УДК 517.54

Об одном свойстве ядерных функций формулы Шварца для конечносвязной круговой области

Л. Е. Дундученко

В работе [1] построена формула Шварца для n-связной ($n \geqslant 3$) круговой области K_n, представляющей собою всю z-плоскость, из которой удалено n кругов:

$$|z - a_i| \leqslant R_i; \qquad |a_i - a_k| > R_i + R_k, \qquad i \neq k; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ядерными функциями этой формулы являются функции вида [1]:

$$w = F_i(z; \zeta_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\zeta_i \in \Gamma_i$, а Γ_i — граничная окружность $|z - a_i| = R_i$.

Многие свойства этих функций уже известны [1, 2], построены их разложения в функциональные ряды, сходящиеся абсолютно и равномерно на любом компактном множестве из K_n [2]. Так, например, известно, что функции (1) однолистно отображают K_n на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ с конечными и прямолинейными разрезами, параллельными мнимой оси. Точка $z = \zeta_i$ является простым полюсом функции (1) и в ее окрестности эта функция имеет разложение [1]:

$$F_i(z;\zeta_i) \equiv \frac{z+\zeta_i-2a_i}{z-\zeta_i} + \psi_i(z;\zeta_i),$$

где $\psi_i(z;\zeta_i)$ — однозначная функция, регулярная в кольце: $R_i - \delta \leqslant |z - a_i| \leqslant R_i + \delta$, $\delta > 0$, принимающая чисто мнимые значения в точках окружности $\Gamma_i: |z-a_i| = R_i$, причем $\psi_i(\zeta_i;\zeta_i) = 0$, а δ — достаточно малое число.

Существует предположение, что абсциссы граничных разрезов отображения (1), т. е. величины

$$l_{ik} \equiv \operatorname{Re} F_i(\zeta_k;\zeta_i), \qquad i \neq k; \qquad k = 1, \ldots, n \; (l_{ii} \equiv 0),$$

изменяются, если точка ζ_i пробегает окружность Γ_i, и являются функциями переменной $\varphi = \arg(\zeta_i - a_i)$ на интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (заметим, что при $n = 2$ этого не будет, так как $l \equiv \text{const}$ в этом случае [3]).

Целью данной заметки является аналитическое подтверждение этого факта, который мы коротко назовем гипотезой A, для целого класса круговых n-связных областей ($n \geqslant 3$).

Теорема. *Пусть K_n — такая круговая область ($n \geqslant 3$), у которой радиусы граничных окружностей R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, не превосходят величины ϱ, где*

$$0 < \varrho \leqslant 2\sqrt[3]{\frac{\alpha}{a}} \left(< \frac{1}{\sqrt{n-1}-1} \right)^{*}; \tag{2}$$

$$(1+\varrho)^3 < d = \min_{(k \neq i)} |a_k - a_i|; \qquad \alpha = 1 - \theta; \qquad a = 2(n-1)(n-\theta);$$

$$0 < \theta_0 \leqslant \theta = \text{const} < 1; \qquad \theta_0 > \frac{(4n+1)^2}{4n(4n-1)(4n+3)}.$$

Тогда имеет место гипотеза A.

Доказательство. Чтобы не загромождать ход доказательства довольно обширными выкладками, приведем его для частного случая $R_k = \varrho$ и $\operatorname{Im} a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, так что можно положить $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Доказательство в общем случае проходит совершенно аналогично, но усложняется весьма громоздкими (хотя и несложными) выкладками.

В работах [2, 4] функции $l_{ik}(\varphi)$, $i \neq k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $l_{ii} \equiv 0$, найдены в виде (применительно к рассматриваемому нами частному случаю)

$$l_{ik}(\varphi) = 1 + 2\varrho \frac{e^{i\varphi}}{a_k - a_i - \varrho e^{i\varphi}} +$$

$$+ \left\{ \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq i,\, \nu \neq k)}}^{n} \operatorname{Re}\left[\varphi_\nu^{(i)}(a_k;\varphi) - \varphi_\nu^{(i)}(a_i;\varphi)\right] + \operatorname{Re}\left[\varphi_i^{(i)}(a_k;\varphi) - \varphi_k^{(i)}(a_i;\varphi)\right] \right\}. \tag{3}$$

Здесь функции $\varphi_\nu^{(i)}(z;\varphi)$ определяются следующим образом [4]:

$$\varphi_\nu^{(i)}(z;\varphi) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} \varphi_{\mu\nu}^{(i)}(z;\varphi), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

---

* Можно получить более точную оценку сверху для ϱ: $\varrho \leqslant \sqrt[3]{\frac{\alpha}{a}} \left(\frac{1}{3} + t_0\right)^2$, где t_0 — единственный положительный корень уравнения $t^3 - t^2 - p^2 = 0$, $p^2 = \sqrt[3]{\frac{a}{\alpha}}$.

