УДК 517.946

Об оценке решения первой краевой задачи для квазилинейных систем дифференциальных уравнений параболического типа

Л. И. Савченко

Пусть дана система

$$LU_i = \frac{\partial U_i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial x^2} = f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r) \tag{1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, r)$ с начальными и краевыми условиями

$$U_i(x, 0) = \varphi_i(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$U_i(0, t) = \mu_{i1}(t), \ U_i(l, t) = \mu_{i2}(t), t \geqslant 0$$

$$(\varphi_i(0) = \mu_{i1}(0), \ \varphi_i(l) = \mu_{i2}(l)).$$

Считаем, что в некоторой замкнутой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость xot есть область $\overline{R}=\{0\leqslant x, t\leqslant l\}, \overline{R}\in\overline{D}$, функции f_i непрерывны относительно всех своих аргументов и существуют ограниченные производные

$$-N_j^{(i)}\leqslant\frac{\partial f_i}{\partial U_j}\leqslant N_j^{(i)}\quad (i, j=1, 2, \ldots, r).$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть в области $\overline{D}$ функции $Z_i(x, t)$ и $V_i(x, t)$ непрерывны вместе с производными всех тех порядков, которые входят в систему* (1), *удовлетворяют условиям* (2), *а подстановка их соответственно в системы*

$$L\widetilde{Z}_i-\frac{1}{2}f_i(x, t, \widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_r)-\frac{1}{2}f_i(x, t, V_1, \ldots, V_r)+ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}N_j^{(i)}[\widetilde{Z}_j-\widetilde{V}_j]=0, \tag{3}$$

$$L\widetilde{V}_i-\frac{1}{2}f_i(x, t, \widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_r)-\frac{1}{2}f_i(x, t, \widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_r)- -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}N_j^{(i)}[\widetilde{Z}_j-\widetilde{V}_j]=0$$

дает соответственно невязки $\alpha_i(x, t)$ и $\beta_i(x, t)$. Определим функции $\sigma_i(x, t)$ и $\omega_i(x, t)$ из уравнений

$$L\sigma_i=-|\alpha_i(x, t)|,\quad L\omega_i=|\beta_i(x, t)| \tag{4}$$

при нулевых условиях (2). *Тогда функции*

$$Z_{i1}(x, t)=Z_i(x, t)-\sigma_i(x, t), \tag{5}$$
$$V_{i1}(x, t)=V_i(x, t)-\omega_i(x, t)$$

при $(x, t)\in\overline{R}$ удовлетворяют неравенствам

$$LZ_{i1}-\frac{1}{2}f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1})-\frac{1}{2}f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1})+ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}N_j^{(i)}[Z_{j1}-V_{j1}]=\alpha_{j1}(x, t)\geqslant 0, \tag{6}$$

$$LV_{i1}-\frac{1}{2}f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1})-\frac{1}{2}f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1})- -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}N_j^{(i)}[Z_{j1}-V_{j1}]=\beta_{i1}(x, t)\leqslant 0.$$

Доказательство. Решения уравнений (4) при нулевых условиях (2) даются [1] формулами

$$\sigma_i(x, t)=-\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\left|\alpha_i(\xi, \tau)\right| d\xi d\tau, \tag{7}$$

$$\omega_i(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\left|\beta_i(\xi, \tau)\right| d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau)=\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)\right\} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l}\xi \geqslant 0$$

при $0 \leqslant x, \xi, t \leqslant l$.

Подставляя соотношения (5) в первое из неравенств (6) и учитывая (7), получим

$$LZ_{i1}-\frac{1}{2} f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1})-\frac{1}{2} f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1})+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)}[Z_{j1}-V_{j1}]=LZ_i-L\sigma_i-\frac{1}{2} f_i(x, t, Z_1-\sigma_1, \ldots$$

$$\ldots, Z_r-\sigma_r)-\frac{1}{2} f_i(x, t, V_1-\omega_1, \ldots, V_r-\omega_r)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)}[Z_j-V_j]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)}[\sigma_j-\omega_j]=\alpha_1(x, t)+|\alpha_i(x, t)|+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)}\sigma_j(x, t)+\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)}\omega_j(x, t)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)}[\sigma_j-\omega_j]=\alpha_i(x, t)+|\alpha_i(x, t)|+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)}-N_j^{(i)}\right]\sigma_j(x, t)+\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)}+N_j^{(i)}\right]\omega_j(x, t)\right\}\geqslant 0,$$

где $\dfrac{\partial \widetilde{f}_i^{(k)}}{\partial U_j(x, t)}$ $(k=1,2)$—значения производных в некоторой точке области $\overline{D}$. Аналогично доказывается второе из неравенств (6).

