УДК 518:517.948

Применение квадратурно-итерационного метода к нахождению характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора

Г. П. Головач, А. Ф. Калайда

1°. Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \nu \int_{\alpha}^{\beta} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{1}$$

при непрерывности и кусочной аналитичности ядра $K(x, s)$ строится так называемый предытерационный процесс

$$\varphi_{n+1}(x) = \nu \sum_{j=0}^{N} A_j K(x, s_j)\,\varphi(s_j) + \nu \int_{\alpha}^{\beta} K(x, s)\,\varphi_n(s)\,ds - \\ - \nu \sum_{j=0}^{N} A_j K(x, s_j)\,\varphi_n(s_j), \quad \varphi_0(x) \equiv 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

A_j, $N+1$ — соответственно коэффициенты и количество узлов некоторой квадратурной формулы, сходящийся в соответствующем пространстве функций к φ при условии сжимаемости оператора Ω

$$\Omega\psi = \nu \int_{\alpha}^{\beta} K(x, s)\,\psi(s)\,ds - \nu \sum_{j=0}^{N} A_j K(x, s_j)\,\psi(s_j). \tag{3}$$

В частности, в пространстве аналитических функций сходимость гарантируется условием (достаточным)

$$\|\Omega\| \leqslant |\nu| \sqrt{2\pi}\,\sigma_N(\beta-\alpha) \sup_{|z|=|t|=1} \left| K\left[(\beta-\alpha)z + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\alpha+\beta}{2}, (\beta-\alpha)t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right]\right| < 1, \tag{4}$$

где σ_N — число, зависящее от типа применяемой квадратурной формулы и стремящееся к нулю при $N \to \infty$ $\left(\text{например, для формулы Симпсона } \sigma_N \leqslant \leqslant \frac{0{,}253}{\sqrt{2\pi}\,N^4}\right)$, z и t — комплексные аргументы на плоскости [1].

Легко видеть, что предытерационный процесс (2) вследствие линейности интегрального оператора K можно свести к $N+1$ явно итерационным процессам.

В самом деле, из (2) при $n \to \infty$ получаем

$$\varphi = \nu \overline{K}\,\overline{\varphi} + \Omega\varphi, \tag{5}$$

откуда

$$\varphi = \nu (I - \Omega)^{-1} \overline{K}\,\overline{\varphi}, \tag{6}$$

где $\overline{K}$ — полунепрерывная матрица, состоящая из $N+1$ столбца, $\overline{\varphi} = \{\varphi(x_j)\}$ — $N+1$-компонентный вектор. Матрицу $M = (I - \Omega)^{-1} \overline{K}$ можно найти методом простой итерации

$$M^{(l+1)} = \overline{K} + \Omega M^{(l)},\ M^{(0)} \equiv 0 \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

что равносильно $N+1$ итерационным процессам

$$M_k^{(l+1)}(x) = A_k K(x, s_k) + \nu \int_\alpha^\beta K(x, s) M_k^{(l)}(s)\,ds - \nu \sum_{j=0}^{N} A_j K(x, s_j) M_k^{(l)}(s_j),$$

$$M_k^{(0)}(x) \equiv 0 \ (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7'}$$

Фиксируя в (6) переменную x $N+1$ раз, получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\varphi(x_i) = \nu \sum_{k=0}^{N} M_k(x_i)\,\varphi(x_k) \quad (i = \overline{0, N}), \tag{8}$$

откуда в силу постановки задачи должно следовать уравнение

$$\det(I - \nu\overline{M}) = 0, \quad \overline{M} = \{M_k(x_i)\}, \tag{9}$$

определяющее характеристические числа ν интегрального оператора, принадлежащие кругу радиуса $\| \nu^{-1}\Omega\|^{-1}$. При этом, очевидно, из функций $M_k(x)$ одновременно конструируются и собственные функции $\varphi(x)$ уравнения (1), отвечающие найденным характеристическим числам.

