УДК 517.946

Про асимптотичне розв'язування мішаної задачі для гіперболічного рівняння із запізненням аргументів

Е. Ш. Балла, І. І. Маркуш

Різні задачі з фізики і техніки зводяться до дослідження диференціальних рівнянь в частинних похідних з повільно змінними коефіцієнтами і запізненням в часовій координаті. Однак, при вивченні варіаційних і деяких інших задач зустрічаються також і крайові задачі із запізненням просторової незалежної змінної. Тому виникає необхідність вивчення рівнянь в частинних похідних із запізненням як в часовій, так і в просторовій координатах.

У цій статті ми досліджуємо лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних гіперболічного типу другого порядку з повільно змінними коефіцієнтами, що має змінне запізнення в часовій координаті і постійне запізнення в просторовій координаті.

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$u_{tt}(t,x)=L_0u(t,x)+a(\tau,x,\varepsilon)u(t,x)+a_1(\tau,x,\varepsilon)u(t-\Delta(\tau),x-\delta)+$$
$$+b(\tau,x,\varepsilon)u_x(t,x)+b_1(\tau,x,\varepsilon)u_x(t-\Delta(\tau),x-\delta)+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=1}^{N}f_j(\tau,x,\varepsilon)\exp\{i\theta_j(t,\varepsilon)\} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(t,x)=\varphi(t,x),\ u_t(t,x)=\psi(t,x),\quad \text{коли}\ -\tau_0\leqslant t\leqslant 0, \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$u_x(t,0)+h_1(\tau,\varepsilon)u(t,0)=\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mu_{1j}(t)\exp\{i\theta_j(t,\varepsilon)\};$$
$$u_x(t,\pi)+h_2(\tau,\varepsilon)u(t,\pi)=\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mu_{2j}(t)\exp\{i\theta_j(t,\varepsilon)\}; \tag{3}$$
$$u(t,x)\equiv 0\ \text{для}\ x-\delta<0, \tag{4}$$

де $L_0u(t,x)=(p(x)u_x)_x-q(x)u$, $\tau=\varepsilon t$ (повільний час), ε — малий додатний параметр $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant\Delta(\tau)\leqslant\tau_0$, $0\leqslant\tau\leqslant L$ (L — стала величина), $\dfrac{d\theta_j}{dt}=k_j(\tau)$ ($k_j(\tau)$ — повільно змінні функції). Функції $k_j(\tau)$ і $\Delta(\tau)$ ($j=1,2,\ldots,N$), достатнє число раз диференційовні по τ, $\delta>0$ (δ — стала величина), функція $p(x)$ — двічі неперервно диференційовна по x, причому $p(x)>0$, а $q(x)$ — неперервна і $q(x)\geqq 0$; $h_1(\tau,\varepsilon)$, $h_2(\tau,\varepsilon)$ — задані неперервні повільно змінні функції, що мають асимптотичне зображення у вигляді рядів за степенями малого параметра ε. Умови, які потрібно накласти на початкові функції і інші коефіцієнти рівняння, будуть вказані далі.

Побудову асимптотичних розв'язків для рівнянь без загаювання зі сталими однорідними граничними умовами першого типу і головною частиною в рівнянні $L_0 u = u_{xx}$ дано в праці [1]. Диференціальні рівняння без запізнення із змінними однорідними граничними умовами і сталими коефіцієнтами в головній частині вивчались у праці [2]. Побудову асимптотичних розв'язків для рівняння із змінними коефіцієнтами в головній частині і сталими онорідними граничними умовами третього типу дано в статті [3]. У праці [4] одержані результати в [3] узагальнюються на рівняння із запізнюванням в часовій координаті, причому подається тільки формальний розв'язок без доведення його асимптотичного характеру.

Зауважимо, що у випадку скінченної системи звичайних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами і запізненням аргументу, побудову формальних розв'язків дано в працях [5 і 6].

