УДК 517.917

Применение асимптотического метода в критическом случае двойного нулевого корня

К. Г. Валеев

Предлагается асимптотический прием упрощения системы второго порядка в случае, когда порождающая система имеет двойной нулевой корень с кратным элементарным делителем.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu\varphi_1(t, x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = \mu\varphi_2(t, x, y, \mu), \tag{1}$$

где функции φ_j могут быть представлены в области

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant a$$

асимптотическими при $\mu \to 0$ разложениями

$$\mu\varphi_j(t, x, y, \mu) = \sum_{k=1}^{N} \mu^k \varphi_{jk}(t, x, y) + \mu^{N+1} R_{jN}(t, x, y, \mu).$$

Функции $\varphi_{jk}(t, x, y)$ являются многочленами от переменных x, y с коэффициентами, являющимися функциями от t класса S. К классу S относим функции $f(t)$, обладающие свойствами:

1) каждая из функций $f \in S$ ограничена при $t \geqslant 0$;

2) если $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, то произведение $f_1 f_2 \in S$;

3) для каждой функции $f \in S$ существует среднее значение $\langle f \rangle$ такое, что

$$\int_0^t [f(t) - \langle f \rangle]\, dt \in S.$$

Примерами классов S являются, например, периодические функции, конечные тригонометрические суммы, некоторые стационарные случайные процессы.

Делаем замену в уравнениях (1)

$$x = u + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \alpha_k(t, u, v), \quad y = v + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \beta_k(t, u, v), \tag{2}$$

где переменные u, v удовлетворяют дифференциальным уравнениям специального вида:

$$\frac{du}{dt} = v + \mu a_1(u) + \mu^2 a_2(u) + \ldots + \mu^N a_N(u) + \mu^{N+1} R_1(t, u, v, \mu), \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt} = \mu b_1(u) + \mu^2 b_2(u) + \ldots + \mu^N b_N(u) + \mu^{N+1} R_2(t, u, v, \mu).$$

Уравнения с частными производными для отыскания α_k, β_k, a_k, b_k многочленов относительно u, v имеют при $k=1, 2, \ldots, N$ вид

$$\frac{\partial\beta_k(t, u, v)}{\partial t} + \frac{\partial\beta_k(t, u, v)}{\partial u} v + a_k(u) = \gamma_k(t, u, v),$$

$$\frac{\partial\alpha_k(t, u, v)}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_k(t, u, v)}{\partial u} v + b_k(u) = \delta_k(t, u, v) + \beta_k(t, u, v). \tag{4}$$

Функции γ_k, δ_k будут известными при последовательном определении β_k, α_k. Для существования решения уравнений (4) в виде полиномов достаточно указать способ решения уравнения

$$\frac{\partial z(t, u, v)}{\partial t} + \frac{\partial z(t, u, v)}{\partial u} v + a(u) = \sum_{k=0}^{m} f_k(t) u^k v^{m-k}. \tag{5}$$

Ищем решение $z(t, u, v)$ в виде многочлена степени m

$$z(t, u, v) = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t) u^k v^{m-k}, \quad a(u) = ru^m. \tag{6}$$

Подставляя z в уравнение (5), приходим к системе уравнений

$$\frac{d\psi_m}{dt} + r = f_m, \quad \frac{d\psi_k}{dt} + (k+1)\psi_{k+1} = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \; m-1). \tag{7}$$

Постоянная r выбирается так, чтобы $\psi \in S$. Функции ψ_k определяются с точностью до произвольных постоянных c_k, которые определяются так, чтобы $\psi_{k-1} \in S$. Постоянная c_0 произвольна.

Следовательно, подходящим выбором многочленов $a_k(u)$, $b_k(u)$ можно обеспечить существование полиномиального по u, v решения $\alpha(t, u, v)$, $\beta(t, u, v)$ системы (4), т. е. доказали возможность отыскания α_k, β_k в замене (2), приводящей систему (1) к системе (3). Функции R_1, R_2 в (3) ограничены при достаточно малых значениях $|u|$, $|v|$, $|\mu|$. Отбрасывая в системе (3) члены порядка μ^{N+1}, приходим к эквивалентному уравнению второго порядка, не содержащего явно времени

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \sum_{k=1}^{N} \mu^k \frac{da_k(u)}{du} - \sum_{k=1}^{N} \mu^k b_k(u) + O(\mu^{N+1}) = 0. \tag{8}$$

Если выполнены условия существования нулевого решения системы (1), т. е.

$$\varphi_1(t, 0, 0, \mu) \equiv 0, \quad \varphi_2(t, 0, 0, \mu) \equiv 0,$$

то все многочлены $a_k(u)$, $b_k(u)$, $\alpha_k(t, u, v)$, $\beta_k(t, u, v)$ относительно u, v можно выбрать удовлетворяющими условиям

$$a_k(0) \equiv b_k(0) \equiv \alpha_k(t, 0, 0) \equiv \beta_k(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Поэтому устойчивость нулевого решения уравнения (8), находимая приближенно с точностью до малых порядка μ^{N+1}, соответствует устойчивости нулевого решения системы (1).

П р и м е р. Выведем условие устойчивости нулевого решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt} + \mu f(t) \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) = 0.$$

Уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+p\left(u-\frac{1}{6}u^3\right)+q\left(u-\frac{1}{6}u^3\right)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)+O(\mu^3)=0,$$

$$p=\langle \mu f\rangle,\quad q=\langle \mu f_1 \mu f_1\rangle\quad (q\geqslant 0).$$

Здесь и далее используются обозначения для осреднения

$$\langle f\rangle\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$$

и для интегрирования функции с осреднением

$$f_0=f-\langle f\rangle,\ f_{n+1}=\int f_n\,dt-\langle \int f_n dt\rangle\ \ (n=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

Условие устойчивости положения равновесия $x=0$ имеет вид

$$p+q+O(\mu^3)>0,$$

в частности, для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g-a\omega^2\sin\omega t}{l}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)=0.$$

Необходимое условие устойчивости принимает вид неравенства [1, стр. 312]

$$a^2\omega^2>2gl+l^2O(\mu^3),\quad \mu=\frac{a}{l}+\frac{g}{l\omega^2}.$$

Замечание 1. Для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(t,\mu)\,x=0,\quad |f(t,\mu)|=O(\mu),\ \mu\to O.$$

Необходимое условие устойчивости колебаний имеет вид неравенства, которое выражается через функцию $f(t,\mu)$

$$\langle f+f_1f_1+f_0f_2f_2+4f_2f_2\langle f\rangle+(ff_2)_1(ff_2)_1+3f_2f_2\langle f_1f_1\rangle+$$
$$+ff_3f_3\langle f\rangle-6ff_2f_4\langle f\rangle-5f_0f_3f_3\langle f\rangle\rangle+O(\mu^5)>0.$$

Здесь используются обозначения (9).

Замечание 2. Для применения асимптотического метода [1] для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\varphi\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{10}$$

эффективной является замена уравнения (10) системой

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon y,\quad \frac{dy}{dt}=\varepsilon f\,(t,x,\varepsilon y),\quad \varepsilon^2=\mu.$$

Аналогичное введение нового параметра приводит к стандартной форме дифференциальные уравнения более высокого порядка и применимо при исследовании устойчивости в критических случаях кратных нулевых корней. При построении периодических решений этот прием предлагался в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
2. Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, О периодических решениях дифференциального уравнения n-го порядка с малым параметром, Труды Межд. симпоз. по нелин. колеб., т. I, Изд-во АН УССР, К., 1963.

Поступила 8.VI 1970 г.
Киевский институт инженеров гражданской авиации