УДК 517.948.33

О существовании решений нелинейных краевых задач пологих оболочек вращения

Л. Д. Гординский

В данной работе рассматривается вопрос о существовании обобщенных решений в задаче о больших прогибах осесимметрично деформированных пологих оболочек вращения. Для жесткого опирания контура — $w(\alpha) = w(1) = 0$ — эта задача приводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho\Theta) = \beta\left[k^2(\varrho) + \Theta\right]\left(\frac{du}{d\varrho} + \frac{\nu}{\varrho}u + k^2(\varrho)\Theta + \frac{1}{2}\Theta^2\right) + \frac{1}{\varrho}f(\varrho), \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho\Theta) = -\left[\frac{1-\nu}{\varrho} + \frac{d}{d\varrho}\right]\left[\Theta\left(k^2(\varrho) + \frac{1}{2}\Theta\right)\right] = -f(\varrho, \Theta), \quad (2)$$

$$\alpha \leqslant \varrho \leqslant 1,$$

при нелинейных краевых условиях

$$\frac{d\Theta(\alpha)}{d\varrho} + \frac{\nu}{\alpha}\Theta(\alpha) = m_\alpha, \quad \frac{d\Theta(1)}{d\varrho} + \nu\Theta(1) = m_1, \quad (3)$$

$$\frac{du(\alpha)}{d\varrho} + \frac{\nu}{\alpha}u(\alpha) = n_\alpha - \frac{\Theta^2(\alpha)}{2} - k^2(\alpha)\Theta(\alpha),$$

$$\frac{du(1)}{d\varrho} + \nu u(1) = n_1 - \frac{\Theta^2(1)}{2} - k^2(1)\Theta(1). \quad (4)$$

Все величины, входящие в уравнения (1)—(4), безразмерные [1]. С помощью функции Грина $K(\varrho, x)$ [1, 2] краевая задача (1)—(4) приводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения относительно угла поворота $\Theta(\varrho)$:

$$\Theta(\varrho) = \int_{\alpha}^{1} K(\varrho, x) F[x, \Theta(x)]\, x dx + \Theta_0(\varrho), \tag{5}$$

где

$$F(\varrho, \Theta(\varrho)) = -\frac{12a^2}{h^2}[k^2(\varrho) + \Theta(\varrho)]\left[\frac{du(\Theta)}{d\varrho} + \frac{\nu}{\varrho} u(\Theta) + k^2(\varrho)\Theta + \frac{\Theta^2}{2}\right] + \frac{1}{\varrho} f(\varrho), \tag{6}$$

$$\Theta_0(\varrho) = m_1 K(\varrho, 1) - m_\alpha K(\varrho, \alpha).$$

Введем гильбертово пространство H с помощью замыкания множества достаточно гладких функций $\{\Theta\}$ в норме

$$\|\Theta\|_H^2 = \int_{\alpha}^{1}\left[\left(\frac{d\Theta}{d\varrho}\right)^2 + 2\frac{\nu}{\varrho}\Theta\frac{d\Theta}{d\varrho} + \frac{\Theta^2}{\varrho^2}\right]\varrho d\varrho. \tag{7}$$

Под обобщенным решением нашей задачи будем понимать функцию $\Theta \in H$, удовлетворяющую интегро-дифференциальному уравнению (5).

То что классическое решение есть обобщенное в этом смысле решение, проверяется легко. Верно и обратное: если $\Theta \in H$ является обобщенным решением и обладает непрерывными вторыми производными, то оно является классическим решением. Рассматривая обобщенные решения, будем считать, что $f(\varrho)$, $k^2(\varrho)$, $\dfrac{dk^2(\varrho)}{d\varrho} \in L_{2,\varrho}[\alpha, 1]$.