Рассмотрим линейную систему

$$LU_i=\sum_{j=1}^{r} a_j^{(i)}(x, t)\, U_j^{1}(x, t)+f_i(x, t). \tag{8}$$

Будем считать, что при $(x, t)\in\overline{R}$ коэффициенты $a_j^{(i)}(x, t)$ и правые части $f_i(x, t)$ — непрерывные функции и, кроме того, $a_j^{(i)}(x, t)\leqslant 0$.

Аналогично доказательству теоремы 2 в работе [2] для системы (8) можно доказать теорему о дифференциальном неравенстве, которую используем в дальнейшем. Сформулируем эту теорему.

Теорема 1. *Пусть при $(x, t)\in\overline{R}$ существуют функции $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$, непрерывные вместе с производными, которые входят в LU_i, удовлетворяющие условиям* (2), *а подстановка их в систему* (8) *дает соответственно невязки $\alpha_{i1}(x, t)\geqslant 0$, $\beta_{i1}(x, t)\leqslant 0$. Тогда при $(x, t)\in\overline{R}$ в области $\overline{D}$ справедливы неравенства*

$$V_{i1}(x, t)\leqslant U_i(x, t)\leqslant Z_{i1}(x, t). \tag{9}$$

Построим, далее, последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$, плотнее охватывающие искомое решение задачи (1), (2), по [3] формулам:

$$Z_{i,n+1}(x, t) = Z_{in}(x, t) - \sigma_{in}(x, t),$$
$$V_{i,n+1}(x, t) = V_{in}(x, t) - \omega_{in}(x, t), \tag{10}$$

причем $\sigma_{in}(x, t)$ и $\omega_{in}(x, t)$ определим из систем

$$L\sigma_{in} = \alpha_{in}(x, t),$$
$$L\omega_{in} = \beta_{in}(x, t) \tag{11}$$

при нулевых условиях (2), а

$$\alpha_{in}(x, t) = LZ_{in} - \frac{1}{2} f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) - \frac{1}{2} f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) + + \frac{1}{2} A_n^{(i)}(x, t), \tag{12}$$

$$\beta_{in}(x, t) = LV_{in} - \frac{1}{2} f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) - \frac{1}{2} f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) - - \frac{1}{2} A_n^{(i)}(x, t),$$

где

$$A_n^{(i)}(x, t) = \sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)} [Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)].$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если при* $(x, t) \in \overline{R}$ $\alpha_{i1}(x, t) + \alpha_{i2}(x, t) \geqslant 0$, $\beta_{i1}(x, t) + \beta_{i2}(x, t) \leqslant 0$, *то последовательности функций* $\{Z_{in}(x, t)\}$ *и* $\{V_{in}(x, t)\}$, *определенных по закону* (10) — (12), *удовлетворяют неравенствам*

$$Z_{i,2k}(x, t) \leqslant U_i(x, t) \leqslant Z_{i,2k-1}(x, t),$$
$$V_{i,2k-1}(x, t) \leqslant U_i(x, t) \leqslant V_{i,2k}(x, t), \tag{13}$$

причем разности функций

$$[Z_{i,2k-1}(x, t) - V_{i,2k-1}(x, t)], [V_{i,2k}(x, t) - Z_{i,2k}(x, t)]$$

с ростом k абсолютно и равномерно стремятся к нулю, а $\{Z_{ik}(x, t)\}$ *и* $\{V_{ik}(x, t)\}$ *абсолютно и равномерно сходятся к единственному непрерывному решению задачи* (1), (2).

