УДК 517.948.34

Приведение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве к специальному виду

Т. В. Меликидзе

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \int_0^t F(t, s, x(s))\, ds\right), \tag{1}$$

где ε—малый параметр, $X(t, x, y)$, $F(t, s, x)$ — вектор-функции со значениями в банаховом пространстве B, определенные на множестве

$$\left\{t, s \in R, \quad x \in D, \quad |y| \leqslant \sup_{\substack{t,s\in R\\ x\in D}} \left| \int_0^t F(t, s, x(s))\, ds \right| \right\},$$

R — вещественная ось, D — некоторое открытое множество из B, равномерно ограничены для всех t, x.

Предполагается, что среднее от функции $X(t, x, y)$ существует и равно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X\left(t, x, \int_0^t F(t, s, x)\, ds\right) dt = X_0(x)$$

равномерно относительно $x \in D$.

Пусть выполнены следующие условия.

1. Уравнение первого приближения

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X_0(x) \tag{2}$$

имеет периодическое решение $x = x^0(\omega\tau)$, $x^0(\varphi + \Omega) = x^0(\varphi)$.

2. В области

$$\left\{t, s \in R, \quad x \in D_\varrho, |y| \leqslant \sup_{\substack{t,s \in k \\ x \in D_\varrho}} \left| \int_0^t F(t, s, x(s))\, ds \right| \right\}, \tag{3}$$

где D_ϱ — ϱ-окрестность решения $x^0(\omega\tau)$, вектор-функции $X(t, x, y)$, $F(t, s, x)$, $X_0(x)$ сильно непрерывны и имеют непрерывные сильные производные по x, y до второго порядка включительно.

Введем в рассмотрение операторы:

α) разрешающий оператор $H(\varphi, \varepsilon)$ уравнения в вариациях

$$\frac{dv}{d\tau} = \varepsilon A(\varphi)\, v \quad (A(\varphi) = X'_{0x}(x^0)), \tag{4}$$

удовлетворяющий системе

$$\frac{dH}{d\tau} = \varepsilon A(\varphi)\, H(\varphi, \varepsilon),$$
$$H(0, \varepsilon) = I;$$

β) оператор монодромии $H(\Omega, \varepsilon)$, $(H(\varphi + \Omega, \varepsilon) = H(\varphi, \varepsilon)\, H(\Omega, \varepsilon))$;

γ) оператор $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{\Omega} \ln H(\Omega, \varepsilon)$;

δ) оператор-функцию $\Phi(\varphi, \varepsilon) = H(\varphi, \varepsilon)\, e^{-\varphi C(\varepsilon)}$.

Приведем уравнение (1) к специальному виду. Для этого запишем его в виде

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \int_0^t F(t, s, x(s))\, ds\right) + \varepsilon X'_{0x}(x^0)\, v -$$
$$- \varepsilon X'_{0x}(x^0)\, v + \varepsilon X_0(x^0) - \varepsilon X_0(x^0) + \varepsilon X_0(x) - \varepsilon X_0(x)$$

или

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X_0(x^0) + \varepsilon X'_{0x}(x^0)\, v + \varepsilon X_1\left(t, x, v, \int_0^t F_1(t, s, x)\, ds\right). \tag{5}$$

После замены переменных в уравнении (5) посредством

$$x = x^0(\omega\tau) + \Phi(\omega\tau, \varepsilon)\, b \tag{6}$$

получим

$$\frac{db}{dt} = \omega C b + \varepsilon X_2\left(t, \varphi, b, \int_0^t F_2(t, s, \varphi, b)\, ds\right), \tag{7}$$

где C — линейный ограниченный оператор, определенный выше.

Нетрудно видеть, что $\varrho = 0$ является изолированной точкой спектра оператора C. Остальной спектр оператора обозначим $\sigma_0(C)$ и предположим, что он не пересекается с мнимой осью и расположен слева от нее.

Рассмотрим проекционные операторы

$$P_1 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (C - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} (C - \lambda I)^{-1}\, d\lambda, \tag{8}$$

где Γ_1, Γ_2 — гладкие замкнутые контуры, окружающие соответственно точку $\varrho = 0$ и спектр $\sigma_0(C)$.

Известно, что операторы P_1, P_0 проектируют пространство B в инвариантные подпространства B_1, B_0 оператора C такие, что спектр оператора C в этих подпространствах совпадает соответственно с 0 и $\sigma_0(C)$, так что $\sigma(C) = \{0\} + \sigma_0(C)$.

