УДК 621.391.519.27

Об одном классе ортогональных многочленов от многих переменных

А. Н. Деменин

Важным средством решения многих задач теории случайных процессов являются системы ортогональных многочленов, зависящих от многих переменных. В настоящее время хорошо изучены многомерные полиномы Эрмита [1]. Исследования гауссовских мер в функциональных пространствах привели к построению системы функциональных полиномов Эрмита [2], основные свойства которых рассматривались в работе [3].

Построение новых классов ортогональных многочленов, зависящих от многих переменных, является, пожалуй, важной задачей, тесно связанной с введением новых вероятностных мер в теории случайных процессов.

Положим в равенстве (15) $x_k=0,\ k=1,\ldots,n$. Используя предельное выражение, аналогичное (20), имеем

$$\varphi_A(0,z)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{\sum\limits_{ks=1}^{n} a_{ks}x_kz_s} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{24}$$

где

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k},\qquad x\in X_n. \tag{25}$$

По аналогии с теорией одномерных полиномов Лагерра [4], функция $f(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n)$ может быть названа «весовой функцией» для системы ортогональных многочленов Лагерра, зависящих от многих переменных.

Сформулируем важное свойство, связанное с ортогональностью многомерных полиномов Лагерра.

Теорема 5. *Пусть* $L_A^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_p})$ и $L_B^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{r_1},\ldots,x_{r_q})$, $p,\ q\leqslant n$, — *многомерные полиномы Лагерра, а* $f(x_1,\ldots,x_n)$ — *весовая функция, заданная соотношением* (25). *Тогда*

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty L_A^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_p})\,L_B^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{r_1},\ldots,x_{r_q})\times$$

$$\times f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n=\begin{cases} S\left\{\prod\limits_{s=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{j_sk}L_{(k)}^{(\alpha_k-1)}(0)\,b_{kr_s}\right\}, & p=q,\\ 0, & p\neq q.\end{cases} \tag{26}$$

Здесь $L_{(k)}^{(\alpha_k-1)}(\cdots)$ — одномерные полиномы Лагерра порядка k, введенные в соответствии с (6), а S — оператор симметризации.

Иными словами, применение оператора S к функции, заключенной в фигурные скобки, приводит к суммированию слагаемых, полученных из этой функции с помощью всех возможных перестановок по индексу r_s, $s=1,\ldots,p$. Число таких перестановок равно $p!$

Доказательство. Введем обозначение

$$T_{pq}=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty L_A^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_p})\,L_B^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_{r_1},\ldots,x_{r_q})\times$$

$$\times f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n. \tag{27}$$

Используя представления многомерных полиномов Лагерра через производящие функции $\varphi_A(x,z)$ и $\varphi_B(x,z)$, имеем

$$T_{pq}=\frac{d^{p+q}}{\partial z_{j_1},\ldots,\partial z_{j_p}\partial v_{r_1},\ldots,\partial v_{r_q}}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\varphi_A(x,z)\,\varphi_B(x,v)\times$$

$$\times f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n\big|_{z=v=0}. \tag{28}$$

Отсюда

$$T_{pq}=\frac{d^q}{\partial v_{r_1},\ldots,\partial v_{r_q}}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\prod_{s=1}^{p}\sum_{m=1}^{n}y_{j_sm}(x)\,f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n\big|_{v=0}, \tag{29}$$

где

$$y_{j_s m}(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k a_{kj_s} b_{km}, \tag{30}$$

a_{kj_s} и b_{km}, соответственно, элементы симметрических матриц A и B.

Из выражения (29) следует, что при $p \neq q$ $T_{pq}=0$.

Рассмотрим случай, когда $p=q$. Легко видеть, что

$$T_{pq}=S\left\{\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} y_{j_1 r_1}(x),\ldots,y_{j_p r_p}(x) f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n\right\}. \tag{31}$$

Используя выражение для $y_{j_s r_s}(x)$, $s=1,\ldots,p$, (30) и вычисляя кратный интеграл в правой части (31), имеем

$$T_{pp}=S\left\{\prod_{s=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{j_s k} L_{(k)}^{(\alpha_k-1)}(0)\, b_{kr_s}\right\}, \tag{32}$$

откуда следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, «Наука», М., 1966.
2. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
3. А. Н. Деменин, О некоторых свойствах функциональных полиномов Эрмита., УМЖ, т. 21, № 3, 1969.
4. Д. С. Кузнецов, Специальные функции, «Высшая школа», М., 1965.
5. D. Vere-Jones, The infinite divisibility of a bivariate gamma distribution, Sankhyā, Ser. A, 29, 1967.

Поступила 10.II 1970 г.

Институт математики АН УССР