Доказательство. Покажем сначала, что $Z_{i1}(x, t) \geqslant V_{i1}(x, t)$. Для этого, введя обозначение $W_{in}(x, t) = Z_{in}(x, t) - V_{in}(x, t)$, из (6) получим уравнение

$$LW_{i1} = -\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)} W_{j1}(x,t) + \alpha_{i1}(x, t) - \beta_{i1}(x, t). \tag{14}$$

Так как коэффициенты этого уравнения неположительны, то для него справедлива сформулированная выше теорема 1. Условия (2) для $W_{i1}(x, t)$ являются нулевыми, а подстановка в (14) функций, тождественно равных нулю, дает невязки: $\beta_{i1}(x, t) - \alpha_{i1}(x, t) \leqslant 0$. Следовательно, $0 \leqslant W_{i1}(x, t)$, т. е. $Z_{i1}(x, t) \geqslant V_{i1}(x, t)$.

Поскольку $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $\beta_{i1}(x, t) \leqslant 0$, то из (11) имеем: $\sigma_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $\omega_{i1}(x, t) \leqslant 0$, поэтому из (10) получаем

$$Z_{i2}(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t), \quad V_{i2}(x, t) \geqslant V_{i1}(x, t). \tag{15}$$

Из соотношений (12), (10) и (11) будем иметь:

$$\alpha_{i2}(x; t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)} - N_j^{(i)}\right]\sigma_{j1}(x, t) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)} + N_j^{(i)}\right]\omega_{j1}(x, t)\right\} \leqslant 0,$$

$$\beta_{i2}(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)} - N_j^{(i)}\right]\omega_{j1}(x, t) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)} + N_j^{(i)}\right]\sigma_{j1}(x, t)\right\} \geqslant 0.$$

Тогда из (11) получаем: $\sigma_{i2}(x, t) \leqslant 0$, $\omega_{i2}(x, t) \geqslant 0$; следовательно, из (10) вытекает:

$$Z_{i3}(x, t) \geqslant Z_{i2}(x, t), \quad V_{i2}(x, t) \geqslant V_{i3}(x, t).$$

Согласно условию теоремы 2 имеем

$$L[Z_{i1} - Z_{i3}] = \alpha_{i1}(x, t) + \alpha_{i2}(x, t) \geqslant 0,$$
$$L[V_{i1} - V_{i3}] = \beta_{i1}(x, t) + \beta_{i2}(x, t) \leqslant 0,$$

поэтому, аналогично (7), получим неравенства

$$Z_{i1}(x, t) \geqslant Z_{i3}(x, t), \quad V_{i1}(x, t) \leqslant V_{i3}(x, t).$$

Из соотношений (12) при $n = 2$ аналогично получению уравнения (14) получаем уравнение

$$LW_{i2} = -\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)} W_{j2}(x, t) + \alpha_{i2}(x, t) - \beta_{i2}(x, t).$$

В силу теоремы 1, учитывая то, что $\beta_{i2}(x, t) - \alpha_{i2}(x, t) \geqslant 0$, получим $W_{i2}(x, t) \leqslant 0$, т. е. $Z_{i2}(x, t) \leqslant V_{i2}(x, t)$, следовательно, будем иметь $A_2^{(i)}(x, t) \leqslant 0$.

Аналогично $\alpha_{i2}(x, t)$ и $\beta_{i2}(x, t)$ методом математической индукции легко показать справедливость формул

$$\alpha_{i,n+1}(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)} - N_j^{(i)}\right]\sigma_{jn}(x, t) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)} + N_j^{(i)}\right]\omega_{jn}(x, t)\right\}, \tag{16}$$

$$\beta_{i,n+1}(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(1)}}{\partial U_j(x, t)} - N_j^{(i)}\right]\omega_{jn}(x, t) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \widetilde{f}_i^{(2)}}{\partial U_j(x, t)} + N_j^{(i)}\right]\sigma_{jn}(x, t)\right\}.$$

Из формул (16) и (11), учитывая то, что решения уравнений (11) при нулевых условиях (2) имеют вид

$$\sigma_{in}(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, \alpha_{in}(\xi, \tau)\, d\xi d\tau,$$

$$\omega_{in}(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, \beta_{in}(\xi, \tau)\, d\xi d\tau,$$