Замечание. Метод осреднения функциональных поправок для решения поставленной задачи с требуемой точностью неприменим, ибо он дает только нулевые приближения для ν. Действительно, если вместо (2) записать итерационный процесс (1.20) из [2], то получим

$$\varphi_{n+1}(x) = \nu \sum_{j=0}^{N} A_j K(x, s_j)\,\varphi_{n+1}(s_j) + \Omega\varphi_n,\ \varphi_0 = 0,$$

откуда при $n = 0$ должно следовать уравнение

$$\det(\delta_{ij} - \nu A_j K(x_i, s_j)) = 0 \quad (\delta \text{ — символ Кронекера}),$$

которое, как видим, не зависит от номера итерации.

2°. Рассмотрим вопрос о погрешности метода. Считаем, что уравнение (9) решается точно, погрешностями округления пренебрегаем. Звездочкой отмечаются приближенные величины.

По аналогии с [3] установим прежде всего неравенство

$$|\Delta\nu| \leqslant \frac{|\nu^*|^2 \|\psi_c^*\| (\|\psi^*\| + \|\Delta\psi\|) \|\Delta\overline{M}\|}{|(\psi^*, \psi_c^*)| - \|\psi_c^*\| (|\nu^*| \|\Delta\psi\| \|\Delta\overline{M}\| + \|\Delta\psi\| + \|\Delta\overline{M}\| |\nu^*| \|\psi^*\|)}, \tag{10}$$

где ψ^*, ψ_c^* — векторы, определяющиеся из уравнений

$$\psi^* = \nu^* \overline{M}^{(p+1)} \psi^*, \quad \psi_c^* = \nu_c^* \overline{M}_c^{(p+1)} \psi_c^*, \tag{11}$$

$$\Delta\overline{M} = \overline{M}^{(p+1)} - \overline{M}, \quad \Delta\psi = \psi^* - \psi, \quad \Delta\nu = \nu^* - \nu,$$

M_c — матрица, сопряженная к M; p — количество итераций, проведенных по формуле (7).

Для этого умножим равенство

$$\Delta\nu\overline{M}^{(p+1)}\psi^* + \nu(\Delta\overline{M}\psi^* + \overline{M}\Delta\psi) = \Delta\psi$$

скалярно на ψ_c^*, после чего, учитывая (11), получим

$$\Delta\nu\left[1 + \frac{\nu^*(\Delta\overline{M}\Delta\psi, \psi_c^*) - (\Delta\psi, \psi_c^*) - \nu^*(\Delta\overline{M}\psi^*, \psi_c^*)}{(\psi^*, \psi_c^*)}\right] =$$

$$= \frac{\nu^{*2}}{(\psi^*, \psi_c^*)}[(\Delta\overline{M}\Delta\psi, \psi_c^*) - (\Delta\overline{M}\psi^*, \psi_c^*)], \tag{12}$$

откуда (10) следует при условии, что

$$|(\psi^*, \psi_c^*)| - \|\psi_c^*\|(|\nu^*|\|\Delta\psi\|\|\Delta\overline{M}\| + \|\Delta\psi\| + \|\Delta\overline{M}\||\nu^*|\|\psi^*\|) > 0. \tag{13}$$

Оценим погрешность собственного вектора ψ.

Пусть ранг матрицы $I - \nu\overline{M}$ для системы (8) равен $N + 1 - r = m$, т. е. ν — r-кратный корень. Тогда, как известно, можно определить m координат вектора ψ через остальные r, решая систему m алгебраических уравнений

$$C_0\psi_t = \nu b_t, \ \psi = \psi_t, \tag{14}$$

где

$$C_0 = I - \nu\overline{M}_1, \ \ \overline{M}_1 = \{M_i(x_k)\} \quad (i, k = \overline{0, m-1}),$$

$$b_t = \{\overline{M}_{m+t-1}(x_k)\} \quad (t = \overline{1, r}).$$

Из (14) при каждом t получаем

$$\psi_t = \{\psi_1^t, \psi_2^t, \ldots, \psi_m^t, \overbrace{\underbrace{0, \ldots, 0}_{t-1}, 1, 0, \ldots, 0}^{r}\}. \tag{15}$$