Для доказательства существования решения $\Theta \in H$ уравнения (5) применим метод, используемый в работах [1, 3, 4]. Одновременно с (5) рассмотрим уравнение с вырожденным ядром $K_n(\varrho, x)$

$$\Theta_n(\varrho) = \int_{\alpha}^{1} K_n(\varrho, x) F[x, \Theta_n(x)]\, x dx + \Theta_{0n}(\varrho). \tag{8}$$

Очевидно, что решение уравнения (8), если оно существует, может быть записано в виде

$$\Theta_n(\varrho) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\varphi_k(\varrho), \tag{9}$$

где $\varphi_k(\varrho)$ — собственные функции ядра $K(\varrho, x)$, а коэффициенты c_{nk} определяются из алгебраической системы уравнений

$$c_{nk} = \frac{1}{\lambda_k}\left\{\int_{\alpha}^{1} F\left[x, \sum_{l=1}^{n} c_{nl}\varphi_l(x)\right]\varphi_k(x)\, x dx + m_1\varphi_k(1) - m_\alpha\varphi_k(\alpha)\right\}, \tag{10}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что система (10) допускает по крайней мере одно действительное решение на каждом этапе $k = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что система (10) совпадает с системой Ритца для функционала полной потенциальной энергии оболочки

$$I(\Theta) = \int_{\alpha}^{1}\left\{\left[\left(\frac{d\Theta}{d\varrho}\right)^2 + 2\frac{\nu}{\varrho}\Theta\frac{d\Theta}{d\varrho} + \frac{\Theta^2}{\varrho^2}\right] + \beta\left[\varepsilon_\varrho^2(\Theta) + 2\nu\varepsilon_\varrho(\Theta)\varepsilon_t(\Theta) + \varepsilon_t^2(\Theta)\right] + 2\frac{1}{\varrho}\Theta f(\varrho)\right\}\varrho d\varrho - 2[m_1\Theta(1) - \alpha m_\alpha\Theta(\alpha)], \tag{11}$$

если в качестве координатных функций в методе Ритца выбрать собственные функции ядра $K(\varrho, x)$.

В силу неравенств

$$\|\Theta\|^2_{L_2,\frac{1}{\varrho}} \leqslant \varkappa_1 \|\Theta\|^2_H, \quad \Theta^2(\varrho)\big|_\alpha^1 \leqslant \varkappa_2 \|\Theta\|^2_H, \quad x_1 > 0, \quad \varkappa_2 > 0, \tag{12}$$

и положительной определенности квадратичной формы деформаций $\varepsilon_\varrho^2(\Theta) + 2\nu\varepsilon_\varrho(\Theta)\varepsilon_t(\Theta) + \varepsilon_t^2(\Theta) \geqslant 0$ для функционала (11) получаем неравенство

$$I(\Theta) \geqslant \varkappa(\varepsilon_1)\|\Theta\|^2_H - \varepsilon_1 \|f\|^2_{L_{2,\varrho}} - M, \tag{13}$$

где $\varkappa(\varepsilon_1)$ может быть сделано положительным с помощью выбора произвольной положительной постоянной ε_1, $M = m_1^2 + \alpha^2 m_\alpha^2$. Опустив в (13) справа первый член, имеем

$$I(\Theta) \geqslant -M - \varepsilon\|f\|^2_{L_{2,\varrho}} = -C \tag{14}$$

при любом $\Theta \in H$. Отсюда вытекает, что $I(\Theta)$ имеет точную нижнюю грань $-C$, а значит, система (10) разрешима [5]. Аналогично [1, 3], можно установить оценки

$$\|\Theta_n\|^2_H \leqslant p, \quad \|N_{\varrho n}\|^2_{L_{2,\varrho}} \leqslant p_1, \quad \|N_{tn}\|^2_{L_{2,\varrho}} \leqslant p_2, \quad \|F(\varrho, \Theta_n(\varrho))\|_{L_{1,\varrho}} \leqslant p_3 \tag{15}$$

равномерно относительно n.

