УДК 517.54

О приближенном построении функции, отображающей круговую трехсвязную область на круг с разрезами

С. В. Гончаренко, В. И. Поряденная

1. Обозначим через K_n однолистную n-связную область z-плоскости, состоящую из внешности n кругов: $|z-a_k|\leqslant R_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, не имеющих общих точек, т. е. $|a_j-a_k|>R_j+R_k$, $j\neq k$, $\overline{K}_n$ — замыкание области K_n.

Л. Е. Дундученко [1] построил функцию $H(z; z_0)$, однолистно отображающую область K_n на круг $|w|<1$ с разрезами вдоль дуг концентрических окружностей $|w|=p_k<1$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, $p_n=1$, и с соответствием точек $w=0$ и $z=z_0$. Она имеет вид

$$H(z; z_0)=e^{B-A}\frac{z-z_0}{z-a_n}e^{\widetilde{f}(z)} \quad (H(z_0, z_0)=0),$$

где B, A — const,

$$\widetilde{f}(z)=B+\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=2}^{\infty}{}''\sum_{\substack{k_\nu=1\\(k_\nu\neq k)}}^{n}\cdots\sum_{\substack{k=1\\(k_1\neq k_2)}}^{n}\{\Phi_k([k_1,\ldots,k_\nu, z])-$$
$$-\Phi_k([k_1,\ldots,k_\nu,\infty])\}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\sum_{\substack{k_\nu=1\\(k_\nu\neq k)}}^{n}\cdots\sum_{\substack{k_1=1\\(k_1\neq k_2)}}^{n}\{\overline{\Phi}_k([k_1,\ldots,k_\nu, z])-\overline{\Phi}_k([k_1,\ldots,k_\nu,\infty])\}. \quad (1)$$

Знак ($''$) указывает на то, что $\nu = 2, 4, \ldots$, а ($'$) — на то, что $\nu = 1, 3, \ldots$.

Кроме того, использованы следующие обозначения:

1) при $\nu = 2, 4, \ldots$

$$[k_1, \ldots, k_\nu, z] = \bar{a}_{k_1} + \cfrac{R_{k_1}^2}{-a_{k_1} + a_{k_2} + \cfrac{R_{k_2}^2}{\bar{a}_{k_2} + \bar{a}_{k_3} + \cdots + \cfrac{R_{k_{\nu-1}}^2}{-\bar{a}_{k_{\nu-1}} + \bar{a}_{k_\nu} + \cfrac{R_{k_\nu}^2}{-a_{k_\nu} + z}}}}$$

2) при $\nu = 1, 3, \ldots$

$$[k_1, \ldots, k_\nu, z] = a_{k_1} + \cfrac{R_{k_1}^2}{-\bar{a}_{k_1} + \bar{a}_{k_2} + \cfrac{R_{k_2}^2}{-a_{k_2} + a_{k_3} + \cdots + \cfrac{R_{k_{\nu-1}}^2}{-\bar{a}_{k_{\nu-1}} + \bar{a}_{k_\nu} + \cfrac{R_{k_\nu}^2}{a_{k_\nu} + z}}}}$$

2. В работе [1] также указано, что, следуя методу построения функции $H(z; z_0)$, можно построить функцию $H(z; \infty)$, которая отображает область K_n на круг $|w| < 1$ с разрезами вдоль дуг концентрических окружностей $|w| = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $p_n = 1$, но с соответствием точек $z = \infty$ и $w = 0$, т. е. $H(\infty; \infty) = 0$.

В данной статье предлагается построение функции $H(z; \infty)$.

Предположим, что p_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, известны, и рассмотрим функцию

$$f(z) = \log [H(z; \infty)(z - a_n)]. \tag{2}$$

Эта функция регулярна, однозначна в K_n, так как при обходе граничных окружностей Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, ее мнимая часть получает нулевые приращения. Она ограничена и непрерывна в $\overline{K}_n$. Это следует из свойств функции $H(z; \infty)$ и разложения ее в окрестности точки $z = \infty$:

$$H(z; \infty) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$$

Нормируем эту функцию условием $b_1 > 0$.

