользуемся следующим неравенством (см. [4]):

$$\left\{\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\varrho_{k,l}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varrho_{k,l}^{2}\right\}^{\frac{\alpha_1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\varrho_{k,l}^{2}\right\}^{\frac{\alpha_2}{2}}\tag{1.21}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2=1;\quad \alpha_1,\alpha_2>0).$$

Очевидно, что

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{m+n}{2}}2^{-m\beta_1-n\beta_2}\left\{\sum_{k=2^m}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varrho_{k,l}^{2}\right\}^{\frac{\alpha_1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=2^n}^{\infty}\varrho_{k,l}^{2}\right\}^{\frac{\alpha_2}{2}},$$

где σ_{β_1,β_2} определена ранее. Следовательно,

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\beta_1}2^{\frac{m}{2}}\{E_{2^m,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\beta_2}2^{\frac{n}{2}}\{E_{2^n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_2}.$$

В силу монотонности последовательностей $E_{n,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}$ и $E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}$ получим

$$\sigma_{\beta_1,\beta_2} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\frac{1+2\beta_1}{2}} \{E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\frac{1+2\beta_2}{2}} \{E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_2}.$$

Отсюда, в силу условий (1.3), вытекает $|C; \beta_1, \beta_2|$-суммируемость почти всюду ряда (1.8).

Пусть $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. Рассмотрим ряд $\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{(m+1)(n+1) r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}}$.

Положив в неравенстве (1.19) $U_{m,n} = r_{m,n}$, получим

$$\gamma \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} r_{k,l} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^m}^{\infty} \sum_{l=2^n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу монотонности последовательности чисел $\left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$\gamma \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь неравенством (1.21), получим

$$\gamma \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-1} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{\alpha_2}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-1} \{E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} \{E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_2}.$$

Отсюда, в силу теоремы 5, следует, что выполнение условий (1.3) с учетом неравенств (1.18) обеспечивает $|C; 1/2, 1/2)|$-суммируемость почти всюду ряда (1.8).

Доказательство теоремы 4. Справедливо неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(m+1)(n+1)]^{-1}}{\sqrt{\ln(m+1)\ln(n+1)}} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma^*. \quad (1.22)$$

В самом деле,

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=2^i}^{2^{i+1}-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{[(m+1)(n+1)]^{-1}}{\sqrt{\ln(m+1) \, ln(n+1)}} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^m \ln 2^n}} \left\{ \sum_{k=2^{i+1}}^{\infty} \sum_{l=2^{j+1}}^{\infty} \varrho_{k,l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{m=i+1}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} r_{m,n} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь неравенством (1.19), получим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{m=i+1}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} r_{m,n} \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}},$$

и неравенство (1.22) доказано.

На основании неравенств (1.21) и (1.22) имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{r_{m,n}\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^{-1}}{\sqrt{\ln(m+1)}}\{E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_1}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{-1}}{\sqrt{\ln(n+1)}}\{E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}}\}^{\alpha_2}.$$

В силу теоремы 5 с учетом неравенств (1.18), выполнение условий (1.4) обеспечивает $|C;\ \beta_1,\ \beta_2|$-суммируемость всюду ряда (1.8).

В заключение этого параграфа приведем формулировки утверждений, аналогичных теоремам 1—4 для случая функций k переменных.

Теорема 1′. *Если $f(x_1,\ldots,x_k)\in L_2^{(k)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{k}{2}-\beta_\nu-1}E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}<\infty, \tag{1.23}$$

то кратный ряд Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ почти всюду $|C;\ \beta_1,\ldots,\beta_k|$-суммируемый $(0<\beta_\nu\leqslant 1/2)$.

Теорема 2′. *Если $f(x_1,\ldots,x_k)\in L_2^{(k)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{\frac{k-3}{2}}(\ln n)^{-\frac{1}{2}}E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}<\infty, \tag{1.24}$$

то кратный ряд Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ почти всюду $|C;\ \beta_1,\ldots,\beta_k|$-суммируемый при $\beta_\nu>1/2$.