Пусть $q \in B_1$, $\eta \in B_0$, тогда можно написать

$$q = P_1 b, \quad \eta = P_0 b \quad (b = P_0 b + P_1 b). \tag{9}$$

В новых переменных q и η уравнения (7) примут вид

$$\dot{q} = \varepsilon E\left(t, \varphi, q, \eta, \int_0^t \psi(t, s, \varphi, q, \eta)\, ds\right), \tag{10}$$

$$\dot{\eta} = \varepsilon \mathbf{H}\eta + \varepsilon E_0\left(t, \varphi, q, \eta, \int_0^t \psi_0(t, s, \varphi, q, \eta)\, ds\right),$$

где $\mathbf{H} = \omega C_1$ — линейный ограниченный оператор, спектр которого не пересекается с мнимой осью и расположен слева от нее, $E(t, \varphi, q, \eta, r)$, $E_0(t, \varphi, q, \eta, r_0)$ — вектор-функции со значениями соответственно в подпространствах B_1, B_0. Они определены на множестве $R \times [0, \Omega] \times D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2}$, а вектор-функции $\psi(t, s, \varphi, q, \eta)$, $\psi_0(t, s, \varphi, q, \eta)$ определены на множестве

$$R \times [0, \Omega] \times D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} (\sigma_1, \sigma_2 - \mathrm{const} > 0, \varphi \in [0, \Omega]).$$

Нетрудно показать, что

1) при $q = 0$, $\eta = 0$ вектор-функции $E(t, \varphi, q, \eta, r)$, $E_0(t, \varphi, q, \eta, r_0)$ ограничены функцией $N(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) $E(t, \varphi, q, \eta, r) \in \mathrm{Lip}(\varphi, q, \eta)$, $E_0(t, \varphi, q, \eta, r_0) \in \mathrm{Lip}(\varphi, q, \eta)$ с константой $\mu(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$.

Преобразуем уравнение (10) к виду

$$\dot{q} = \omega + G\left(\varepsilon, t, g, h, \int_0^t f(t, s, g, h)\, ds\right),$$

$$\dot{h} = \mathbf{H}h + Q\left(\varepsilon, t, g, h, \int_0^t f_0(t, s, g, h)\, ds\right).$$

Для этого представим первое уравнение (10) в виде

$$\dot{g} = \varepsilon E_1(\varphi, q) + \varepsilon E_2\left(t, \varphi, q, \eta, \int_0^t \psi_1(t, s, \varphi, q, \eta)\, ds\right), \tag{11}$$

где

$$E_1(\varphi, q) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E\left(t, \varphi, q, 0, \int_0^t \psi(t, s, \varphi, q, 0)\, ds\right) dt.$$

Производя в (11) замену переменных посредством

$$q = q(\varphi), \tag{12}$$

где (12) является периодическим решением уравнения

$$\dot{q} = E_1(\varphi, q), \tag{13}$$

получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon W\left(t, \varphi, \eta, \int_0^t \psi_2(t, s, \varphi, \eta)\, ds\right),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon \mathbf{H}\eta + \varepsilon P\left(t, \varphi, \eta, \int_0^t \psi_3(t, s, \varphi, \eta)\, ds\right). \tag{14}$$

Возьмем произвольную постоянную χ и построим выражения:

$$W_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon) = \int_0^\infty W_1\left(t+\tau, \varphi, \eta, \int_0^{t+\tau} \psi_2(t+\tau, s, \varphi, \eta)\, ds\right) e^{-\chi\tau} d\tau,$$

$$\frac{\partial W_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta} = \int_0^\infty \frac{\partial W_1(t+\tau, \varphi, \eta, \theta)}{\partial \eta} e^{-\chi\tau} d\tau,$$

$$\frac{\partial W_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \varphi} = \int_0^\infty \frac{\partial W_1(t+\tau, \varphi, \eta, \theta)}{\partial \varphi} e^{-\chi\tau} d\tau,$$

$$P_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon) = \int_0^\infty P_1(t+\tau, \varphi, \eta, \int_0^{t+\tau} \psi_3(t+\tau, s, \varphi, \eta)\, ds)\, e^{-\chi\tau} d\tau,$$

$$\frac{\partial P_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta} = \int_0^\infty \frac{\partial P_1(t+\tau, \varphi, \eta, \theta_0)}{\partial \eta} e^{-\chi\tau} d\tau,$$

$$\frac{\partial P_{1\chi}(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \varphi} = \int_0^\infty \frac{\partial P_1(t+\tau, \varphi, \eta, \theta_0)}{\partial \varphi} e^{-\chi\tau} d\tau,$$

