УДК 517.521.8

(С)-свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов

М. А. Калаталова

В работе [1] Н. А. Давыдов ввел понятие (C)-множества последовательности комплексных чисел S_n и доказал (C)-свойство методов Чезаро суммирования рядов.

Из этого свойства им получены как известные теоремы тауберова типа, так и новые теоремы такого же рода.

В данной работе мы перенесем (C)-свойство методов Чезаро суммирования рядов на методы Чезаро суммирования двойных рядов.

Обобщая понятие (C)-множества последовательности S_n, введенное Н. А. Давыдовым, определим понятие (C)-множества для двойной последовательности $S_{m,n}$.

Определение 1. Замкнутое выпуклое множество $\vec{G}$ в комплексной плоскости (это может быть замкнутая выпуклая область, луч, прямая, отрезок, точка) мы назовем (C)-множеством двойной последовательности чисел $S_{m,n}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и последовательности отрезков $[m_\nu, m'_\nu]$, $[n_\nu, n'_\nu]$ чисел натурального ряда такие, что

$$S_{m,n} \in \overline{G}_\zeta \text{ для } m \in [m_\nu, m'_\nu] \text{ и } n \in [n_\nu, n'_\nu], \qquad (1)$$

причем

$$\frac{m'_\nu}{m_\nu} \geqslant \lambda(\varepsilon) > 1, \qquad \frac{n'_\nu}{n_\nu} \geqslant \lambda(\varepsilon) > 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

$m_\nu \to \infty$, $n_\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$, где G_ε — замкнутая выпуклая ε-окрестность множества $\overline{G}$.

Если, в частности, G — точка, то эту точку будем называть (C)-точкой двойной последовательности $S_{m,n}$.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку в комплексной плоскости назовем бесконечно удаленной (C)-точкой двойной последовательности $S_{m,n}$, если найдутся число $\lambda > 1$, последовательности отрезков $[m_\nu, m'_\nu]$, $[n_\nu, n'_\nu]$ чисел натурального ряда и последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_\nu$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке такие, что

$$S_{m,n} \in \overline{G}_\nu \text{ для } m \in [m_\nu, m'_\nu], n \in [n_\nu, n'_\nu], \qquad (3)$$

причем

$$\frac{m'_\nu}{m_\nu} \geqslant \lambda > 1, \qquad \frac{n'_\nu}{n_\nu} \geqslant \lambda > 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad (4)$$

$$m_\nu \to \infty, \; n_\nu \to \infty \; (\nu \to \infty).$$

Мы говорим, что множества $\overline{G}_\nu$ стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние множества $\overline{G}_\nu$ до начала координат стремится к бесконечности при $\nu \to \infty$.

Говорят, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \tag{5}$$

или, что одно и то же, последовательность $S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{k,l}$ суммируется методом (C, α, β), $(\alpha, \beta > -1)$, к числу S, если $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S$, где

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} S_{m,n}^{\alpha,\beta}, \tag{6}$$

а числа $S_{m,n}^{\alpha,\beta}$, A_m^α определяются из соотношений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n = (1-x)^{-\alpha-1} (1-y)^{-\beta-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^\alpha x^m = (1-x)^{-\alpha-1}.$$

Основная теорема. *Если двойной ряд* (5) *суммируется к числу* S (C, p, q)*-методом* (p, q — *натуральные числа*) *и если замкнутое выпуклое множество* $\overline{G}$ *является* (C)*-множеством двойной последовательности частных сумм этого ряда, то* $S \in \overline{G}$.

Если бесконечно удаленная точка является (C)*-точкой двойной последовательности* $S_{m,n}$, *то при любых натуральных числах* p и q *средние* $\sigma_{m,n}^{p,q}$ *неограничены и последовательность* $S_{m,n}$ *не суммируется* (C, p, q)*-методом.*

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Справедливо*

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} A_{m+kh_1}^{p} = h_1^p,$$

где h_1 *и* p — *натуральные числа.*

Лемма 2. *Справедливо*

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \sum_{r=1}^{kh_1} A_{kh_1-r}^{p-1} = h_1^p,$$

где h_1 *и* p — *натуральные числа.*

Леммы 1 и 2 доказаны Н. А. Давыдовым в работе [1].

