УДК 517.514.5

О рядах Якоби

П. Я. Киселев

1. Введение. Пусть E — множество комплексной плоскости z, ограниченное лемнискатой $\Gamma : |\omega(z)| = \mu$, $\omega(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_\lambda)$. Если $\mu = \infty$, то E представляет конечную плоскость, если же $\mu < \infty$, то E состоит из q, $1 \leqslant q \leqslant \lambda$, взаимно внешних областей, границами кото-

рых являются жордановы кривые, состоящие из конечного числа аналитических дуг. Через $\overline{E}$ обозначим множество $E \cup \Gamma$.

Функция $f(z)$, аналитическая на множестве E, разлагается в ряд [1, 2]:

$$a_0 + a_1(z-\alpha_1) + \ldots + a_{\lambda-1}(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{\lambda-1}) +$$
$$+ a_\lambda\omega(z) + a_{\lambda+1}(z-\alpha_1)\omega(z) + \ldots + a_{2\lambda-1}(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{\lambda-1})\omega(z) +$$
$$+ a_{2\lambda}[\omega(z)]^2 + \ldots, \tag{1}$$

который абсолютно сходится на множестве E, равномерно сходится к функции $f(z)$ на любом замкнутом ограниченном множестве, внутреннем к E, и расходится на дополнении $\overline{E}$. λn-я частичная сумма ряда (1) представляет полином степени $\lambda n - 1$, интерполирующий функцию $f(z)$ в узлах α_j, $j = 1, \ldots, \lambda$, с кратностью n в каждом узле. Для удобства запишем ряд (1) в таком виде:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z), \tag{2}$$

где $p_n(z) = [\omega(z)]^m (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_j)$ при $n = m\lambda + j$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda - 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Коэффициенты a_n вычисляются по формуле [2]:

$$a_n = a_{\lambda m+j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{p_{n+1}(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{[\omega(\zeta)]^m(\zeta-\alpha_1)\ldots(\zeta-\alpha_{j+1})}, \tag{3}$$

где Γ_1 — лемниската $|\omega(z)| = \mu_1 < \mu$.

Ряд (2) Дж. Х. Куртисс [2] называет рядом Якоби для функции $f(z)$ относительно точек α_j^*. Следуя этому определению, везде в данной статье под рядами Якоби будем подразумевать ряды вида (2). Ряд Якоби является обобщением ряда Тейлора и сводится к последнему при $\lambda = 1$.

Из результатов Дж. Л. Уолша [1]** вытекает, что в случае аналитичности функции $f(z)$ на множестве $E_0 : |\omega(z)| < \mu_0$ для коэффициентов a_n разложения этой функции в ряд (2) справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{4}$$

наоборот, если выполняется (4), то ряд (2) абсолютно сходится на множестве $E_0 : |\omega(z)| < \mu_0$, равномерно сходится на любом замкнутом и ограниченном множестве, внутреннем к E_0, и расходится для $|\omega(z)| > \mu_0$. Следовательно, условие (4) является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд (2) представлял на множестве E_0 аналитическую функцию.

Назовем лемнискату $\Gamma_0 : |\omega(z)| = \mu_0$ лемнискатой сходимости ряда (2), если для коэффициентов этого ряда выполняется условие (4).

Функция

$$w = \frac{\omega(z)}{\mu_0},\ 0 < \mu_0 < \infty, \tag{5}$$

отображает лемнискату $\Gamma_0 : |\omega(z)| = \mu_0$ на λ единичных окружностей, расположенных на λ-листной римановой поверхности. Такие поверхности подробно изучены Дж. Х. Куртиссом [2]. Нам же достаточно полагать, что

---

* Якоби изучал разложение функции $f(z)$ в ряд такого вида: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(z)[\omega(z)]^\nu$, где $q_\nu(z)$ — полином степени меньше λ. Подробнее о таких рядах см. [1—3].