Теорема 3′. *Если $f(x_1,\ldots,x_k)\in L_2^{(k)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}}\{E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu}<\infty\ (\alpha_\nu>0;\ \nu=1,2,\ldots,k;\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=1), \tag{1.25}$$

то кратный ряд Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ почти всюду $|C;\beta_1,\ldots,\beta_k|$-суммируемый при $-1<\beta_\nu\leqslant 1/2$.

Теорема 4′. *Если $f(x_1,\ldots,x_k)\in L_2^{(k)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+2)}}\{E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu}<\infty, \tag{1.26}$$

где $\beta_\nu>1/2,\ \alpha_\nu>0;\ \nu=1,2,\ldots,k;\ \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=1,$ то кратный ряд Фурье функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ почти всюду $|C;\ \beta_1,\ldots,\beta_k|$-суммируемый.

Доказательства этих теорем ввиду некоторой их громоздкости в статье не приводим.

§ 2. Структурные свойства функции по каждой из переменных и $|C|$-суммируемость кратного ряда Фурье

Теоремы $1'-4'$ позволяют получить следующие критерии абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье.

Теорема 9. *Если* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-\beta_\nu-1}\omega_l^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} < \infty \ (l \geqslant k;\ \nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.1}$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \ldots, \beta_k|$*-суммируемый* $(0 < \beta_\nu \leqslant 1/2)$.

Теорема 10. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k-3}{2}} [\ln(n+1)]^{-\frac{1}{2}}\omega_l^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} < \infty \ (l \geqslant k;\ v = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.2}$$

то ряд Фурье функции f *почти всюду* $|C; \beta_1, \ldots, \beta_k|$*-суммируемый при* $\beta_\nu > 1/2$.

Теорема 11. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}}\left\{\omega_{l_\nu}^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu} < \infty \ \left(l_\nu > \frac{1-2\beta_\nu}{2\alpha_\nu};\ \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu = 1;\ \alpha_\nu > 0\right), \tag{2.3}$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \ldots, \beta_k|$*-суммируемый* $(0 < \beta_\nu \leqslant 1/2)$.

Теорема 12. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_2^{(k)}$ *и выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left\{\omega_{l_\nu}^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu} < \infty \left(l_\nu > \frac{1-2\beta_\nu}{2\alpha_\nu};\ \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu = 1;\ \alpha_\nu > 0\right), \tag{2.4}$$

то ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \ldots, \beta_k|$*-суммируемый* $(\beta_\nu > 1/2)$.

Теоремы 9—12 вытекают соответственно из теорем $1'$ — $4'$, если учесть, что справедливо следующее неравенство (см., например, [15]):

$$E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_p^{(k)}} \leqslant C_k\omega_l^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p^{(k)}} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2.5}$$

Однако можно показать, что условия (2.1)—(2.4) эквивалентны условиям (1.23)—(1.26).

Для доказательства эквивалентности этих условий следует воспользоваться неравенством, обратным к (2.5) (см., например, [15]):

$$\omega_k^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p^{(k)}} \leqslant \frac{C_k}{n^k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{k-1}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_p^{(k)}}. \tag{2.6}$$

Докажем эквивалентность условий (2.1) и (1.23). На основании (2.6) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-\beta_\nu-1}\omega_k^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-\beta_\nu-1} n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{k-1}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}-\beta_\nu-1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{k-1}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{k-1}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\sum_{n=\mu}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}-\beta_\nu-1}.$$

Так как $\sum\limits_{n=\mu}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}-\beta_\nu-1} \leqslant \mu^{-\frac{k}{2}-\beta_\nu}$, то окончательно будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}-\beta_\nu-1} \omega_k^{(\nu)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} \leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\frac{k}{2}-\beta_\nu-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}.$$

Доказательство эквивалентности условий (2.2) и (1.24). На основании (2.6) можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{k-3}}{\ln(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_l^{(\nu)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{k-3}}{\ln(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} n^{-l} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{l-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{l-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{n^{\frac{k-3}{2}-l}}{\sqrt{\ln(n+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{l-1}}{\sqrt{\ln(\mu+1)}} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}} \sum_{n=\mu}^{\infty} n^{\frac{k-3}{2}-l},$$