Лемма 3. *Справедливо*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh) = 0,$$

где $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ — *алгебраический многочлен степени* n и $m > n$.

Доказательство. Известно, что

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh) = \Delta^m f(x).$$

Вычислим последовательно $\Delta f(x),\ \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^m f(x)$.
Имеем:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = [a_0(x+h)^n + \ldots + a_n] - [a_0 x^n + \ldots + a_n] = \\ = a_0 nhx^{n-1} + \ldots,$$

т. е. $\Delta f(x)$ — алгебраический многочлен степени $(n-1)$ с коэффициентом при старшем члене, равным $a_0 nh$. Далее

$$\Delta^2 f(x) = a_0 n(n-1)h^2 x^{n-2} + \ldots,$$

т. е. $\Delta^2 f(x)$ — алгебраический многочлен степени $(n-2)$ с коэффициентом при старшем члене, равным $a_0 n(n-1)h^2$.
Теперь уже ясно, что

$$\Delta^n f(x) = a_0 n! h^n \text{ и } \Delta^m f(x) = 0 \text{ для } m > n.$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$C(p, q, m, n, h_1, h_2) = \\ = \left| \frac{\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{r=1}^{kh_1} \sum_{s=1}^{lh_2} A_{kh_1-r}^{p-1} A_{lh_2-s}^{q-1} S_{m+r,n+s}}{h_1^p h_2^q} - A \right| \leqslant \\ \leqslant \max_{\substack{m \leqslant i \leqslant m' \\ n \leqslant j \leqslant n'}} |\sigma_{i,j}^{p,q} - A| \frac{(2p)^p (2q)^q}{\lambda_1^p \lambda_2^q p!\, q!}, \tag{7}$$

где A — *произвольное комплексное число,* m, n, p, q — *натуральные числа,* $h_1 = \left[\frac{m'-m}{p}\right]$, $h_2 = \left[\frac{n'-n}{q}\right]$, h_1 *и* $h_2 \neq 0$, λ_1 *и* λ_2 *определяются из равенств:* $m' - m = \lambda_1 m' + 2p$, $n' - n = \lambda_2 n' + 2q$ $(0 < \lambda_1 < 1,\ 0 < \lambda_2 < 1,$ $[x]$ — целая часть x).

Доказательство. Рассмотрим

$$B(p, q, m, n, h_1, h_2) \equiv \\ \equiv \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} A_{m+kh_1}^{p} A_{n+lh_2}^{q} (\sigma_{m+kh_1 n+lh_2}^{p,q} - A). \tag{8}$$

Учитывая (6), получаем

$$B(p, q, m, n, h_1, h_2) = \\ = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} S_{m+kh_1,n+lh_2}^{p,q} - \\ - A \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} A_{m+kh_1}^{p} A_{n+lh_2}^{q}.$$

Далее имеем

$$S_{m+kh_1,n+lh_2}^{p,q} = \sum_{u=0}^{m+kh_1} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A_{m+kh_1-u}^{p-1} A_{n+lh_2-v}^{q-1} S_{u,v} =$$

$$= \sum_{u=0}^{m} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} + \sum_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum_{v=0}^{n} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} +$$

$$+ \sum_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum_{v=n+1}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v}.$$

Используя лемму 1, находим

$$B(p, q, m, n, h_1, h_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{u=0}^{m} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2} S_{u,v} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum_{v=0}^{n} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum_{v=n+1}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} -$$

$$- A \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} A^{p}_{m+kh_1} A^{q}_{n+lh_2} =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 - Ah_1^p h_2^q.$$