Покажем, что полученная последовательность $\{\Theta_n\}$ сильно компактна в H. Для этого рассмотрим вспомогательную последовательность

$$\overline{\Theta}_n(\varrho) = \int_\alpha^1 K(\varrho, x) F[x, \Theta_n(x)]\, x dx + \Theta_0(\varrho) = \overline{\Theta}_n'(\varrho) + \Theta_0(\varrho). \tag{16}$$

Покажем, что $\{\overline{\Theta}_n\}$ сильно компактна в H. Для этого достаточно рассмотреть компактность в H последовательности $\{\overline{\Theta}_n'\}$. Последовательность $\{\overline{\Theta}_n'\}$ равномерно ограничена по норме в H.

Действительно,

$$\|\overline{\Theta}_n'\|^2_H = \int_\alpha^1\int_\alpha^1\int_\alpha^1 \left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho, x_1))\,\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho, x_2))\right] F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n) \times$$

$$\times\, x_1 x_2 \varrho dx_1 dx_2 d\varrho - (1-\nu) \times$$

$$\times \left| \int_\alpha^1\int_\alpha^1 K(\varrho, x_1) K(\varrho, x_2) F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n)\, x_1 x_2 dx_1 dx_2 \right]_{\varrho=\alpha}^{\varrho=1} =$$

$$= \int_\alpha^1\int_\alpha^1 K(x_1, x_2) F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n)\, x_1 x_2 dx_1 dx_2 \leqslant |K|_{\max} p_3^2. \tag{17}$$

Покажем теперь равностепенную непрерывность $\{\overline{\Theta}_n'\}$ по норме в H:

$$\|\overline{\Theta}_n'(\varrho + h) - \overline{\Theta}_n'(\varrho)\|^2_H = \int_\alpha^1\int_\alpha^1\int_\alpha^1 \left\{\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho + h, x_1)) - \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho, x_1))\right] \times\right.$$

$$\times \left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho + h, x_2)) - \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho K(\varrho, x_2))\right] F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n) \times$$

$$\times\, x_1 x_2 \varrho dx_1 dx_2 d\varrho - (1-\nu) \times$$

$$\times \left[\int\limits_{\alpha}^{1}\int\limits_{\alpha}^{1} [K(\varrho+h, x_1) - K(\varrho, x_1)]\,[K(\varrho+h, x_2) - K(\varrho, x_2)] \times \right.$$

$$\left. \times F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n)\, x_1 x_2 dx_1 dx_2 \right]_{\varrho=\alpha}^{\varrho=1} = \int\limits_{\alpha}^{1}\int\limits_{\alpha}^{1} G(x_1, x_2, h)\, (F(x_1, \Theta_n) F(x_2, \Theta_n) \times$$

$$\times x_1 x_2 dx_1 dx_2, \tag{18}$$

где

$$G(x_1, x_2, h) = \begin{cases} 2K(x_1, x_2) - K(x_1 - h, x_2) - K(x_1 + h, x_2), & x_1 \in S = (\alpha + h, 1], \\ K(x_1, x_2) - K(x_1 + h, x_2), & x_1 \in [\alpha, 1] \setminus S. \end{cases} \tag{19}$$

В силу непрерывности функции Грина $K(\varrho, x)$ функция $G(x_1, x_2, h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда из (18) следует равностепенная непрерывность $\{\overline{\Theta}_n'\}$ в H.

Из компактности $\{\overline{\Theta}_n'\}$ в H вытекает компактность $\{\overline{\Theta}_n\}$ в H. Тогда из $\{\overline{\Theta}_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{\overline{\Theta}_n\}$.

Рассмотрим последовательность $\{\Theta_n\}$, соответствующую выделенной последовательности.