получим неравенства

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,2k-1}(x, t) \geqslant 0, \quad \alpha_{i,2k}(x, t) \leqslant 0, \\ &\beta_{i,2k-1}(x, t) \leqslant 0, \quad \beta_{i,2k}(x, t) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{i,2k-1}(x, t) \geqslant 0, \quad \sigma_{i,2k}(x, t) \leqslant 0, \\ &\omega_{i,2k-1}(x, t) \leqslant 0, \quad \omega_{i,2k}(x, t) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Из соотношений (12) получим

$$LW_{in} = -\sum_{j=1}^{r} N_j^{(i)}\, W_{jn}(x, t) + \alpha_{in}(x, t) - \beta_{in}(x, t). \tag{19}$$

Подстановка в уравнение (19) функций, тождественно равных нулю, дает невязки $\beta_{in}(x, t) - \alpha_{in}(x, t) = \gamma_{in}(x, t)$. Пусть $n = 2k$, тогда согласно (17) имеем: $\gamma_{i,2k}(x, t) = \beta_{i,2k}(x, t) - \alpha_{i,2k}(x, t) \geqslant 0$, следовательно, в силу теоремы 1 получим неравенства

$$Z_{i,2k}(x, t) \leqslant V_{i,2k}(x, t).$$

Если $n=2k-1$, тогда $\gamma_{i,2k-1}(x, t) \leqslant 0$ и будем иметь:

$$V_{i,2k-1}(x, t) \leqslant Z_{i,2k-1}(x, t).$$

Легко убедиться в том, что закон (10)—(12) построения функций $Z_{in}(x, t)$ и $V_{in}(x, t)$ совпадает с законом

$$LZ_{i,n+1} = \frac{1}{2} f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) + \frac{1}{2} f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) - \frac{1}{2} A_n^{(i)}(x, t), \tag{20}$$

$$LV_{i,n+1} = \frac{1}{2} f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) + \frac{1}{2} f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) + \frac{1}{2} A_n^{(i)}(x, t)$$

при условиях (2). Из соотношений (12) и (20) следует, что

$$\alpha_{i2}(x, t) + \alpha_{i3}(x, t) \leqslant 0, \quad \beta_{i2}(x, t) + \beta_{i3}(x, t) \geqslant 0.$$

Так как

$$L[Z_{i2} - Z_{i4}] = \alpha_{i2}(x, t) + \alpha_{i3}(x, t), \; L[V_{i2} - V_{i4}] = \beta_{i2}(x, t) + \beta_{i3}(x, t),$$

то $Z_{i2}(x,t) \leqslant Z_{i4}(x, t)$, $V_{i2}(x, t) \geqslant V_{i4}(x, t)$.

Продолжая этот процесс, получим неравенства

$$Z_{i,2k}(x, t) \leqslant Z_{i,2k-1}(x, t), \quad V_{i,2k-1}(x, t) \leqslant V_{i,2k}(x, t). \tag{21}$$

Неравенства (13) легко доказываются методом от противного.

Введя обозначения: $W_{i1}(x, t) \leqslant K$, $\int_0^t G(x, \xi, t-\tau)\, d\tau \leqslant A$, как и в [2], можно доказать, что последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$

абсолютно и равномерно сходятся к единственному непрерывному решению задачи (1), (2), а указанные в теореме разности функций монотонно стремятся к нулю, что и доказывает теорему 2.

В случае одного уравнения вида (1) с условиями (2), если $\frac{\partial f}{\partial U} \leqslant 0$, приведем доказательство теоремы, аналогичной теореме 1, отличное от доказательства в работе [2].

Теорема 3. *Пусть при* $(x, t) \in \overline{R}$ *в области* $\overline{D}$ *существует непрерывная функция* $V_1(x, t)$, *имеющая непрерывные производные всех тех порядков, которые входят в уравнение*

$$LU = f(x, t, U), \tag{22}$$

удовлетворяющая условиям

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

$$U(0, t) = \mu_1(t), \qquad U(l, t) = \mu_2(t), \; t \geqslant 0$$

и неравенству

$$LV_1 - f(x, t, V_1) = \gamma_1(x, t) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0). \tag{24}$$

Тогда при $(x, t) \in \overline{R}$ *имеет место неравенство*

$$V_1(x, t) \geqslant U(x, t) \quad |V_1(x, t) \leqslant U(x, t)|. \tag{25}$$

Доказательство. Обозначив $\Psi(x, t) = V_1(x, t) - U(x, t)$, из (22) и (24) получим

$$L\Psi - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial U}\Psi = \gamma_1(x, t) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