которые являются преобразованиями Лапласа для функций:

$$W_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon) = W(t, \varphi, \eta, \varepsilon) - W_0(\varphi, \eta),$$
$$\frac{\partial W_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \varphi},$$
$$P_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon) = P(t, \varphi, \eta, \varepsilon) - P_0(\varphi, \eta),$$
$$\frac{\partial P_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial P_1(t, \varphi, \eta, \varepsilon)}{\partial \varphi}.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{gathered}
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon u(t, g, h, \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon u'_g(t, g, h, \varepsilon) = 0, \\
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon u'_R(t, g, h, \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon Z(t, g, h, \varepsilon) = 0, \\
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon Z'_g(t, g, h, \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon Z'_h(t, g, h, \varepsilon) = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$u(t, g, h, \varepsilon) = W_{1\chi}(t, g, h, \varepsilon),$$
$$Z(t, g, h, \varepsilon) = P_{1\chi}(t, g, h, \varepsilon).$$

Из (15) следует обратимость следующего преобразования:

$$\begin{gathered}
\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h, \varepsilon), \\
\eta = h + \varepsilon Z(t, g, h, \varepsilon).
\end{gathered} \tag{16}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}
u'_t(t, g, h, \varepsilon) = \chi u(t, g, h, \varepsilon) - W_1(t, g, h, \varepsilon), \\
Z'_t(t, g, h, \varepsilon) = \chi Z(t, g, h, \varepsilon) - P_1(t, g, h, \varepsilon),
\end{gathered} \tag{17}$$

тогда из (14), имея в виду (16), (17), получаем

$$\dot{g} = \omega + G\left(\varepsilon, t, g, h, \int_0^t f(t, s, g, h)\, ds\right),$$
$$\dot{h} = \mathbf{H}h + Q\left(\varepsilon, t, g, h, \int_0^t f_0(t, s, g, h)\, ds\right), \tag{18}$$

где вектор-функции $G(\varepsilon, t, g, h, \xi)$, $Q(\varepsilon, t, g, h, \xi_0)$ со значениями в инвариантных подпространствах B_1 и B_0.

Используя метод, изложенный в [1], можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а. *Пусть для уравнения*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \tag{19}$$

где ε — *малый параметр*, $X(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ — *вектор-функция со значением в банаховом пространстве* B, *выполняются следующие условия*:

1) $X(t, x, y)$ определена на множестве

$$t, s \in R, \quad x \in D, \quad |y| \leqslant \sup_{\substack{t, s \in R \\ x \in D}} \left| \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds \right|$$

и равномерно ограничена для всех t, x, y;

2) *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x)\, ds\right) dt = X_0(x)$$

равномерно относительно $x \in D$;

3) *уравнение первого приближения*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X_0(x)$$

имеет периодическое решение $x = x^0(\omega\tau)$, $x^0(\varphi + \Omega) = x^0(\varphi)$;

4) *вектор-функции* $X(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ *сильно непрерывны и имеют непрерывные сильные производные по* x, y *до второго порядка включительно*;

5) *спектр оператора* $\mathbf{H} = \omega C_1$ *не пересекается с мнимой осью и расположен слева от нее.*

Тогда можно указать такие положительные постоянные $\bar{\varepsilon}, \gamma, \sigma_1$ *и функции* $N(\varepsilon, \sigma) \to 0$, $D(\varepsilon) \to 0$, $\Delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$ $(\sigma < \sigma_1,\ \varepsilon < \bar{\varepsilon})$, *что для* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ *будем иметь утверждение: уравнение* (19) *имеет интегральное многообразие, представляемое в виде*

$$x = f(t, g, \varepsilon),$$

где $f(t, g, \varepsilon)$ *определена на множестве* $R \times D \times K_\varepsilon$, *ограничена функцией* $D(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *и удовлетворяет условию* $|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leqslant \Delta |g' - g''|$.

Рассмотрение исходного уравнения на $\mathfrak{M}_t$ *сводится к рассмотрению одного уравнения относительно переменной* g.

Это интегральное многообразие обладает свойством притяжения всех близких траекторий по закону

$$|x(t) - f(t, g, \varepsilon)| \leqslant N(\varepsilon, \sigma)\, e^{-\gamma(t - t_0)} \ (t \geqslant t_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, Изд. Института математики АН УССР, К., 1968.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. О. Б. Лыкова, О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит, УМЖ, т. IX, № 4, 1957.
4. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1967.
5. А. Н. Филатов, Об усреднении в системе интегро-дифференциальных уравнений на бесконечном промежутке, ДАН УзССР, № 9, 1965.
6. А. А. Илюшин, Г. С. Ларионов, А. Н. Филатов, К усреднению в системах нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 188, № 1, 1969.
7. А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Об одном варианте усреднения в интегро-дифференциальных уравнениях, ДАН СССР, т. 192, № 4, 1970.
8. М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. Института математики АН УССР, К., 1964.

Поступила 24.XII 1970 г.
Институт математики АН УССР