Вычитая почленно из уравнения (14) уравнение

$$C_0^*\psi_t^* = \nu^* b_t^*, \ C_0^* = I - \nu^*\overline{M}_1^{(p+1)}, \tag{16}$$

будем иметь

$$C_0^*\Delta\psi_t = \Delta\nu b_t^* - \Delta\nu\Delta b_t + \nu^*\Delta b_t - (\Delta\nu\overline{M}_1^{(p+1)} - \Delta\nu\overline{M}_1 + \nu^*\Delta\overline{M}_1)(\Delta\psi_t - \psi_t^*). \tag{17}$$

Пусть ν^* не является характеристическим числом для матрицы C_0^*, тогда из (17) можно найти

$$\Delta\psi_t = \Delta\nu(C_0^*)^{-1}(b_t^* - \Delta b_t - \overline{M}_1^{(p+1)}\Delta\psi_t + \Delta\overline{M}_1\Delta\psi_t + \overline{M}_1^{(p+1)}\psi_t^* -$$

$$- \Delta\overline{M}_1\psi_t^*) + \nu^*(C_0^*)^{-1}(\Delta b_t - \Delta\overline{M}_1\Delta\psi_t + \Delta\overline{M}_1\psi_t^*),$$

откуда при условии

$$1 - \|(C_0^*)^{-1}\|[|\Delta\nu|(\|\overline{M}_1^{(p+1)}\| + \|\Delta\overline{M}_1\|) + |\nu^*|\|\Delta\overline{M}_1\|] = \gamma > 0 \tag{18}$$

получаем

$$\|\Delta\psi_t\| = \|\Delta\psi\| \leqslant \gamma^{-1}\|(C_0^*)^{-1}\| \times$$

$$\times [\|b_t^*\||\Delta\nu| + (|\Delta\nu| + |\nu^*|)(\|\Delta b_t\| + \|\Delta\overline{M}_1\|\|\psi_t^*\|) + \tag{19}$$

$$+ |\Delta\nu|\|\overline{M}_1^{(p+1)}\|\|\psi_t^*\|].$$

Полагая $\| \psi_c^* \| = 1$, из неравенств (10) и (19) находим

$$| \Delta \nu | \leqslant 2 R_2 (R_1 + \sqrt{R_1^2 - 4R_2R_3})^{-1}, \tag{20}$$

$$\| \Delta \psi \| \leqslant 2B_2 (B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2B_3})^{-1}, \tag{21}$$

где

$$R_1 = cc_1 - b_1 d - aa_1 + bd_1, \quad R_2 = ab_1 + bc_1, \quad R_3 = cd_1 + a_1 d,$$

$$B_1 = cc_1 - bd_1 - a_1 a + b_1 d, \quad B_2 = a_1 b + b_1 c, \quad B_3 = c_1 d + ad_1,$$

$$a = b \| \psi_t^* \|^{-1} = | \nu^* |^2 \| \Delta \overline{M} \|, \quad c = | (\psi^*, \psi_c^*) | - | \nu^* | \| \Delta \overline{M} \| \| \psi_t^* \| ,$$

$$d = | \nu^* | \| \Delta \overline{M} \| + 1,$$

$$a_1 = \| (C_0^*)^{-1} \| [\| b_t^* \| + \| \Delta b_t \| + (\| \overline{M}_1^{(p+1)} \| + \| \Delta \overline{M}_1 \|) \| \psi_t^* \|],$$

$$b_1 = \| (C_0^*)^{-1} \| |\nu^* | (\| \Delta b_t \| + \| \Delta \overline{M}_1 \| \| \psi_t^* \|), \; c = 1 - \| (C_0^*)^{-1} \| \| \Delta \overline{M}_1 \| | \nu^* | ,$$

$$d_1 = \| (C_0^*)^{-1} \| (\| \overline{M}_1^{(p+1)} \| + \| \Delta \overline{M}_1 \|), \quad \| \psi_t^* \| \leqslant \| (C_0^*)^{-1} \| | \nu^* | \| b_t^* \| .$$

Оценки (20), (21) получены в предположении, что все постоянные R_i и B_i положительны ($i = \overline{1,3}$).