причем члены этого абсолютно и равномерно сходящегося ряда вне Γ_ν определяются рекуррентными соотношениями [2, 4]:

$$\varphi_{0i}^{(i)}(z;\varphi)\equiv 0; \qquad \varphi_{0k}^{(i)}(z;\varphi)=B_k^{(i)}(\varphi)\frac{\varrho^2}{z-a_k^*} \quad (k\neq i), \tag{5}$$

где

$$B_i^{(i)}(\varphi)\equiv 0; \qquad B_k^{(i)}(\varphi)=\varrho e^{-i\varphi}(a_k-a_i-\varrho e^{-i\varphi})^{-2};$$

$$a_k^*=a_k-\varrho^2(a_k-a_i-\varrho e^{-i\varphi})^{-1};$$

и далее

$$\varphi_{\mu+1,k}^{(i)}(z;\varphi)=-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq k)}}^{n}\left[\overline{\varphi}_{\mu j}^{(i)}\left(a_k+\frac{\varrho^2}{z-a_k};\varphi\right)-\overline{\varphi}_{\mu j}^{(i)}(a_k;\varphi)\right]. \tag{6}$$

Можно выписать все функции (6), а с ними и ряд (4) в явном виде, однако на этом не будем останавливаться, так как это сделано в работах [2, 4].

Кроме того, $\varphi_k^{(i)}(\infty;\varphi)=0$, $k=1,2,\ldots,n$. В дальнейшем нам понадобится оценка для $|\varphi_{\mu+1,k}^{(i)\prime}(z;\varphi)|$, где z — любая точка вне Γ_k или на Γ_k: $|z-a_k|=\varrho$, к выводу которой мы переходим.

Пусть $M_k=\max\limits_{(k\neq i)}|\varphi_{0k}^{(i)\prime}(z;\varphi)|$, где z — любая точка из замкнутого круга $|z-a_j|\leqslant\varrho$, $j\neq k$, $j=1,\ldots,n$, в частности, $M_i=0$, так как $\varphi_{0i}^{(i)}(z;\varphi)\equiv\equiv 0$. Тогда имеем, используя формулы (5):

$$M_k=\left[|B_k^{(i)}(\varphi)|\frac{\varrho^2}{\min\limits_{(j\neq k)}|z-a_k^*|^2}\right]_{z\in|z-a_j|\leqslant\varrho}=$$

$$=\left[\frac{\varrho}{|a_k-\overline{\zeta}_i|^2}\cdot\frac{\varrho^2}{\min\limits_{(j\neq k)}|z-a_k+\varrho^2(a_k-\overline{\zeta}_i)^{-1}|^2}\right]_{z\in|z-a_j|\leqslant\varrho}<\frac{\varrho}{q^2},$$

где $q=d-2\varrho>1+\varrho+3\varrho^2+\varrho^3$. Поэтому $M=\max\limits_{(k)}M_k\leqslant\frac{\varrho}{q^2}<\varrho(1+\varrho)^{-2}$. Заметим теперь, что если точка z лежит вне окружности Γ_k (или на ней), то точка $\omega=a_k+\varrho^2(\overline{z}-a_k)^{-1}$ лежит внутри Γ_k (соответственно, на ней). Тогда получим для любой точки z, лежащей вне Γ_k или на Γ_k, неравенство (используем формулы (6)):

$$|\varphi_{1k}^{(i)\prime}(z;\varphi)|=\frac{\varrho^2}{|z-a_k|^2}\left|\sum_{\substack{j=1\\(j\neq k)}}^{n}\varphi_{0j}^{(i)\prime}(\omega;\varphi)\right|<$$

$$<\frac{\varrho^2}{|z-a_k|^2}\cdot\sum_{\substack{j=1\\(j\neq k)}}^{n}M_j<\frac{\varrho^3(n-1)}{(1+\varrho)^2|z-a_k|^2}, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Применяя полную математическую индукцию, получим для любого μ, $\mu=1,2,\ldots$, оценку при z, лежащей вне Γ_k или на Γ_k:

$$|\varphi_{\mu+1,k}^{(i)\prime}(z;\varphi)|<\frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2}\frac{(n-1)}{|z-a_k|^2}L^\mu, \tag{7}$$

где $L=(n-1)\varrho^2(d-\varrho)^{-2}<1$, так как $d>(1+\varrho)^3$ по условию, а $\varrho<(\sqrt{n-1}-1)^{-1}$, и потому $\varrho(d-\varrho)^{-1}<(n-1)^{-\frac{1}{2}}$.

