УДК 517.917

О достаточных условиях устойчивости систем с постоянно действующими возмущениями

А. А. Мартынюк, И. Г. Козубовская

В работах [1, 2] для решения вопроса об устойчивости решений нелинейных систем по Ляпунову, а также устойчивости при больших начальных возмущениях [3] использовались свойства матрицы Якоби, построенной для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Использование матрицы Якоби тесно связано с представлением нелинейной системы дифференциальных уравнений в квазилинейном виде [4].

В данной заметке на основании некоторых результатов работы [5] указываются достаточные условия устойчивости решений при конечных начальных и постоянно действующих возмущениях и устойчивости решений по Ляпунову нелинейных систем.

1. Рассматриваются уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор, $f(x, t)$ — вектор-функция, компоненты которой $f_k(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $x = \vec{0}$ и обращающиеся в нуль в этой точке.

Систему (1.1) представим в квазилинейном виде

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, t)\, x, \tag{1.2}$$

где

$$\Phi(x, t) = \int_0^1 J(\theta x, t)\, d\theta, \quad J(t, x) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{n}. \tag{1.3}$$

Аналогично [5] выполним преобразование системы (1.2). Для этого предположим, что в области $D \subset E^n$ существует ортонормальная последовательность функций $\psi_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$, по которой матрица $\Phi(x, t)$ разлагается в матричный ряд Фурье:

$$\Phi(x, t) = \Omega_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.4}$$

Наряду с системой (1.2) рассмотрим системы

$$\frac{dz}{dt} = \Omega_0(t)\, z \tag{1.5}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \Omega_0(t)\, x + Z(t, x), \tag{1.6}$$

где $Z(t, x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n)\, x.$

Предполагаем, что система (1.5) определяет невозмущенное движение

$$z = 0, \tag{1.7}$$

а система (1.6) — каждое из возмущенных движений

$$z = z(t;\ z_0, t_0), \tag{1.8}$$

порождаемых вектором начальных условий

$$z(t)\big|_{t=t_0} = z^0 \tag{1.9}$$

и вектором $Z(t, x)$, понимаемым как постоянно действующие возмущения.

Предположим, что в области

$$D^* = \{(x, t) : \|x\| < h,\ h > 0,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\} \subseteq D,$$

где норма $\|x\|$ выбрана евклидовой, матрица $\Omega(t)$ и вектор $Z(t, x)$ непрерывны.

В этой области выбором вектора

$$\{A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t)\} = A \tag{1.10}$$

выделим область $\Gamma_{A(t)} = \{x : |x_k| \leqslant A_k(t)\}$ и найдем условия, которым нужно подчинить начальные значения (1.9) и вектор $Z(t, x)$, чтобы решение (1.7) было в течение заданного интервала времени устойчиво по Ляпунову.

Здесь же отметим, что уравнения (1.5) не являются системой первого классического приближения. Действительно, для системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - \beta x_1^2 - \gamma\alpha_1 x_2^2 + \alpha x_2^2$$

уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{dz_1}{dt} = -z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = z_1. \tag{1.11}$$

С другой стороны, если область D задана в виде $-a \leqslant x_1 \leqslant a$; $-b \leqslant x_2 \leqslant b$ ($a, b > 0$ — const), то система (1.5) имеет вид [6]

$$\frac{dz_1^*}{dt} = -z_2^*, \quad \frac{dz_2^*}{dt} = \left(1 - \gamma \frac{b^2}{3}\right) z_1^* + \alpha b^2 z_2^*. \tag{1.12}$$

Нетрудно заметить, что система (1.11) представляет критический случай, в то время, как система (1.12) может иметь корни с отрицательной вещественной частью.

Рассмотрим систему (1.1) с точки зрения устойчивости ее решений при конечных начальных возмущениях на ограниченном интервале времени.

Теорема 1. *Если уравнения невозмущенного движения* (1.5) *таковы, что:*

1) *существует матрица $R(t)$, разрешающая уравнение* [7]

$$\Omega_0^*(t) R(t) + R(t) \Omega_0(t) = -G(t), \tag{1.13}$$

где $G(t)$ — любая положительно определенная матрица $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$;

2) *существует непрерывно дифференцируемая функция $u(t)$ и функция $c_1(t) < u(t)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$:*

$$G_{V_u}(t) \subset \Gamma_{A(t)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

где

$$G_{V_u}(t) = \{x : x \in E^n; \quad V(x, t) \leqslant u(t)\},$$

$$V(t, x) = x^* R(t) x;$$

3) *вдоль траекторий системы* (1.6) *в области $\overline{\Gamma}_{A(t)} \setminus G_{V_{c_1}}(t)$ выполняется условие*

$$\frac{dV}{dt}(x(t), t) < \frac{du}{dt} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \tag{1.14}$$

то система (1.1) *при начальных возмущениях $x(t_0) \in V_{c_1}(t_0)$ устойчива на ограниченном интервале времени.*

Доказательство. Воспользуемся методикой, изложенной в § 2, работы [8]. Пусть траектория $x(t)$ системы (1.1) начинается в области $\Lambda \subseteq G_{V_{c_1}}(t_0)$.