Рассмотрим

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{u=0}^{m} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v}.$$

Поскольку $\sum\limits_{u=0}^{m} \sum\limits_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v}$ — многочлен степени $p-1$ относительно k, то по лемме 3

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \sum_{u=0}^{m} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} = 0.$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{l=0}^{q} (-1)^{q-l} \binom{q}{l} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \sum_{u=0}^{m} \sum_{v=0}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} = 0.$$

Так как $\sum\limits_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum\limits_{v=0}^{n} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v}$ — многочлен степени $q-1$ относительно l, то по лемме 3

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{q-l} \binom{q}{l} \sum_{u=m+1}^{m+kh_1} \sum_{v=0}^{n} A^{p-1}_{m+kh_1-u} A^{q-1}_{n+lh_2-v} S_{u,v} = 0.$$

Рассмотрим $\sum_3$:

$$\sum_3 = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{u=m+1}^{m+kh_1}\sum_{v=n+1}^{n+lh_2} A^{p-1}_{m+kh_1-u}A^{q-1}_{n+lh_2-v}S_{u,v} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2} A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}.$$

Таким образом,

$$B(p, q, m, n, h_1, h_2) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\times$$

$$\times\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2} A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s} - Ah_1^p h_2^q. \tag{9}$$

Из (8) имеем

$$|B(p, q, m, n, h_1, h_2)| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{l}A^p_{m+kh_1}A^q_{n+lh_2}|\sigma^{p,q}_{m+kh_1,n+lh_2} - A| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{m\leqslant i\leqslant m',\\ n\leqslant j\leqslant n'}} |\sigma^{p,q}_{i,j} - A|\,\frac{2^p(m+ph_1+p)^p}{p!}\cdot\frac{2^q(n+qh_2+q)^q}{q!}.$$

Отсюда и из (9) получаем

$$|C(p, q, m, n, h_1, h_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{m\leqslant i\leqslant m',\\ n\leqslant j\leqslant n'}} |\sigma^{p,q}_{i,j} - A|\,\frac{2^p\cdot 2^q(m+kh_1+p)^p(n+lh_2+q)^q}{p!\,q!\,h_1^p h_2^q}. \tag{10}$$

Учитываем, что

$$m + ph_1 + p \leqslant m' + p,$$

$$h_1 > \frac{m'-m}{p} - 1 > \frac{\lambda_1(m'+p)}{p}.$$

Отсюда и из (10) следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Коэффициенты при $S_{m+r,n+s}$ в сумме*

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2} A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}$$

неотрицательны для достаточно больших h_1 и h_2.

Доказательство. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2} A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\sum_{r=1}^{kh_1}A^{p-1}_{kh_1-r}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\sum_{s=1}^{lh_2}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}.$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{l=1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\sum\limits_{s=1}^{lh_2}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}$, где r зафиксировано, $1\leqslant r\leqslant kh_1$.

Непосредственной проверкой [1, стр. 511] устанавливается, что

$$\sum_{l=1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\sum_{s=1}^{lh_2}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}=$$

$$=\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{\nu=1}^{h_2}\left[\sum_{l=i+1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\binom{(l-i)\,h_2+q-\nu-1}{q-1}\right]S_{m+r,n+ih_2+\nu}.$$

По лемме 3 работы [1] справедливо неравенство:

$$\sum_{l=i+1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\binom{(l-i)\,h_2+q-\nu-1}{q-1}\geqslant 0,$$

где i любое целое, $0\leqslant i\leqslant q-1$, ν — целое, $1\leqslant\nu\leqslant h_2$, при достаточно большом h_2.

Таким образом, коэффициенты при $S_{m+r,n+s}$ при фиксированном r, $1\leqslant r\leqslant ph_1$, для любого $s=1,2,\ldots,qh_2$ неотрицательны.

