УДК 517.92

Применение метода коллокации для решения краевых задач

Н. И. Ронто

Исследование метода коллокации применительно к краевым задачам в случае линейных интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений произведено в работах [1—6]. Здесь же с помощью метода, разработанного Г. М. Вайникко [1], рассматривается применение метода коллокации к линейным краевым задачам для системы дифференциальных уравнений, а также к системам с периодическими коэффициентами.

1. Пусть требуется найти на $[a, b]$ решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) + f(t) \tag{1}$$

при краевых условиях

$$Bx(a) + Lx(b) = 0, \tag{2}$$

где элементы матрицы $A(t) = \{a_{ij}(t);\ i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ — непрерывные в $[a, b]$ функции;

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$
$$Bx = (b_1x_1, b_2x_2, \ldots, b_mx_m), \ Lx = (l_1x_1, l_2x_2, \ldots, l_mx_m),$$

b_i, l_i — постоянные такие, что $b_i + l_i \neq 0$.

Приближенное решение $x_n(t) = (x_{n1}(t), x_{n2}(t), \ldots, x_{nm}(t))$ задачи (1), 2) ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} Q_k \varphi_k(t), \tag{3}$$

где

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{k1}(t), \varphi_{k2}(t), \ldots, \varphi_{km}(t)) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

удовлетворяет краевым условиям (2), т. е.

$$B\varphi_k(a) + L\varphi_k(b) = 0;$$

$\varphi_{kj}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — многочлены степени $(k + 1)$;

$$Q_k\varphi_k = (q_{k1}\varphi_{k1},\ q_{k2}\varphi_{k2},\ \ldots,\ q_{km}\varphi_{km}),\quad q_{kj} \text{ — постоянные.}$$

В частности, за $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ можно взять вектор-функцию с одинаковыми компонентами, равными

$$(t-a)(t-b)(1+t+\ldots+t^{k-1}),$$

а

$$\varphi_0(t) = (\alpha_1 + t, \alpha_2 + t, \ldots, \alpha_m + t),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ определяются из условия $B\varphi_0(a) + L\varphi_0(b) = 0$. Очевидно, что (3) удовлетворяет краевым условиям (2).

Пусть $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов на отрезке $[a, b]$ с весом $\varrho(t)$, где $\varrho(t)$ — неотрицательная, суммируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_a^b \frac{dt}{\varrho(t)} < \infty. \tag{4}$$

Неизвестные q_{kj} находятся по методу коллокации из условия, чтобы невязка равнялась нулю в $(n+1)$ точках $t_0, t_1, \ldots, t_n$ — корнях многочлена $\psi_{n+1}(t)$, т. е. из системы

$$\frac{dx_n(t_i)}{dt} = A(t_i)\,x_n(t_i) + f(t_i), \tag{5}$$

откуда относительно неизвестных q_{kj} получается система линейных алгебраических уравнений

$$Hy = F, \tag{6}$$

где элементы матрицы $H = \{H_{ij};\quad i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ при $i \neq j$

$$H_{ij} = \operatorname{diag}[a_{ij}(t_0), a_{ij}(t_1), \ldots, a_{ij}(t_n)]\,S_j,$$

$$S_j = \begin{bmatrix} \varphi_{0j}(t_0), & \varphi_{1j}(t_0), & \ldots, & \varphi_{nj}(t_0) \\ \varphi_{0j}(t_1), & \varphi_{1j}(t_1), & \ldots, & \varphi_{nj}(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{0j}(t_n), & \varphi_{1j}(t_n) & \ldots & \varphi_{nj}(t_n) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$H_{jj} = \operatorname{diag}[a_{jj}(t_0), a_{jj}(t_1), \ldots, a_{jj}(t_n)]\,S_j - \dot{S}_j,$$

$\dot{S}_j$ — производная матричной функции (7), вычисленная в тех же точках;