Пусть существует значение $t_3 \in [t_0, t_0 + T]$, при котором

$$\| x(t_3) \| = A. \tag{1.15}$$

При этом вследствие непрерывности решения $x(t)$ и функции $V(x, t)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + t_3]$ имеем

$$\| x(t) \| < A \tag{1.16}$$

и

$$V(x(t_3), t_3) > u(t_3). \tag{1.17}$$

Очевидно, на $[t_0, t_0 + t_3]$ существуют значения $t_1 < t_2$ такие, что

$$V(x(t_2), t_2) = u(t_2) \tag{1.18}$$

и

$$V(x(t_1), t_1) = c_1(t_1).$$

При этом, принимая во внимание (1.16) — (1.18), для функции $V(x(t), t)$ на интервале (t_1, t_2) получим оценку

$$c_1(t) < V(x(t), t) < u(t).$$

На интервале (t_1, t_2) имеет место равенство

$$V(x(t_2), t_2) = V(x(t_1), t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{dt} dt,$$

без точек контакта, где

$$S^*(\varphi, V, r) \equiv \{x : x \in E^n; \quad x^* L(t)\, x \leqslant \varphi(t)\},$$

$$L(t) = G(t) - [r^* R(t) + R(t)\, r] - \dot{R}(t),$$

$$r(\Omega, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)\, \psi_k(x_1, \ldots, x_n)\, x;$$

2) *вектор* $H(x, t)$ *удовлетворяет условию*

$$\| H^*(x, t) \| < \frac{\left[\frac{du}{dt} + \varphi(t)\right]}{2A\, \| R(t) \|}, \tag{2.4}$$

то система (2.1) *устойчива в большом при постоянно действующих возмущениях на ограниченном интервале времени.*

3. Далее определим квадратичную форму

$$V_1(t, x) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(t)\, x_i x_j \quad \left(a_{ij} = a_{ji} \left| \frac{da_{ij}}{dt} \right| < \varepsilon', \varepsilon' > 0 - \text{const}\right), \tag{3.1}$$

удовлетворяющую $\forall t \geqslant 0$ и уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} \left[\sum_{i=1}^{n} C_{si}^0(t)\, x_i \right] = - \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \tag{3.2}$$

где C_{si}^0 определяются ниже.

Теорема 3. *Если* $\Phi(t, x) = C_0(t)$, $C_0(t) = \| C_{si}^0(t) \|$ *при* $x \to 0$, $\forall t \geqslant 0$, *и корни «характеристического уравнения»*

$$\det(C_0(t) - \lambda E) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение $x = 0$ *системы* (1.2) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Производная формы (3.1) с учетом системы (1.2) имеет вид

$$\frac{dV_1}{dt} = - \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s,k=1}^{n} \frac{da_{sk}}{dt}\, x_s x_k + \sum_{s,k=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_k}\, x_k (\varphi_{sk} - C_{sk}^0)$$

или

$$\frac{dV_1}{dt} = - \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s,k=1}^{n} \frac{da_{sk}}{dt}\, x_s x_i + \sum_{s,k=1}^{n} h_{sk}(t)\, x_k x_s, \tag{3.3}$$

где h_{si} — линейные формы от $(\varphi_{si} - C_{si}^0)$. Очевидно $h_{si} \to 0$ при $x \to 0$, и поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся значения T и δ такие, что как только $t \supset T$ и $|x_i| < \delta$, то $|h_{is}| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \sum_{k,s=1}^{n} h_{sk}(t, x)\, x_k x_s \right| \leqslant \sum_{k,s=1}^{n} | h_{sk}(t - x) |\, | x_k |\, | x_s | \leqslant \varepsilon \left(\sum_{s=1}^{n} | x_s | \right)^2 < \varepsilon n^2 \sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{3.4}$$

Для второго слагаемого соотношения (3.3) получим

$$\left| \sum_{s,k=1}^{n} \frac{da_{sk}}{dt}\, x_k x_s \right| < \varepsilon' n^2 \sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{3.5}$$

Согласно неравенствам (3.2), (3.5) выражение (3.3) принимает вид

$$\frac{dV_1}{dt} < \sum_{s=1}^{n} (-1 + n^2 (\varepsilon + \varepsilon')) x_s^2.$$

Отсюда видно, что, если ε и ε' выбрать так, чтобы

$$\varepsilon + \varepsilon' < n^{-2},$$

то выполняются все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Этим доказательство теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, Достаточные условия устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 9, вып. 6, 1954.
2. В. И. Зубов, Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, ПММ, т. 17, вып. 4, 1953.
3. Н. Н. Красовский, Об устойчивости при больших начальных возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 3, 1957.
4. Е. А. Барбашин, О построении функции Ляпунова, Дифференциальные уравнения, т. IV, № 12, 1968.
5. А. А. Мартынюк, Об одном признаке устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, УМЖ, т. 23, № 2, 1971.
6. В. Ф. Задорожный, Достаточный критерий асимптотической устойчивости нелинейных систем, Прикл. мех., т. IV, вып. 3, 1968.
7. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», М., 1966.
8. А. А. Мартынюк, И. Г. Козубовская, Об устойчивости управляемого движения с последействием вдоль заданной траектории. Дифференциальные уравнения, т. VI, вып. 11, 1970.

Поступила 10.XII 1969 г.
Институт математики АН УССР