Представим $f(z)$, пользуясь теоремой Коши, в виде

$$f(z) = C + \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(z), \tag{3}$$

где $\varphi_m(z) = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_m} \dfrac{f(t)}{t - z} dt$, $z \in K_n$, $\varphi_m(\infty) = 0$, а точка t движется по Γ_m против часовой стрелки.

Функцию $\varphi_m(z)$ найдем в виде функционального ряда, используя результаты [2]

$$\varphi_m(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu, m}(z), \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

члены которого определяются из рекуррентных соотношений:

$$\varphi_{0,m}(z) = \Phi_m(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \frac{2\mathrm{Re}\, f(t)}{t-z}\,dt,$$
$$\varphi_{\nu+1,m}(z) = -\sum_{\substack{k \neq 1 \\ (k \neq m)}}^{n} \left[\overline{\varphi}_{\nu,k}\left(\overline{a}_m + \frac{R_m^2}{z-a_m}\right) - \overline{\varphi}_{\nu,k}(\overline{a}_m)\right]. \tag{5}$$

В нашем случае

$$\Phi_m(z) = \begin{cases} \log\left[1 + \dfrac{R_m^2}{(\overline{a}_m - \overline{a}_n)(z-a_m)}\right], & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Функция $f(z)$ определяется с помощью формул (3)—(5). Она будет иметь не менее сложный вид, чем функция $\widetilde{f}(z)$ (1). Поэтому возникает необходимость, в особенности для практического использования этого отображения, в приближенном построении функции $f(z)$, следовательно, и функции $H(z; \infty)$, с наперед заданной точностью, например, с точностью до 0,003. Отметим, что сложность $f(z)$ зависит от порядка связности области K_n—чем выше порядок связности, тем сложнее функция. Ограничимся рассмотрением трехсвязной области.

3. Итак, рассмотрим трехсвязную область K_3. Обозначим расстояния между граничными окружностями $\Gamma_k : |z-a_k| = R_k$, $k = 1, 2, 3$, через l_1, l_2, l_3. Пусть $l = \min\{l_1, l_2, l_3\}$, а $R = \max\{R_1, R_2, R_3\}$. В дальнейшем рассматриваем только такие области K_3, для которых

$$l \geqslant 18R. \tag{6}$$

Из формул (3) и (4) для $n = 3$ следует, что

$$f(z) = C + \sum_{m=1}^{3}\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu,m}(z). \tag{7}$$

Для определения $f(z)$ с заданной точностью в ряде $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu,m}(z)$ можно ограничиться двумя слагаемыми: $\nu = 0, 1$. Действительно, следуя [2], имеем

$$|\varphi'_{\nu,m}(z)| \leqslant \frac{2R_m^2 M}{|z-a_m|^2} L, \quad m = 1, 2, 3; \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

В нашем случае $M = \dfrac{1}{l}$; $L = \dfrac{2R^2}{(R+l)^2} < 1$. Отсюда

$$|\varphi_{\nu,m}(z)| \leqslant \left|\int\limits_{\infty}^{z} \varphi_{\nu,m}(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{z}^{\infty} |\varphi'_{\nu,m}(z)|\,|dz| \leqslant MRL^{\nu-1},$$
$$m = 1, 2, 3; \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

а

$$\left|\sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi_{\nu,m}(z)\right| \leqslant \frac{2\pi R^3}{l(l^2 + 2Rl - R^2)} < 0{,}001.$$

Следовательно, из (7)

$$f(z) = C + \sum_{m=1}^{3} [\varphi_{0,m}(z) + \varphi_{1,m}(z)]. \tag{8}$$

Функции $\varphi_{0,m}(z)$ и $\varphi_{1,m}(z)$ найдем из рекуррентных соотношений (5):

$$\varphi_{0,m} = \log\left[1 + \frac{R_m^2}{(\bar{a}_m - \bar{a}_3)(z - a_m)}\right], \quad m = 1,\ 2;$$

$$\varphi_{0,3} = 0;$$

$$\varphi_{1,m} = \sum_{\substack{1=k\\(k\neq m)}}^{2} \log \frac{1 + \dfrac{R_k^2}{(a_k - a_3)(\bar{a}_m - \bar{a}_k)}}{1 + \dfrac{R_k^2}{(a_k - a_3)\left(\bar{a}_m - \bar{a}_k + \dfrac{R_m^2}{z - a_m}\right)}}, \quad m = 1,\ 2,\ 3. \tag{9}$$