** Это легко показать, используя (3).

функция (5) переводит лемнискату Γ_0 в λ-кратную окружность $\gamma : |w| = 1$ плоскости w. Следуя Дж. Н. Куртиссу [2], через S-путь жордановой области D, ограниченной кривой C, состоящей из конечного числа аналитических дуг, обозначим аналитическую жорданову кривую, имеющую одним своим концом точку $z_1 \in C$ и лежащую в замкнутой треугольной подобласти $T \subset D$, граница которой имеет вершину z_1, но не имеет других точек, общих с C, и не касается C ни в одной точке*.

2. Абелевы теоремы. В данной статье для рядов Якоби установим несколько результатов типа теорем Абеля.

Предварительно приведем такую лемму.

Лемма. *Если* $z \in \Gamma : |\omega(z)| = \mu,\ 0 < \mu < \infty,$ *то при любом n справедливы неравенства*

$$A_1 \mu^{\frac{n}{\lambda}} < |p_n(z)| < A_2 \mu^{\frac{n}{\lambda}}**, \tag{6}$$

где A_1 и A_2 — постоянные, зависящие от Γ, но не зависящие от n.

Доказательство. Если $n = m\lambda + j,\ m = 0, 1, \ldots,\ 1 \leqslant j \leqslant \lambda - 1$, то $|p_n(z)| = \mu^m |(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_j)| = \mu^m |g_j(z)|$. Так как Γ — множество конечной плоскости, а $g_j(z)$ — полином, не равный нулю на лемнискате Γ, то существуют такие зависимые от Γ постоянные $A_1' > 0$ и $A_2' < \infty$, что при любом j, $1 \leqslant j \leqslant \lambda - 1$, и любом $z \in \Gamma$ выполняются неравенства $A_1' < |g_j(z)| < A_2'$, откуда $A_1' \mu^m < |p_n(z)| < A_2' \mu^m$ или $A_1' \mu^{-\frac{j}{\lambda}} \mu^{\frac{n}{\lambda}} < |p_n(z)| < A_2' \mu^{-\frac{j}{\lambda}} \mu^{\frac{n}{\lambda}}$. Обозначим через A_1'' наименьшее, а через A_2'' — наибольшее из чисел $\mu^{-\frac{j}{\lambda}}$, $j = 1, \ldots, \lambda - 1$, тогда $A_1' A_1'' \mu^{\frac{n}{\lambda}} < |p_n(z)| < A_2' A_2'' \mu^{\frac{n}{\lambda}}$, а это доказывает лемму.

Теорема 1. *Если в некоторой точке $z_1 \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, \lambda$, для любого n справедливо неравенство $|a_n p_n(z_1)| < M$, где M — абсолютная постоянная, тогда ряд (2) абсолютно сходится на множестве E_1, ограниченном лемнискатой $\Gamma_1 : |\omega(z)| = \mu_1$, проходящей через точку z_1. Ряд (2) равномерно сходится на любом замкнутом множестве $\overline{E} : |\omega(z)| \leqslant \leqslant \mu < \mu_1$.*

Доказательство. Если $|a_n p_n(z_1)| < M$, то в силу (6) $|a_n| < \dfrac{A_3}{\mu_1^{\frac{n}{\lambda}}}$, откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqslant \left(\dfrac{1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, $\mu_1 < \mu_0$, следовательно, либо Γ_1 является лемнискатой сходимости ряда (2), либо принадлежит множеству E_0, ограниченному лемнискатой сходимости. В обоих случаях теорема справедлива.

В работе [6] для рядов Ньютона с узлами, имеющими конечное число предельных точек, доказаны теорема типа второй теоремы Абеля и теорема типа теоремы Таубера. Частным случаем этих теорем являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть Γ_0 — лемниската сходимости ряда (2) и $z_0 \in \Gamma_0$, причем $\omega'(z_0) \neq 0$. Тогда если ряд (2) сходится в точке z_0 и сумма его в этой точке равна σ, то при стремлении точки z изнутри Γ_0 к точке z_0 по любому S-пути сумма ряда $f(z)$ стремится к пределу, равному σ.*

Теорема 3. *Пусть Γ_0 — лемниската сходимости ряда (2) и $z_0 \in \Gamma_0$, причем $\omega'(z_0) \neq 0$. Если справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k p_k(z_0) = 0$

---

* S-путь в круге $|w| < 1$ часто называют некасательным (см. [4, стр. 370; 5, стр. 45]).