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2}A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}=$$

$$=\sum_{l=1}^{q}(-1)^{q-l}\binom{q}{l}\sum_{s=1}^{lh_2}A^{q-1}_{lh_2-s}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\sum_{r=1}^{kh_1}A^{p-1}_{kh_1-r}S_{m+r,n+s}.$$

Отсюда получаем, что коэффициенты при $S_{m+r,n+s}$ при фиксированном s, $1\leqslant s\leqslant qh_2$, для любого $r=1,2,\ldots,ph_1$ неотрицательны.

Таким образом, коэффициенты при $S_{m+r,n+s}$ в сумме

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum_{r=1}^{kh_1}\sum_{s=1}^{lh_2}A^{p-1}_{kh_1-r}A^{q-1}_{lh_2-s}S_{m+r,n+s}$$

неотрицательны для любых $r=1,2,\ldots,ph_1$; $s=1,2,\ldots,qh_2$.

Доказательство основной теоремы. Так как множество $\overline{G}$ является (C)-множеством последовательности $S_{m,n}$, то будут справедливы соотношения (1) и (2).

Положив в неравенстве (7)

$$m=m_\nu,\ m'=m'_\nu,\ n=n_\nu,\ n'=n'_\nu,$$

$$h_1=h^{(1)}_\nu=\left[\frac{m'_\nu-m_\nu}{p}\right],\ h_2=h^{(2)}_\nu=\left[\frac{n'_\nu-n_\nu}{q}\right],\ A=S,\ \lambda_1=\lambda^{(1)}_\nu,\ \lambda_2=\lambda^{(2)}_\nu,$$

$$m'_\nu-m_\nu=\lambda^{(1)}_\nu m'_\nu+2p,\ n'_\nu-n_\nu=\lambda^{(2)}_\nu n'_\nu+2q, \tag{11}$$

получим для всех $\nu=1,2,3,\ldots$ следующее неравенство:

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum\limits_{r=1}^{kh^{(1)}_\nu}\sum\limits_{s=1}^{lh^{(2)}_\nu}A^{p-1}_{kh^{(1)}_\nu-r}A^{q-1}_{lh^{(2)}_\nu-s}S_{m_\nu+r,n_\nu+s}}{(h^{(1)}_\nu)^p\,(h^{(2)}_\nu)^q}-S\right|\leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{m_\nu \leqslant i \leqslant m'_\nu,\\ n_\nu \leqslant j \leqslant n'_\nu}} |\sigma_{i,j}^{p,q} - S| \frac{(2p)^p (2q)^q}{p!\, q!\, (\lambda_\nu^{(1)})^p (\lambda_\nu^{(2)})^q}. \tag{12}$$

Из равенств (11) имеем:

$$m'_\nu - m'_\nu \lambda_\nu^{(1)} - 2p = m_\nu, \quad m'_\nu \left(1 - \lambda_\nu^{(1)} - \frac{2p}{m'_\nu}\right) = m_\nu,$$

$$\frac{m'_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{1 - \lambda_\nu^{(1)} - \dfrac{2p}{m'_\nu}}. \quad n'_\nu - n'_\nu \lambda_\nu^{(2)} - 2q = n_\nu,$$

$$n_\nu \left(1 - \lambda_\nu^{(2)} - \frac{2q}{n'_\nu}\right) = n_\nu, \ \frac{n'_\nu}{n_\nu} = \frac{1}{1 - \lambda_\nu^{(2)} - \dfrac{2q}{n'_\nu}}.$$

Отсюда и из соотношений (2) находим:

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(1)} > 0, \ \varliminf_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(2)} > 0.$$

Из неравенства (12) получаем:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{p-k} (-1)^{q-l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sum_{r=1}^{kh_\nu^{(1)}} \sum_{s=1}^{lh_\nu^{(2)}} A_{kh_\nu^{(1)}-r}^{p-1} A_{lh_\nu^{(2)}-s}^{q-1} S_{m_\nu+r, n_\nu+s}}{(h_\nu^{(1)})^p (h_\nu^{(2)})^q} = S. \tag{13}$$

В силу (1), лемм 2 и 5, по известной теореме [3, стр. 116, задача 30] можем утверждать, что число, стоящее под знаком предела в равенстве (13), принадлежит замкнутой области $\overline{G}_\varepsilon$ для всех достаточно больших ν, поэтому $S \in \overline{G}_\varepsilon$ в силу замкнутости множества $\overline{G}_\varepsilon$.