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_m),\ F_j = -(f_j(t_0), f_j(t_1), \ldots, f_j(t_n)),$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),\ y_j = (q_{0j}, q_{1j}, \ldots, q_{nj}).$$

В дальнейшем под нормой вектор-функции $x(t)$ в равномерной метрике понимается $|x(t)|_C = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\ \max\limits_{t\in[a,b]} |x_i(t)|$, а в пространстве L_ϱ^2:

$$\|x(t)\|_{L_\varrho^2} = \max_i \|x_i(t)\|_{L_\varrho^2} = \max_i \left[\int_a^b \varrho(s)\,|x_i(s)|^2\,ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (1), (2) *с непрерывными в* $[a, b]$ $A(t)$ *и* $f(t)$ *имеет единственное решение* $x_0(t) = (x_{01}(t), \ldots, x_{0m}(t))$. *Тогда при достаточно больших* $n \geqslant n_0$ *система* (6) *имеет единственное решение и* *последовательность приближенных решений $x_n(t)$ равномерно сходится к $x_0(t)$, а последовательность $\dot{x}_n(t)$ сходится к $\dot{x}_0(t)$ среднеквадратически с весом $\varrho(t)$, причем*

$$|x_n(t) - x_0(t)|_C \leqslant c_1 E_n(\dot{x}_0), \tag{8}$$

$$\|\dot{x}_n(t) - \dot{x}_0(t)\|_{L^2_\varrho} \leqslant c_2 E_n(\dot{x}_0), \tag{9}$$

где

$$E_n(\dot{x}_0) = \max_{i=1,2,\ldots,m} E_n(\dot{x}_{0i}),$$

$E_n(\dot{x}_{0i})$ — наилучшее равномерное приближение функции $\dot{x}_{0i}(t)$ многочленом степени не выше n; c_1, c_2 — постоянные, которые не зависят от n и $f(t)$.

Доказательство. Пусть $G(t, s)$ — матрица Грина уравнения $\dot{x}(t) = 0$ при условиях (2). Если обозначить

$$v_n(t) = (v_{n1}(t), \ldots, v_{nm}(t)) = \dot{x}_n(t),$$

тогда

$$x_n(t) = \int_a^b G(t, s)\, v_n(s)\, ds. \tag{10}$$

Систему (5) можно записать в виде

$$v_n(t_i) - A(t_i) \int_a^b G(t_i, s)\, v_n(s)\, ds - f(t_i) = 0. \tag{11}$$

Если через P_n обозначить линейный проекционный оператор, построенный по узлам $t_0, t_1, \ldots, t_n$, который сопоставляет данной функции ее интерполяционный полином Лагранжа степени n, тогда из (11) следует, что

$$P_n v_n + P_n K v_n = P_n f,$$

где

$$K v_n = \int_a^b K(t, s)\, v_n(s)\, ds, \quad K(t, s) = -A(t)\, G(t, s).$$

Учитывая, что $v_{nj}(t)$ — многочлен степени не выше n, то $P_n v_{nj} = v_{nj}$ и

$$v_n + P_n K v_n = P_n f. \tag{12}$$

Единственному решению $x_0(t)$ задачи (1), (2) соответствует единственное решение $v_0(t) = \dot{x}_0(t)$ уравнения

$$v + Kv = f. \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) рассматриваются в пространстве L^2_ϱ функций, квадратически суммируемых в $[a, b]$ с весом $\varrho(t)$. Нетрудно доказать, что оператор K является вполне непрерывным как оператор, переводящий пространство L^2_ϱ в пространство C, очевидно, что K — вполне непрерывный и как оператор из L^2_ϱ в L^2_ϱ.