** В дальнейшем через A_1, A_2,... обозначаем постоянные.

и если при стремлении точки z изнутри Γ_0 к точке z_0 по S-пути существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \sigma$, то ряд (2) сходится в точке z_0 и сумма его в этой точке равна σ.

Утверждение теоремы 2 справедливо при условии $\omega'(z_0) \neq 0$ (z_0 не является кратной точкой лемнискаты Γ_0). Это ограничение опустить нельзя, так как, если z_0 — кратная точка лемнискаты Γ_0, то она является граничной точкой нескольких областей $D_1, D_2, \ldots, D_k$, $k \leqslant \lambda$, составляющих все или часть множества E_0, ограниченного лемнискатой Γ_0. Функция $f(z)$, определенная в одной из этих областей не обязательно должна быть аналитическим продолжением функции $f(z)$, определенной в другой из этих областей.

Следовательно, пределы функции $f(z)$ при $z \to z_0$ из различных областей D_j, $j = 1, \ldots, k$, могут не совпадать, и в таком случае (при условии сходимости ряда (2) в точке z_0) утверждение теоремы 2 не имеет места. Обратимся к примерам.

Дж. Х. Куртисс [2] ввел четную $g_1(z, q)$ и нечетную $g_2(z, q)$ функции, каждая из которых на множестве $|z^2 - 1| < 1$ разлагается в ряд Якоби. В данной статье в качестве примеров будут использоваться ряды Якоби этих функций.

Пример 1.

$$q = \frac{1}{2}, \quad g_2\left(z, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re} z > 0, \\ -1, & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

$$g_2\left(z, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}(z^2-1)^n + (-1)^n \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(2n-1)!!}{2n!!}(z-1)(z^2-1)^n \right\}, \tag{7}$$

$$(0)!! = 1, \ (-1)!! = 1, \ |z^2 - 1| \leqslant 1.$$

В точке $z = 0$ (кратная точка лемнискаты сходимости $\Gamma_0 : |z^2 - 1| = 1$) ряд (7) сходится и сумма его в этой точке равна нулю. Но как бы ни стремилась изнутри Γ_0 точка z к точке $z_0 = 0$, сумма ряда $g_2\left(z, \frac{1}{2}\right)$ не стремится к нулю.

Пример 2.

$$q = -\frac{1}{2}, \quad g_2\left(z, -\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} z^2, & \operatorname{Re} z > 0, \\ -z^2, & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

$$g_2\left(z, -\frac{1}{2}\right) = 1 + (z-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!}(z^2-1)^n + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!}(z-1)(z^2-1)^n \right\}, \quad |z^2 - 1| < 1. \tag{8}$$

В точке $z = 0$ ряд (8) сходится и сумма его в этой точке равна нулю. Когда $z \to 0$ изнутри Γ_0, сумма ряда $g_2\left(z, -\frac{1}{2}\right) \to 0$.

Приведенные примеры показывают, что если z_0 — кратная точка лемнискаты сходимости, то в одних случаях теорема 2 не верна, а в других все же остается справедливой. Возникает вопрос: при каких условиях справедлива теорема 2, если z_0 — произвольная точка Γ_0?

Докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть Γ_0 — лемниската сходимости ряда (2) и $z_0 \in \Gamma_0$. Если ряд (2) абсолютно сходится в точке z_0 и сумма его в этой точке равна σ, то при стремлении точки z к точке z_0 изнутри Γ_0 по S-пути сумма ряда $f(z)$ стремится к пределу, равному σ.*

Доказательство. Так как абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством, то

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lambda-1} a_{m\lambda+j} p_j(z_0) [\omega(z_0)]^m =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lambda-1} p_j(z_0) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m\lambda+j} [\omega(z_0)]^m = \sum_{j=0}^{\lambda-1} p_j(z_0) \sigma_j,$$

где

$$p_0(z_0) = 1, \ p_j(z_0) = \prod_{k=1}^{j} (z_0 - \alpha_k), \quad \sigma_j =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m\lambda+j} [\omega(z_0)]^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m\lambda+j} \mu_0^m \varpi_0^m.$$

Аналогично преобразуем ряд (2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z) = \sum\limits_{j=0}^{\lambda-1} p_j(z) \sum\limits_{m=0}^{\infty} [\omega(z)]^m = \sum\limits_{j=0}^{\lambda-1} p_j(z) \times$ $\times \Psi_j(z)$, где $p_0(z) = 1$, $p_j(z) = \prod\limits_{k=1}^{j} (z - \alpha_k)$, $\Psi_j(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m\lambda+j} [\omega(z)]^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m\lambda+j} \mu_0^m \times$ $\times \varpi^m$. Если $z \to z_0$, то всегда $p_j(z) \to p_j(z_0)$. Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что $\Psi_j(z) \to \sigma_j$, когда $z \to z_0$ по S-пути изнутри Γ_0. Степенной ряд $\Phi_j(\varpi) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(j)} \varpi^m$, $b_m^{(j)} = a_{m\lambda+j} \mu_0^m$, имеет радиус сходимости, равный единице, причем $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(j)} \varpi_0^m = \sigma_j$, поэтому по известной теореме Абеля для степенных рядов $\Phi_j(\varpi) \to \sigma_j$, когда $z \to z_0$ по S-пути изнутри Γ_0.

Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает, что если z_0 — кратная точка лемнискаты сходимости Γ_0 и ряд (2) абсолютно сходится в этой точке, то пределы функции $f(z)$ при $z \to z_0$ из различных областей D_k, для которых z_0 является граничной точкой, равны.

В примерах 1 и 2 точка $z_0 = 0$ является граничной точкой двух областей D_1 и D_2. В этой точке ряд (7) сходится условно. Пределы его суммы $g_2\left(z, \frac{1}{2}\right)$ при $z \to 0$ из областей D_1 и D_2 не совпадают. Ряд (8) в точке $z = 0$ сходится абсолютно. Сумма этого ряда $g_2\left(z, -\frac{1}{2}\right)$ имеет равные пределы при $z \to 0$ из областей D_1 и D_2.

3. Ряд Якоби, сумма которого имеет полюса на лемнискате сходимости. В этом параграфе изучим поведение ряда Якоби на лемнискате сходимости в случае, когда на этой лемнискате находятся полюса суммы ряда $f(z)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть Γ_0 — лемниската сходимости ряда (2) и точка $z_1 \in \Gamma_0$. Если z_1 — полюс суммы ряда $f(z)$ порядка n и нуль функции $\omega'(z)$ порядка m, $m < \lambda$, и если $n > m$, то ряд (2) расходится во всех точках лемнискаты Γ_0.*

Доказательство. Предположим, что ряд (2) сходится в некоторой точке $z_0 \in \Gamma_0$, тогда

$$\lim_{k\to\infty} |a_k p_k(z_0)| = 0. \tag{9}$$

Покажем, что при стремлении точки z к z_1 изнутри Γ_0 по S-пути справедливо предельное равенство

$$\lim_{z\to z_1} (z_1 - z)^n f(z) = 0. \tag{10}$$

В самом деле, $(z_1 - z)^n f(z) = (z_1 - z)^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z) = (z_1 - z)^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z_0) \times \times \dfrac{p_k(z)}{p_k(z_0)}$, откуда с помощью (6) и (9) получаем

$$|(z_1 - z)^n f(z)| < A_4 |z_1 - z|^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_k p_k(z_0)| \times \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{k}{\lambda}} < A_5 N |z_1 - z|^n +$$

$$+ A_6 \varepsilon_N |z_1 - z|^n \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{k}{\lambda}} < A_5 N |z_1 - z|^n + A_7 \varepsilon_N |z_1 - z|^n \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