Анализируя апостериорные оценки (20), (21), приходим к выводу, что большему по абсолютной величине характеристическому числу ν отвечает большая погрешность, пропорциональная $|\nu|^2$; следовательно, с увеличением $|\nu|$ при заданной точности вычислений необходимо будет уменьшать погрешность ΔM.

Исходя из неравенств (10), (19) с учетом нормировки функций ψ_c^*, вместо оценок (20), (21) можно получить более слабые, но зато удобные для использования оценки

$$| \Delta \nu | \leqslant 2\overline{R}_2 \overline{R}_1^{-1}, \; \| \Delta \psi \| \leqslant 2\overline{B}_2 \overline{B}_1^{-1} , \tag{22}$$

где

$$\overline{R}_1 = \bar{c}\,\bar{c}_1 - \bar{b}_1 d - a\bar{a}_1 + b\bar{d}_1, \;\; R_2 = a\bar{b}_1 + \bar{b}\,\bar{c}_1,$$

$$B_1 = \bar{c}\,\bar{c}_1 - \bar{b}\,\bar{d}_1 - \bar{a}_1 a + \bar{b}_1 d, \quad B_2 = \bar{a}_1 \bar{b} + \bar{b}_1 \bar{c},$$

$$\bar{a}_1 = \| (C_0^*)^{-1} \| (\| \overline{M}^{(p+1)} \| + \| \Delta \overline{M} \|) \sigma, \quad \bar{b}_1 = \sigma | \nu^* | \| \Delta \overline{M} \| \| (C_0^*)^{-1} \| , \tag{23}$$

$$\bar{c}_1 = 1 - | \nu^* | \| \Delta \overline{M} \| \| (C_0^*)^{-1} \|, \quad \bar{d}_1 = \| (C_0^*)^{-1} \| (\| \overline{M}^{(p+1)} \| + \| \Delta \overline{M} \|),$$

$$\bar{b} = | \nu^* |^3 \| \overline{M}^{(p+1)} \| \| (C_0^*)^{-1} \| \| \Delta \overline{M} \| , \quad \bar{c} = | (\psi^*, \psi_c^*) | -$$

$$- | \nu^* |^2 \| (C_0^*)^{-1} \| \| \overline{M}^{(p+1)} \| \| \Delta \overline{M} \| , \quad \sigma = 1 + | \nu^* | \| (C_0^*)^{-1} \| \| \overline{M}^{(p+1)} \| .$$

При выводе этих оценок были использованы следующие неравенства:

$$\| \Delta \overline{M} \| \leqslant \| \Delta \overline{M} \| , \; \| b_t^* \| \leqslant \| \overline{M}^{(p+1)} \| , \;\; \| \Delta b_t \| \leqslant \| \Delta \overline{M} \| .$$

Отметим, что полученные оценки (20)—(22) не зависят от предложенного в предыдущем пункте метода и справедливы при достаточно малых погрешностях $\Delta \overline{M}$, если только $(\psi^*, \psi_c^*) \neq 0$.

Для получения оценки квадратурно-итерационного метода покажем справедливость следующего неравенства:

$$\sup_{|x| \leqslant \frac{1}{2}} | f(x) | \leqslant \sqrt{\oint_{|z|=1} | f(z) |^2 \, ds} = \| f \|_A, \tag{24}$$

где $f(z)$ — аналитическая функция $z = x + iy$ в круге $|z| < 1$.