где $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial U}$ — значение производной в некоторой точке области $\overline{D}$, причем $\Psi(0, t) = 0$, $\Psi(l, t) = 0$, $\Psi(x, 0) = 0$. Покажем, что выражение

$$I = \iint\limits_{\overline{R}} \Psi\left(L\Psi - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial U}\Psi\right) dxdt \geqslant 0. \tag{26}$$

Действительно, применяя к (26) формулу Грина

$$\iint\limits_{\overline{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) dxdt = \int\limits_{s} Pdx + Qdt,$$

имеем

$$I = -\int\limits_{s} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} dt - \frac{1}{2}\int\limits_{s} \Psi^2 dx +$$

$$+ \iint\limits_{\overline{R}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 dxdt - \iint\limits_{\overline{R}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial U}\Psi^2 dxdt, \tag{27}$$

где s — контур, ограничивающий область $\overline{R}$. Действительно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},$$

$$-\Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2,$$

поэтому

$$I = \iint\limits_{\bar R} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t}\, dxdt - \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) dxdt + \iint\limits_{\bar R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 dxdt -$$

$$- \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial \tilde f}{\partial U} \Psi^2\, dxdt = \frac{1}{2} \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^2)\, dxdt - \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{\bar R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 dxdt - \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial \tilde f}{\partial U} \Psi^2 dxdt = - \int\limits_{s} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} dt - \frac{1}{2} \int\limits_{s} \Psi^2 dx -$$

$$- \iint\limits_{\bar R} \frac{\partial \tilde f}{\partial U} \Psi^2 dxdt + \iint\limits_{\bar R} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 dxdt.$$

Первый из криволинейных интегралов в выражении (27) равен нулю, так как $\Psi(x, t) = 0$ вдоль прямых $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$, а вдоль прямой $t = T$ дифференциал $dt = 0$. Второй из интегралов вдоль прямых $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$ равен нулю, а вдоль прямой $t = T$ он равен

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{s} \Psi^2 dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{x=l}^{x=0} \Psi^2 dx \geqslant 0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial \tilde f}{\partial U} \leqslant 0$, то неравенство (25) доказано. Из (25) следует, что $\Psi(x, t)$ не может быть отрицательной (положительной) всюду в области R. В самом деле, пусть в области R содержится область R_1, где функция $\Psi(x, t) < 0$ (> 0) при условии (24). Проведя относительно R_1 предыдущие рассуждения и учитывая то, что вдоль кривых, по которым происходит смена знака, $\Psi(x, t) = 0$, получим противоречие с (26). Теорема доказана.

Указанный алгоритм легко распространяется на системы уравнений с запаздыванием по времени

$$LU_i \equiv \frac{\partial U_i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial x^2} = f_i(x, t, U_1(x, t), \ldots, \quad U_r(x, t), \quad U_1(x, t - g_1(x, t)), \ldots,$$

$$U_r(x, t - g_r(x, t)) \equiv f_i[U_1, \ldots, U_r] \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

с начальными и краевыми условиями

$$U_i(x, 0) = \psi_i(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$U_i(0, t) = \mu_{i_1}(t); \quad U_i(l, t) = \mu_{i_2}(t), \quad t \geqslant 0; \quad U_i(x, t) = \varphi_i(x, t), \quad t \leqslant 0,$$

где $g_i(x, t) \leqslant t$ при $(t, x) \in [0, l]$ — непрерывные запаздывания аргумента t. Относительно f_i предполагается в области $\bar D$ непрерывность относительно всех аргументов и существование ограниченных производных $-M_j^i \leqslant \dfrac{\partial f_i}{\partial U_j(x, t)}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial U_j(x, t - g_j(x, t))} \leqslant M_j^{(i)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1966.
2. Ю. И. Ковач, Л. И. Савченко, О двустороннем итеративном методе решения краевой задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
3. Ю. И. Ковач, О краевой задаче для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка, Математическая физика, вып. 6, «Наукова думка», К., 1969.

Поступила 21.XII 1969 г.

Ужгородский государственный университет