где $\varepsilon_N = \max\limits_{k \geqslant N+1} |a_k p_k(z_0)|$, $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Когда точка z стремится к точке z_1 изнутри Γ_0 по S-пути, точка $w = = \dfrac{\omega(z)}{\mu_0}$ стремится к точке $w_1 = \dfrac{\omega(z_1)}{\mu_0}$ по S-пути в круге $|w| < 1$, поэтому $|w_1 - w| < A_8 \left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_0}\right)$, следовательно, $1 - \left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} > A_9 |w_1 - w|$, откуда $|(z_1 - z)^n f(z)| < A_5 N |z_1 - z|^n + A_{10} \varepsilon_N \dfrac{|z_1 - z|^n}{|w_1 - w|}$.

Так как z_1 — нуль функции $\omega'(z)$ порядка m, то в окрестности точки z_1 справедливо равенство $\omega(z) - \omega(z_1) = (z - z_1)^{m+1} \varphi(z)$, где $\varphi(z_1) \neq 0$. Отсюда $|w_1 - w| = \dfrac{1}{\mu_0} |\omega(z_1) - \omega(z)| = \dfrac{1}{\mu_0} |z_1 - z|^{m+1} |\varphi(z)| > A_{11} |z_1 - z|^{m+1}$, следовательно, $|(z_1 - z)^n f(z)| < A_5 N |z_1 - z|^n + A_{12} \varepsilon_N |z_1 - z|^{n-m-1}$. Можно считать $|z_1 - z| < 1$, поэтому $|(z_1 - z)^n f(z)| < A_5 N |z_1 - z|^n + A_{12} \varepsilon_N$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$, возьмем $|z_1 - z| < \sqrt[n]{\dfrac{\varepsilon}{2A_5 N}}$ и выберем $N(\varepsilon)$ таким, чтобы $\varepsilon_N < \dfrac{\varepsilon}{2A_{12}}$, тогда $|(z_1 - z)^n f(z)| < \varepsilon$, откуда и вытекает (10). Из (10) следует, что точка z_1 не является полюсом функции $f(z)$ порядка n.

Теорема доказана.

Если $m \geqslant n$, то теорема не верна. Рассмотрим примеры. Возьмем четную функцию $g_1(z, q)$.

Пример 3.

$$q = \frac{1}{2}, \; g_1\left(z, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ -\dfrac{1}{z}, & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

$$g_1\left(z, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} (z^2-1)^n, \ |z^2-1| < 1. \qquad (11)$$

Точка $z = 0$ является полюсом функции $g_1\left(z_1 \frac{1}{2}\right)$ первого порядка и нулем функции $\omega'(z)$ также первого порядка, $n = m = 1$. В точке $z = \sqrt{2}$, расположенной на лемнискате сходимости $|z^2 - 1| = 1$, ряд (11) сходится.

Пример 4.

$$q = 1, \ g_1(z, 1) = \frac{1}{z^2},$$

$$g_1(z, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2-1)^n, \ |z^2-1| < 1. \qquad (12)$$

Для точки $z = 0$ имеем $n = 2$ и $m = 1$. Ряд (12) расходится во всех точках лемнискаты $|z^2 - 1| = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.
2. J. H. Curtiss, On the Jacobi Series, Trans. of the Amer. Math. Soc., v. 49, 3, 1941.
3. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, М., 1950.
4. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
5. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. I, ИЛ, М., 1962.
6. Э. В. Морозюк, Вторая теорема Абеля и теорема Таубера для рядов Ньютона с узлами, имеющими конечное число предельных точек, Сообщ. на 1-й конференции Ростовского математического общества, Ростов-на-Дону, 1967.

Поступила 20.XII 1967 г.,
после переработки — 15.X 1970 г.

Институт математики АН УССР