Действительно, в силу аналитичности f можно записать неравенство

$$\sup_{|x|\leqslant\frac{1}{2}} |f(x)| = \sup_{|x|\leqslant\frac{1}{2}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{2^n} \leqslant 2\sup_{n\geqslant 0} |a_n|. \tag{25}$$

С другой стороны,

$$\sqrt{\oint_{|z|=1} |f(z)|^2\, ds} = \sqrt{\oint_{|z|=1} \left(\sum_{n,k=0} \mathrm{Re}\,(a_n a_k) \cos(n-k)\,\theta\right) ds} =$$

$$= \sqrt{2\pi \sum_{n=0} |a_n|^2} \geqslant \sqrt{2\pi}\, \sup_{n\geqslant 0} |a_n|, \quad \theta = \arg z. \tag{26}$$

Из сравнения (25) и (26) вытекает (24).

Таким образом, если под нормой $\|\overline{M} - \overline{M}^{(p+1)}\|$ понимать

$$\|\overline{M} - \overline{M}^{(p+1)}\| = \sup_{0\leqslant i\leqslant N} \sum_{k=0}^{N} |M_k(x_i) - M_k^{(p+1)}(x_i)|, \quad |x| \leqslant \frac{1}{2},$$

то с использованием (24) можно записать

$$\|\overline{M} - \overline{M}^{(p+1)}\| \leqslant \|M - M^{(p+1)}\| \leqslant \|M - M^{(p+1)}\|_A. \tag{27}$$

В свою очередь

$$\|M - M^{(p+1)}\|_A = \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \Omega^k \overline{K} \right\|_A \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \|\Omega\|^k \|\overline{K}\|_A =$$

$$= \|\Omega\|^{p+1} \|\overline{K}\|_A (1 - \|\Omega\|)^{-1}. \tag{28}$$

Из (22) и (28) видно, что при $p \to \infty$ $|\Delta\nu| \to 0$, $\|\Delta\psi\| \to 0$.

3°. Пример. Уравнение

$$\varphi(x) = \nu \int_0^1 (s + x\sqrt{s})\, \varphi(s)\, ds$$

имеет характеристические числа $\nu_1 = 1{,}0822$, $\nu_2 = -41{,}5822$. Нормированная собственная функция, отвечающая числу ν_1, $\varphi_1 = 0{,}5591\,x + 0{,}4401$.

Итерационный процесс (7') для данного уравнения с использованием формулы трапеций при $N = 1$

$$M_0^{(l+1)} \equiv 0,$$

$$M_1^{(l+1)}(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \nu \int_0^1 (s + x\sqrt{s})\, M_1^{(l)}\, ds - \frac{\nu}{2}(x+1)\, M_1^{(l)}(1)$$

в первом приближении дает

$$M_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(x+1).$$

Поэтому уравнения (9), (8) дадут первое приближение для ν и φ:

$$\nu_1^{(1)} = 1, \quad |\nu_1 - \nu_1^{(1)}| \leqslant 0{,}0822, \quad \varphi_1^{(1)} = \frac{1}{2}(x+1), \quad \|\varphi_1 - \varphi_1^{(1)}\| = 0{,}0599.$$

Во втором приближении получаем

$$M_1^{(2)}(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \nu\left(\frac{x}{30} - \frac{1}{12}\right).$$

Следовательно, из (9) и (8) можно найти

$$\nu_1^{(2)} = 1{,}0557, \quad |\nu_1 - \nu_1^{(2)}| \leqslant 0{,}0265,$$

$$\varphi_1^{(2)}(x) = 0{,}5650\,x + 0{,}4350, \quad \|\varphi_1 - \varphi_1^{(2)}\| = 0{,}0051.$$

В третьем приближении имеем

$$M_1^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(1 + x) + \nu\left(\frac{x}{30} - \frac{1}{12}\right) + \nu^2\left(-\frac{31}{1800}x - \frac{1}{180}\right)$$

и

$$\nu_1^{(3)} = 1{,}0884, \quad |\nu_1 - \nu_1^{(3)}| \leqslant 0{,}0062, \quad \varphi_1^{(3)}(x) = 0{,}5616\,x + 0{,}4384,$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_1^{(3)}\| = 0{,}0017.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Hämmerlin, Z. angew. Math. und Mech., 43, 15, 1963.
2. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, «Наукова думка», К., 1963.
3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М. — Л., 1963.

Поступила 13.I 1970 г.
Киевский государственный университет