В силу способа определения Θ_n имеем:

$$\Theta_n(\varrho) = \int\limits_{\alpha}^{1} K_n(\varrho, x) F(x, \Theta_n)\, x dx + m_1 K_n(\varrho, 1) - m_\alpha K_n(\varrho, \alpha). \tag{20}$$

Вычитая (20) из (16), получаем:

$$\psi_n = \overline{\Theta}_n(\varrho) - \Theta_n(\varrho) = \int\limits_{\alpha}^{1} R_n(\varrho, x) F(x, \Theta_n)\, x dx + m_1 R_n(\varrho, 1) - m_\alpha R_n(\varrho, \alpha),$$

где

$$R_n(\varrho, x) = K(\varrho, x) - K_n(\varrho, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\varrho)\,\varphi_k(x)}{\lambda_k}.$$

Так как ядро $K(\varrho, x)$ положительно определенное и непрерывное, то в силу теоремы Мерсера $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что

$$\|\psi_n\|_H \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из полноты пространства H и теорем о вложении функциональных пространств следует, что существует функция $\Theta(\varrho)$, обладающая обобщенными производными, и такая, что $\Theta_n \to \Theta$ равномерно, $\frac{d\Theta_n}{d\varrho} \to \frac{d\Theta}{d\varrho}$ по норме в $L_{2,\varrho}[\alpha, 1]$.

В силу этого, а также в силу непрерывности и ограниченности ядра $K(\varrho, x)$, заключаем, что последовательность

$$u_n(\varrho) = \int\limits_{\alpha}^{1} K(\varrho, x) f(x, \Theta_n)\, x dx + u_{0n}(\varrho), \tag{21}$$

где

$$u_{0n}(\varrho) = n_1 K(\varrho, 1) - n_\alpha K(\varrho, \alpha) -$$

$$- \left[\frac{\Theta_n^2(1)}{2} + k^2(1)\,\Theta_n(1)\right] K(\varrho, 1) + \left[\frac{\Theta_a^2(\alpha)}{2} + k^2(\alpha)\,\Theta_n(\alpha)\right] K(\varrho, \alpha)$$

сходится равномерно, а последовательность $\frac{du_n}{d\varrho}$ в среднем с весом ϱ.

Докажем теперь, что каждая предельная точка Θ последовательности Θ_n является решением интегро-дифференциального уравнения (5), откуда будет следовать существование обычной производной $\frac{d\Theta}{d\varrho}$.

Составим разность

$$d = \Theta - \int_{\alpha}^{1} K(\varrho, x) F(x, \Theta(x)) x dx - \Theta_0(\varrho). \tag{22}$$

Далее

$$d = \overline{\Theta}_n - \Theta + \int_{\alpha}^{1} K(\varrho, x) [F(x, \Theta) - F(x, \Theta_n)] x dx.$$

Отсюда

$$|d| \leqslant |\overline{\Theta}_n - \Theta| + \int_{\alpha}^{1} |K(\varrho, x) [F(x, \Theta) - F(x, \Theta_n)]| x dx. \tag{23}$$

Используя неравенство Буняковского—Шварца, а также учитывая равномерную сходимость Θ_n к Θ, сходимость в среднем с весом ϱ последовательности $\frac{d\Theta_n}{p\varrho}$ к $\frac{d\Theta}{d\varrho}$, непрерывность ядра $K(\varrho, x)$, интегрируемость $k^2(\varrho)$ с весом ϱ, из (23) заключаем, что d не может отличаться от нуля, что и доказывает наше утверждение.

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если* $f(\varrho)$, $k^2(\varrho)$, $\frac{dk^2(\varrho)}{d\varrho} \in L_{2,\varrho}[\alpha, 1]$, *то нелинейная краевая задача* (1)—(4) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Березовский, Л. Д. Гординский, О существовании решений нелинейных краевых задач осесимметрично деформированных пологих оболочек вращения, Математическая физика и нелинейные колебания, Тр. семинара, вып. 5, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.
2. А. А. Березовский, Нелинейные интегральные уравнения пологих оболочек вращения, Инженерный журнал, т. 1, вып. 4, М., 1961.
3. И. И. Ворович, О существовании решений в нелинейной теории оболочек, Изв. АН СССР, т. 4, № 19, 1955.
4. Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960.
5. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.

Поступила 4. I 1971 г.

Институт математики АН УССР