Так как $H(z;\infty) \Rightarrow \dfrac{e}{z - a_3}$, то

$$H(z;\infty) = \frac{e^C}{z - a_3} \prod \left[1 + \frac{R_m^2}{(\bar{a}_m - \bar{a}_3)(z - a_m)}\right] \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{3} \prod_{\substack{k=1\\(k\neq m)}}^{2} \frac{1 + \dfrac{R_k^2}{(\bar{a}_k - \bar{a}_3)(\bar{a}_m - \bar{a}_k)}}{1 + \dfrac{R_k^2}{(\bar{a}_k - \bar{a}_3)\left(\bar{a}_m - \bar{a}_k + \dfrac{R_m^2}{z - a_m}\right)}}. \tag{10}$$

Постоянные p_1, p_2 и $C = \log b_1$ определяются из системы

$$\log p_m = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq m)}}^{3} \operatorname{Re} \varphi_k(a_m) + \log \frac{b_1}{|a_m - a_3|}, \quad m = 1,\ 2,$$

$$\log b_1 = -\sum_{k=1}^{2} \operatorname{Re} \varphi_k(a_3) + \log R_3. \tag{11}$$

Раскладывая в ряды множители в (10) и учитывая, что при ограничении (6) будет

$$\left|\frac{R_m^2}{(\bar{a}_m - \bar{a}_3)(z - a_m)}\right| \leqslant \frac{R}{R + l} < \frac{1}{19};$$

$$\left|\frac{R_k^2}{(a_k - a_3)(\bar{a}_m - \bar{a}_k)}\right| \leqslant \frac{R^2}{(R + l)^2} < \frac{1}{19^2},$$

можно, сохраняя заданную точность, упростить функцию $H(z;\infty)$.

Окончательно, с точностью до 0,003,

$$H(z;\infty) = \frac{R_1 R_3}{|a_1 - a_3|^2} \frac{R_1}{z - a_1} + \frac{R_2 R_3}{|a_2 - a_3|^2} \frac{R_2}{z - a_2} + \frac{R_3}{z - a_3}, \tag{12}$$

а радиусы круговых разрезов равны:

$$p_1 = \frac{R_3}{|a_1 - a_3|}; \quad p_2 = \frac{R_3}{|a_2 - a_3|}; \quad p_3 = 1. \tag{13}$$

4. Существенным для дальнейшего использования этой функции в построении приближенной формулы Шварца — Кристоффеля для трехсвязной области является определение параметров круговых разрезов. Обозначим через $w_k^{(1)} = u_k^{(1)} + iv_k^{(1)}$ и $w_k^{(2)} = u_k^{(2)} + iv_k^{(2)}$ концы дуги $\gamma_k : |w| = p_k$, $k = 1, 2$. Используя свойство однозначности и непрерывности в $\overline{K_n}$ функции $w \equiv H(z; \infty)$, можно показать, что

$$u_k = \frac{c_{0k} + c_{1k}\cos\varphi_k + c_{2k}\cos 2\varphi_k}{c_{4k} + c_{5k}\cos\varphi_k}, \quad v_k = -\frac{c_{3k} + c_{1k}\sin\varphi_k + c_{2k}\sin 2\varphi_k}{c_{4k} + c_{5k}\cos\varphi_k},$$

$$c_{0k} = R_3 |a_k - a_3| (R_k^2 + (\alpha_k - \alpha_3)|a_k - a_3|), \quad c_{1k} = R_k R_3 [R_k^2 + 2|a_k - a_3|^2],$$

$$c_{2k} = R_k^2 R_3 |a_k - a_3|, \quad c_{3k} = R_3 (\beta_k - \beta_3)|a_k - a_3|^2, \quad c_{4k} = |a_k - a_3|^4 + R_2,$$

$$c_{5k} = 2R_k |a_k - a_3|^2; \quad a_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \quad a_3 = \alpha_3 + i\beta_3.$$