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и замкнутости $\overline{G}$ следует, что $S \in \overline{G}$.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Тогда найдутся число $\lambda > 1$, последовательности отрезков $[m_\nu, m'_\nu]$, $[n_\nu, n'_\nu]$ чисел натурального ряда, а также последовательность $\overline{G}_\nu$ замкнутых выпуклых множеств, стягивающихся к бесконечно удаленной точке такие, что будут иметь место соотношения (3) и (4).

Положив в неравенстве (7)

$$m = m_\nu, \ m' = m'_\nu, \ n = n_\nu, \ n = n'_\nu,$$

$$h_1 = h_\nu^{(1)} = \left[\frac{m'_\nu - m_\nu}{p}\right], \quad h_2 = h_\nu^{(2)} = \left[\frac{n'_\nu - n_\nu}{q}\right],$$

$$A = 0, \ \lambda_1 = \lambda_\nu^{(1)}, \ \lambda_2 = \lambda_\nu^{(2)},$$

где $\lambda_\nu^{(1)}$ и $\lambda_2^{(2)}$ определим из соотношений:

$$m'_\nu - m_\nu = \lambda_\nu^{(1)} m'_\nu + 2p, \ n'_\nu - n_\nu = \lambda_\nu^{(2)} n'_\nu + 2q, \tag{14}$$

получим для всех $\nu=1,2,3,\ldots$ следующее неравенство:

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum\limits_{r=1}^{lh_\nu^{(1)}}\sum\limits_{s=1}^{lh_\nu^{(2)}}A^{p-1}_{kh_\nu^{(1)}-r}A^{q-1}_{lh_\nu^{(2)}-s}S_{m_\nu+r,n_\nu+s}}{(h_\nu^{(1)})^p(h_\nu^{(2)})^q}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\substack{m_\nu\leqslant i\leqslant m'_\nu\\ n_\nu\leqslant j\leqslant n'_\nu}}|\sigma_{i,j}^{p,q}|\frac{(2p)^p\cdot(2q)^q}{p!\,q!\,(\lambda_\nu^{(1)})^p(\lambda_\nu^{(2)})^q}. \tag{15}$$

Из равенств (14) имеем:

$$m'_\nu-\lambda_\nu^{(1)}m'_\nu-2p=m_{\nu_1},\quad n'_\nu-\lambda_\nu^{(2)}n'_\nu-2q=n_\nu,$$

$$\frac{m'_\nu}{m_\nu}=\frac{1}{1-\lambda_\nu^{(1)}-\dfrac{2p}{m'_\nu}},\quad \frac{n'_\nu}{n_\nu}=\frac{1}{1-\lambda_\nu^{(2)}-\dfrac{2q}{n'_\nu}}.$$

Из последних двух равенств и соотношений (4) находим:

$$\varliminf_{\nu\to\infty}\lambda_\nu^{(1)}>0,\quad \varliminf_{\nu\to\infty}\lambda_\nu^{(2)}>0.$$

В силу условий (3), по леммам 2 и 5 и по известной теореме [3, стр. 116, задача 30] число, стоящее под знаком модуля в неравенстве (15), принадлежит $\overline{G}_\nu$ для всех достаточно больших ν, следовательно, оно стремится к бесконечности при $\nu\to\infty$.

Из неравенства (15) в силу (16) находим:

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{\substack{m_\nu\leqslant i\leqslant m'_\nu,\\ n_\nu\leqslant j\leqslant n'_\nu}}|\sigma_{i,j}^{p,q}|=\infty.$$

Из неравенства (15) следует также, что $\sigma_{m,n}^{p,q}$ конечного предела не имеет, т. е. двойной ряд (5) не суммируется $|C(p,q)|$-методом, где p и q—натуральные числа.