По теореме Эрдеш — Туран [7, стр. 547] интерполяционный многочлен Лагранжа для любой непрерывной функции, построенный по узлам $t_0, t_1, \ldots, t_n$ среднеквадратически с весом $\varrho(t)$, стремится к приближаемой функции, т. е. операторы $P_n \in [C \to L^2_\varrho]$ сильно стремятся к оператору

I-вложения пространства C в пространство L^2_ϱ. Тогда, по теореме Банаха—Штейнхауса [8, стр. 232], нормы операторов $P_n \in [C \to L^2_\varrho]$ ограничены

$$\| P_n \| \leqslant \tilde{c}, \; n = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Если умножить операторы $P_n \in [C \to L^2_\varrho]$ справа на вполне непрерывный оператор K, то $P_n K \in [L^2_\varrho \to L^2_\varrho]$ стремится к оператору $IK = K$ по норме

$$\| P_n K - K \| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{15}$$

Из (13) следует, что существует ограниченный обратный оператор $(E + K)^{-1} \in [L^2_\varrho \to L^2_\varrho]$, а учитывая (15), имеем, что при $n \geqslant n_0$

$$\| (E + P_n K)^{-1} \| \leqslant \nu. \tag{16}$$

Значит, при $n \geqslant n_0$ уравнение (12) имеет единственное решение $v_n(t)$; следовательно, система (7) также однозначно разрешима. Тогда

$$(E + P_n K) v_0 = P_n (E + K) v_0 + (v_0 - P_n v_0) = P_n f + (v_0 - P_n v_0). \tag{17}$$

Вычитая (17) и (12), имеем

$$(E + P_n K)(v_0 - v_n) = v_0 - P_n v_0. \tag{18}$$

Пусть $p_n(t) = (p_{n1}(t), \ldots, p_{nm}(t))$, где $p_{nj}(t)$ — произвольный полином степени не выше n. Тогда из (18) с учетом (16) и (14) имеем, что

$$\| v_0 - v_n \|_{L^2_\varrho} \leqslant \nu \| v_0 - P_n v_0 \|_{L^2_\varrho} = \nu \max_i \| (v_{0i} - p_{ni}) -$$

$$- P_n^i (v_{0i} - p_{ni}) \|_{L^2_\varrho} \leqslant \nu \max_i \left[\left(\int_a^b \varrho(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{c} \right] \max_{t\in[a,b]} | v_{0i}(t) - p_{ni}(t) | \leqslant$$

$$\leqslant \nu \left[\left(\int_a^b \varrho(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{c} \right] \max_i E_n(v_{0i}) \leqslant c_2 E_n(\dot{x}_0),$$

т. е. неравенство (9) доказано. Далее

$$x_n(t) - x_0(t) = \int_a^b G(t, s)(v_n(s) - v_0(s))\, ds.$$

Тогда

$$| x_n(t) - x_0(t) |_C = \max_i \max_{t\in[a,b]} | x_{ni}(t) - x_{0i}(t) | =$$

$$= \max_i \max_t \left| \left[\int_a^b G_{i1}(t, s)(v_{n1} - v_{01})\, ds + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \int_a^b G_{im}(t, s)(v_{nm} - v_{0m})\, ds \right] \right| = \max_i \max_t \left| \int_a^b \frac{G_{i1}(t, s)}{\sqrt{\varrho(s)}} \sqrt{\varrho(s)} \times \right.$$

$$\left. \times (v_{n1} - v_{01})\, ds + \ldots + \int_a^b \frac{G_{im}(t, s)}{\sqrt{\varrho(s)}} \sqrt{\varrho(s)}\,(v_{nm} - v_{0m})\, ds \right|.$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$| x_n(t) - x_0(t) |_C \leqslant \max_i \max_t \left[\left(\int_a^b \frac{| G_{i1}(t, s) |^2}{\varrho(s)}\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \| v_{n1} - v_{01} \|_{L^2_\varrho} + \ldots \right.$$

$$\ldots + \left(\int_a^b \frac{|G_{im}(t, s)|^2}{\varrho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \| v_{nm} - v_{0m} \|_{L^2_\varrho} \Bigg].$$