Постоянные φ_k, $k = 1, 2$, являются корнями уравнения

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_3 \sin\varphi + A_4 \sin 2\varphi = 0,$$

где

$$A_0 = R_k^2 R_3^2 (R_k^4 + 6R_k^2 |a_k - a_3|^2 + 4|a_k - a_3|^4),$$

$$A_1 = R_k R_3^2 |a_k - a_3| [4R_k^2 + (\alpha_k - \alpha_3)|a_k - a_3|] (R_k^2 + 2|a_k - a_3|),$$

$$A_2 = 2R_k^2 R_3^2 |a_k - a_3|^2 [R_k^2 + (\alpha_k - \alpha_3)|a_k - a_3|],$$

$$A_3 = R_k R_3^2 (\beta_k - \beta_3)|a_k - a_3|^3 (R_k^2 + 2|a_k - a_3|^2),$$

$$A_4 = 2R_k^2 R_3^2 (\beta_k - \beta_3)|a_k - a_3|^3, \quad k = 1, 2.$$

Заметим, что условие $b_1 > 0$ можно опустить. Это будет означать, что функция $H(z; \infty)$ определяется с точностью до вращения.

5. Пример. Приведем приближенное, с точностью до 0,003, выражение для функции $w = H(z; \infty)$, отображающей внешности окружностей $\Gamma_1 : |z - 20| = 1$, $\Gamma_2 : |z + 20| = 1$ и $\Gamma_3 : |z| = 1$ на круг $|w| < 1$ с разрезами по дугам окружностей $|w| = p_1 < 1$ и $|w| = p_2 < 1$, так, чтобы окружность $\Gamma_3 : |z| = 1$ перешла в окружность $|w| = 1$, а точке $z = \infty$ соответствовала точка $w = 0$.

Используя изложенное выше, по формуле (12) получаем $w = \frac{1}{200} \times \frac{z}{z^2 - 400} + \frac{1}{z}$, а $p_1 = p_2 = \frac{1}{20}$.

Крайние точки дуги $\gamma_1 : |w| = p_1$ будут: $w_1^{(1)} = 0{,}050 + i0{,}005$, $w_1^{(2)} = 0{,}050 - i0{,}005$. Для дуги $\gamma_2 : |w| = p_2$ получим $w_2^{(1)} = -0{,}050 + i0{,}005$, $w_2^{(2)} = -0{,}050 - i0{,}005$.

Замечание 1. Аналогичный результат может быть получен в общем виде путем введения наперед заданной погрешности δ. Уменьшение δ при сохранении конфигурации области требует увеличения числа первых членов ряда

$$\varphi_m(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu,m}(z), \quad m = 1, 2, 3.$$

Поэтому, если задаться целью сохранения только двух первых членов этого ряда ($\nu = 0{,}1$) с тем, чтобы приближенная отображающая функция оставалась достаточно простой, то это естественно скажется на изменении параметров области, которые будут определяться соотношением: $l > \left[z_1(\delta) - \frac{2}{3}\right] R$,

где $z_1(\delta)$ — положительный корень уравнения

$$z^3 - \frac{7}{3} z + \frac{34}{27} - \frac{6\pi}{\delta} = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно указать приближенную отображающую функцию при заданной погрешности δ и для произвольных трехсвязных круговых областей, подчиненных только условию $r < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = \max\left(\frac{R_m}{\varrho_m}\right)$, где ϱ_m — расстояние от a_m до ближайшей из соседних окружностей Γ_j, $j \neq m$, $j = 1, 2, 3$. Формулы, естественно, будут более громоздкими за счет добавления последующих членов ряда, количество которых может быть точно указано в зависимости от величины погрешности δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Е. Дундученко, Метод структурных формул в теории специальных классов аналитических функций, Автореферат докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, К., 1968.
2. Г. М. Голузин, Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями, Матем. сб., т. 41, № 2, 1934.

Поступила 8.VII 1970 г.,
после переработки — 9.XII 1970 г.
Киев