Действительно, если бы $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{p,q}=S$, тогда для любого числа $\varepsilon>0$ нашлось бы число $N>0$ такое, что

$$|\sigma_{m,n}^{p,q}-S|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad m,\ n>N,$$

т. е.

$$|\sigma_{m,n}^{p,q}|\leqslant|S|+\varepsilon\quad\text{для}\quad m,\ n>N.$$

Из неравенства (15) имели бы для $m_\nu,\ n_\nu>N\,(\nu>N_1)$:

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{q}(-1)^{p-k}(-1)^{q-l}\binom{p}{k}\binom{q}{l}\sum\limits_{r=1}^{kh_\nu^{(1)}}\sum\limits_{s=1}^{lh_\nu^{(2)}}A^{p-1}_{kh_\nu^{(1)}-r}A^{q-1}_{lh_\nu^{(2)}-s}S_{m+r,n+s}}{(h_\nu^{(1)})^p(h_\nu^{(2)})^q}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|S|+\varepsilon)(2p)^p(2q)^q}{p!q!\inf(\lambda_\nu^{(1)})^p\inf(\lambda_\nu^{(2)})^q}<\infty.$$

Получили противоречие, так как левая часть последнего неравенства стремится к бесконечности при $\nu\to\infty$.

Основная теорема доказана полностью.

Следствие 1. *Если двойной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ *суммируется к числу* S *методом* (C, p, q) $(p, q$ — *натуральные числа) и если конечная точка* A *является* (C)*-точкой последовательности* $S_{m,n}$ *частных сумм данного двойного ряда, то* $S = A$.

Это следствие является частным случаем основной теоремы.

Следствие 2. *Пусть двойной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ *суммируется к числу* $S\,(C, p, q)$*-методом* $(\alpha_1\beta > -1)$ *и пусть замкнутое выпуклое множество* G *является* (C)*-множеством последовательности* $S_{m,n}$ *частных сумм этого ряда.*

Если $|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| < M$ *для любых* $m, n = 0, 1, 2, \ldots,$ *то* $S \in \overline{G}$.

Если бесконечно удаленная точка является (C)*-точкой последовательности* $S_{m,n}$, *то средние* (C, α, β) *неограничены для любых* $\alpha, \beta > -1$.

Доказательство. В силу известной теоремы 6 [2, стр. 32] наш ряд будет суммироваться (C, α', β')-методом к числу S, где α', β' — натуральные числа, причем $\alpha' \geqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$.

По основной теореме $S \in \overline{G}$. Первая часть следствия 2 доказана.

Допустим, что для некоторых α_1, β_1 средние $\sigma_{m,n}^{\alpha_1,\beta_1}$ ограничены, тогда будут ограничены средние $\sigma_{m,n}^{\alpha_2,\beta_2}$, где α_2 и β_2 — натуральные числа, причем $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$, что противоречит утверждению второй части основной теоремы.

Замечание. Нам неизвестно, существенно ли второе условие $(|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| < M,\ m, n = 0, 1, \ldots)$ в следствии 2.

Из (C)-свойства можно будет получить ряд теорем тауберова типа для двойных рядов, суммируемых методами Чезаро. Это является предметом другой работы.

В заключение выражаю благодарность Н. А. Давыдову за помощь, оказанную при написании данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., т. 38, № 4, 1956.
2. И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов, Матем. сб., т. 35, № 1, 1954.
3. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, Гостехиздат, М. — Л., 1937.
4. В. Г. Челидзе, Некоторые вопросы теории двойных рядов, Ухань, Китай, 1958.

Поступила 24.VI 1969 г.,
после переработки — 16.III 1970 г.
Немешаевский совхоз-техникум