Обозначим

$$\max_{j=1,2,\ldots,m} \max_{t \in [a,b]} \left(\int_a^b \frac{|G_{ij}(t, s)|^2}{\varrho(s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} = c_i.$$

Следовательно,

$$| x_n(t) - x_0(t) |_C \leqslant \max_i c_i [\| v_{n1} - v_{01} \|_{L^2_\varrho} + \ldots + \| v_{nm} - v_{0m} \|_{L^2_\varrho}]. \qquad (19)$$

Учитывая (9), последнее неравенство запишем в виде

$$| x_n(t) - x_0(t) |_C \leqslant \max_i c_i [m c_2 E_n(\dot{x}_0)] = c_1 E_n(\dot{x}_0),$$

т. е. оценка (8) доказана. Сходимость $x_n(t)$ и $\dot{x}_n(t)$ следует из (8) и (9).

2. Пусть в системе

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x(t) + f(t) \qquad (20)$$

элементы матрицы $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывные T-периодические функции. Требуется найти T-периодическое решение уравнения (20), т. е. (20) рассматривается при краевых условиях

$$x(0) = x(T). \qquad (21)$$

Приближенное T-периодическое решение уравнения (20) ищем в виде

$$x_r(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{r} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t), \qquad (22)$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \; a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jm}), b_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jm}), x_r = (x_{r1}, \ldots, x_{rm}).$$

Векторы, составленные из неизвестных коэффициентов

$$x_k^\Gamma = (a_{0k}, a_{1k}, b_{1k}, \ldots, a_{rk}, b_{rk}), \; k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (23)$$

определяются по методу коллокации из условия обращения в нуль невязки в узлах коллокации, за которые в данном случае принимаются равноотстоящие точки периода

$$t_i = i \frac{T}{N}, \; i = 0, 1, \ldots, 2r, \; N = 2r + 1. \qquad (24)$$

Следовательно, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m1} & h_{m2} & \ldots & h_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^\Gamma \\ x_2^\Gamma \\ \vdots \\ x_m^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \qquad (25)$$

$$h_{ij} = \mathrm{diag}\,[a_{ij}(t_0), a_{ij}(t_1), \ldots, a_{ij}(t_{2r})]\, M, \quad i \neq j,$$

$$h_{ii} = \mathrm{diag}\,[a_{ii}(t_0), a_{ii}(t_1), \ldots, a_{ii}(t_{2r})]\, M - \dot{M},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega t_0 & \sin\omega t_0 & \dots & \cos r\omega t_0 & \sin r\omega t_0 \\ 1 & \cos\omega t_1 & \sin\omega t_1 & \dots & \cos r\omega t_1 & \sin r\omega t_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos\omega t_{2r} & \sin\omega t_{2r} & \dots & \cos r\omega t_{2r} & \sin r\omega t_{2r} \end{bmatrix},$$

$$\dot{M} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -\sin\omega t_0 & \cos\omega t_0 & \dots & -r\sin r\omega t_0 & r\cos r\omega t_0 \\ 0 & -\sin\omega t_1 & \cos\omega t_1 & \dots & -r\sin r\omega t_1 & r\cos r\omega t_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\sin\omega t_{2r} & \cos\omega t_{2r} & \dots & -r\sin r\omega t_{2r} & r\cos r\omega t_{2r} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $x_0(t) = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$ — единственное решение задачи (20), (21). Тогда при достаточно больших r система (25) однозначно разрешима и последовательность $x_r(t)$ равномерно сходится к $x_0(t)$, а последовательность $\dot{x}_r(t)$ сходится к $\dot{x}_0(t)$ среднеквадратически, причем*

$$|x_r(t) - x_0(t)|_C \leqslant c_3 E_r(\dot{x}_0), \tag{26}$$

$$\|\dot{x}_r(t) - \dot{x}_0(t)\|_{L^2} \leqslant c_4 E_r(\dot{x}_0), \tag{27}$$

где c_3, c_4 — константы, не зависящие от r и $f(t)$; $E_r(\dot{x}_0) = \max\limits_i E_r(\dot{x}_{0i})$, $E_r(\dot{x}_{0i})$ — наилучшее равномерное приближение функции $\dot{x}_{0i}(t)$ тригонометрическими многочленами порядка не выше r.