Из оценок (7) следует, кстати, абсолютная и равномерная сходимость ряда (4) вне Γ_k и на Γ_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

Теперь имеем при любом $s \neq j$:

$$\operatorname{Re} \varphi_j^{(i)}(a_s; \varphi) = \operatorname{Re} \int_{\pm\infty}^{a_s} \varphi_j^{(i)\prime}(t; \varphi)\, dt \leqslant \left| \int_{\pm\infty}^{a_s} |\varphi_j^{(i)\prime}(t; \varphi)|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\pm\infty}^{a_s} \left\{ |\varphi_{0j}^{(i)\prime}(t; \varphi)| + |\varphi_{1j}^{(i)\prime}(t; \varphi)| + \sum_{\mu=2}^{+\infty} \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2} \cdot \frac{(n-1) L^{\mu}}{(t-a_j)^2} \right\} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\pm\infty}^{a_s} \frac{\varrho^3}{(d-\varrho)^2} \frac{dt}{\left| t - a_j + \dfrac{\varrho^2}{a_j - \overline{\zeta}_i} \right|^2} + \int_{\pm\infty}^{a_s} \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2} \left[\frac{n-1}{(t-a_j)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(n-1) L}{(t-a_j)^2 (1-L)} \right] dt \right| \leqslant \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2} \cdot \left(\frac{d-\varrho}{d(d-\varrho) - \varrho^2} + \frac{n-1}{1-L} \right) <$$

$$< \frac{\varrho^3}{(1+\varrho)^2} \left(\frac{1}{d-\varrho} + \frac{n-1}{1-L} \right) < \frac{(n-1)\varrho^3}{(1-\theta)(1+\varrho)^2},$$

так как $\theta_0 \leqslant \theta = \text{const} < 1$, $\theta_0 > \dfrac{(4n+1)^2}{4n(4n-1)(4n+3)}$, где $(d-\varrho)^2 - (n-1)\varrho^2 > (d-\varrho)^2 (1-\theta)$, ибо $d - \varrho > 1 + \varrho > 1$, и потому

$$\frac{1}{d-\varrho} + \frac{(n-1)(d-\varrho)^2}{(d-\varrho)^2 - (n-1)\varrho^2} < 1 + \frac{(n-1)(d-\varrho)^2}{(1-\theta)(d-\varrho)^2} = \frac{n-\theta}{1-\theta}.$$

Здесь $-\infty < t \leqslant a_s$ или $a_s \leqslant t < +\infty$ в зависимости от $a_j > a_s$ или $a_j < a_s$. Из приведенных выше оценок следует, что вещественная часть выражения в фигурных скобках в равенстве (3) не превосходит величины

$$Q = \frac{2\varrho^3 (n-1)(n-\theta)}{(1-\theta)(1+\varrho)^2} \qquad (\theta_0 \leqslant \theta < 1). \tag{8}$$

С другой стороны, имеем точные (достижимые) неравенства, когда φ пробегает интервал $[0, 2\pi)$:

$$\frac{|a_k - a_i| - \varrho}{|a_k - a_i| + \varrho} \leqslant 1 + 2\varrho \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi}}{a_k - a_i - \varrho e^{i\varphi}} \leqslant \frac{|a_k - a_i| + \varrho}{|a_k - a_i| - \varrho},$$

где $k \neq i$, $k, i = 1, 2, \ldots, n$. Принимая во внимание неравенства $|a_k - a_i| \leqslant D = a_n - a_1$ и $|a_k - a_i| \geqslant d$ (см. (2)), заключаем, что гипотеза A будет иметь место в том, очевидно, случае, когда будет выполнено неравенство

$$Q < 1 + \frac{2\varrho}{D-\varrho} \leqslant \frac{|a_k - a_i| + \varrho}{|a_k - a_i| - \varrho},$$

где Q определяется по формуле (8), в частности, если будет выполнено неравенство $a\varrho^3 \leqslant \alpha(1+\varrho)^2$, так как $\dfrac{D+\varrho}{D-\varrho} > 1$, причем $a = 2(n-1)(n-\theta)$; $\alpha = 1 - \theta$; $\theta_0 \leqslant \theta < 1$. Но это неравенство выполняется для области K_n, удовлетворяющей условиям теоремы, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зморович, Про узагальнення інтегральної формули Шварца на n-зв'язні кругової області, ДАН УРСР, № 5, 1958.
2. Л. О. Дундученко, Ще про формулу Шварца для n-зв'язної кругової області, ДАН УРСР, № 11, 1966.
3. В. А. Зморович, О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце, Матем. сб., 32 (74) : 3, 1953.
4. Л. Е. Дундученко, Метод структурных формул в теории специальных классов аналитических функций, Автореферат докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, К., 1968.

Поступила 18.III 1970 г.
Киев