но так как $\sum\limits_{n=\mu}^{\infty} n^{\frac{k-3}{2}-l} \leqslant \mu^{\frac{k-1}{2}-l}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{k-3}}{\ln(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_l^{(\nu)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{k-3}}{\ln(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}.$$

Установим эквивалентность условий (2.3) и (1.25):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}} \left\{\omega_{l\nu}^{(\nu)}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}} \left\{n^{-l_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{l_\nu-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}-\alpha_\nu\beta_\nu} \left\{\sum_{\mu=1}^{n} \mu^{l_\nu-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu}.$$

Воспользуемся неравенством (см. [11])

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{m=1}^{n} d_m\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(nd_n)^{\alpha}, \tag{2.7}$$

где при некотором $\tau > 0$ последовательность $\{n^{-\tau} d_n\}$ почти убывает, $d_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1$, $c > 1$. Тогда $\left(\text{так как } l_\nu > \dfrac{1-2\beta_\nu}{2}\right)$, полагая $d_\mu = \mu^{l_\nu-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}-\alpha_\nu\beta_\nu} \left\{\sum_{\mu=1}^{n} \mu^{l_\nu-1} E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}-\alpha_\nu\beta_\nu} \{n^{l_\nu} E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+2\beta_\nu}{2}} \{E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu}.$$

Установим, наконец, эквивалентность условий (2.4) и (1.26). В силу (2.6) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left\{\omega_{l_\nu}^{(\nu)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left\{n^{-l_\nu}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{l_\nu-1}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\alpha_\nu\beta_\nu}\left\{\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{l_\nu-1}[\ln(n+1)]^{-\frac{1}{2\alpha_\nu}}E_{\mu-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu}.$$

Пользуясь неравенством (2.7), получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\left\{\omega_{l_\nu}^{(\nu)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_2^{(k)}}\right\}^{\alpha_\nu}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\alpha_\nu\beta_\nu}\{n^{l_\nu}[\ln(n+1)]^{-\frac{1}{2\alpha_\nu}}\times$$

$$\times E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\{E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_2^{(k)}}\}^{\alpha_\nu},$$

и эквивалентность доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Пономаренко, Некоторые критерии абсолютной чезаровской суммируемости кратных рядов Фурье, ДАН СССР, т. 152, № 6, 1963.
2. М. Ф. Тиман, Ю. А. Пономаренко, Некоторые критерии абсолютной суммируемости рядов Фурье, сб. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965.
3. М. Ф. Тиман, Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье, ДАН СССР, т. 137, 1961.
4. М. Ф. Тиман, Частные наилучшие приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядерность интегральных операторов Гильберта — Шмидта, Матем. сб., т. 75, № 3, 1968.
5. С. Б. Стечкин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, ДАН СССР, т. 102, 1955.
6. М. Ф. Тиман, Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье, Сообщ. АН ГрузССР, т. 26, № 6, 1961.
7. М. Ф. Тіман, Зауваження до питання про абсолютну сумовність ортогональних рядів, ДАН УРСР, № 12, 1966.
8. А. В. Грепачевская, Абсолютная суммируемость ортогональных рядов, Матем. сб., т. 65 (107), № 3, 1964.
9. H. Leindler, Über die absolute summierkeit, der orthogonalreihen, Acta sciend. math., Szeged, 22, 1961, 243—268.
10. И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов, Матем. сб., т. 35 (77): 1, 1953.
11. А. А. Конюшков, Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами, Матем. сб., т. 44(86): 11, 1958.
12. E. Kogbetlaintz, Bull. Sci Math., 2, 49, 1925, 252.
13. И. Е. Жак, Абсолютная суммируемость двойных числовых рядов, ДАН СССР, т. 73, № 4, 1950.
14. Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, М., 1948.
15. М. Ф. Тиман, Некоторые вопросы конструктивной теории функций многих переменных, сб. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, М., 1961.

Поступила 27.II 1968 г.,
после переработки — 27.X 1970 г.

Днепропетровский горный институт,
Днепропетровский сельскохозяйственный институт