Доказательство можно провести по аналогии с доказательством теоремы 1. При этом вместо оператора P_n берется R_r-линейный проекционный оператор, сопоставляющий каждой непрерывной T-периодической функции тригонометрический интерполяционный многочлен, построенный по узлам (24). Тогда в пространстве L^2 функций, квадратично суммируемых в $[0, T]$, рассматриваются уравнения

$$v_r + R_r K v_r = R_r f, \tag{28}$$

$$v + Kv = f, \tag{29}$$

где

$$Kv_r = \int_0^T K(t, s)\, v_r(s)\, ds, \quad K(t, s) = (-A(t) + E)\, \widetilde{G}(t, s),$$

$$v = \dot{x}(t) + x(t), \quad v_r = \dot{x}_r(t) + x_r(t),$$

$\widetilde{G}(t, s)$ — матрица Грина задачи $\dot{x}(t) + x(t) = 0$ при условии (21) [9]. Среднеквадратическая сходимость тригонометрического интерполяционного многочлена обеспечивается тем, что узлы интерполяции выбраны равноотстоящими на периоде [10, стр. 152].

Ввиду того, что коэффициенты тригонометрических полиномов (22) взаимно однозначно связаны со значениями этого полинома в $(2r + 1)$, то вместо (25) можно получить более простую систему алгебраических уравнений относительно векторов

$$x_k^M = (x_{rk}(t_0), x_{rk}(t_1), \dots, x_{rk}(t_{2r})),$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} \widetilde{h}_{11} & \widetilde{h}_{12} & \dots & \widetilde{h}_{1m} \\ \widetilde{h}_{21} & \widetilde{h}_{22} & \dots & \widetilde{h}_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widetilde{h}_{m1} & \widetilde{h}_{m2} & \dots & \widetilde{h}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^M \\ x_2^M \\ \vdots \\ x_m^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

где

$$\widetilde{h}_{ij} = \operatorname{diag}[a_{ij}(t_0), a_{ij}(t_1), \ldots, a_{ij}(t_{2r})], \quad i \neq j,$$

$$\widetilde{h}_{ii} = \operatorname{diag}[a_{ii}(t_0), a_{ii}(t_1), \ldots, a_{ii}(t_{2r})] - D$$

— элементы матрицы $D = \{D_{pk};\, p, k = 1, 2, \ldots, 2r+1\}$ [11],

$$D_{pk} = \frac{2\omega}{2r+1} \sum_{j=1}^{r} j \sin 2j \frac{\pi(k-p)}{2r+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Вайникко, О сходимости и устойчивости метода коллокации, Дифференциальные уравнения, т. 1, № 2, 1965.
2. Э. Б. Карпиловская, О сходимости метода коллокации, ДАН СССР, т. 151, № 4, 1963.
3. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, Приближенное решение операторных уравнений, Физматгиз, М., 1969.
4. М. Ф. Каспшицкая, А. Ю. Лучка, О методе коллокации, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 8, № 5, 1968.
5. О. Киш, О сходимости метода совпадения, Acta Mathematica Hungaricae, № 3—4, 1966.
6. И. Петерсен, О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений, Изв. АН ЭстССР, № 1, 1961.
7. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, М., 1949.
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
9. W. T. Reid, Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations, Americ. Journ. Math., vol. 53, 1931, pq. 443.
10. В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, «Наукова думка», К., 1968.
11. В. М. Бондаренко, Н. И. Ронто, Численные методы получения вынужденных периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей, сб. Анализ электрических цепей и электромагнитных систем, «Наукова думка», К., 1967.

Поступила 15.VI 1970 г.
Институт кибернетики АН УССР