Ми узагальнюємо одержані раніше результати на випадок одночасного запізнення в обох незалежних змінних і розглядаємо нестаціонарні повільно змінні граничні умови, праві частини яких мають вигляд, подібний до вимушеної сили в розглядуваному рівнянні.

Розв'язувати поставлену задачу ми будемо за такою схемою: спочатку зведемо її до вигляду, зручного для застосування узагальненого методу Фур'є, потім будуємо формальний розв'язок одержаної задачі Коші для нескінченної системи диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням аргументу і доводимо його асимптотичний характер, довівши спочатку існування і єдиність розв'язку цієї задачі. Нарешті, подаємо обгрунтування узагальненого методу Фур'є і доводимо асимптотичний характер розв'язку вихідної мішаної задачі.

§ 1. Розв'язок мішаної задачі (1) — (3) спочатку шукаємо у вигляді:

$$u(t, x) = v(t, x) + \varepsilon Q(\tau, x, \varepsilon), \tag{5}$$

де $Q = \dfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(x - \delta))\,\Omega(\tau, x, \varepsilon)$, v — нова невідома функція, а функцію Ω для $\tau \in [0, L]$ і $x \in [0, \pi]$ знаходимо як розв'язок задачі

$$\Omega_{xx} = 0; \tag{6}$$

$$(\Omega_x + h_1 \Omega)_{x=0} = \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \mu_{1j}(t) \exp\{i\theta_j(t, \varepsilon)\}; \tag{7}$$

$$(\Omega_x + h_2 \Omega)_{x=\pi} = \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \mu_{2j}(t) \exp\{i\theta_j(t, \varepsilon)\}. \tag{8}$$

Неважко переконатися в тому, що при такому виборі функції $\Omega(\tau, x, \varepsilon)$ рівняння, одержане після підстановки (5) в (1), дещо спроститься (оскільки $\Omega_{xx} = 0$) і граничні умови для нової шуканої функції v стануть однорідними того ж типу. Зауважимо, що для $x - \delta < 0$ функція $Q(\tau, x, \varepsilon) \equiv 0$ за її побудовою.

Розв'язуючи задачу (6) — (8), знаходимо вираз для функції Ω:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} [(1 + \pi h_2)\mu_{1j} + x(h_1 \mu_{2j} - h_2 \mu_{1j})](h_1 + \pi h_2 h_1 - h_2)^{-1}. \tag{9}$$

Відносно невідомої функції $v(t, x)$ одержимо таку мішану задачу:

$$v_{tt} = L_0 v + av + a_1 v^{\Delta,\delta} + bv_x + b_1 v_x^{\Delta,\delta} + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_j(\tau, x, \varepsilon) \exp\{i\theta_j\} \tag{10}$$

з початковими умовами*

$$v(t, x) = \overline{\varphi}(t, x, \varepsilon), \ v_t(t, x) = \overline{\psi}(t, x, \varepsilon) \text{ при } -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0 \tag{11}$$

і крайовими умовами

$$(v_x + h_1 v)_{x=0} = 0; \qquad (v_x + h_2 v)_{x=\pi} = 0; \tag{12}$$

$$v(t, x) \equiv 0 \text{ для } x - \delta < 0, \tag{13}$$

де $\sum_{j=1}^{N} F_j(\tau, x, \varepsilon) = L_0\Omega - \Omega_{tt} + (a + b)\Omega + a_1\Omega^{\Delta,\delta} + b_1\Omega_x^{\Delta,\delta} + \sum_{j=1}^{N} f_j(\tau, x, \varepsilon)$; $\overline{\varphi}(t, x, \varepsilon) = \varphi(t, x) - \varepsilon Q(\tau, x, \varepsilon)$, $\overline{\psi}(t, x, \varepsilon) = \psi(t, x) - \varepsilon Q(\tau, x, \varepsilon)$.

Підберемо тепер якусь нову невідому функцію $Z(t, x)$ так, щоб у крайових умовах відносно цієї функції не було коефіцієнтів, що залежать від змінної τ.

Неважко переконатися в тому, що заміна

$$v(t, x) = Z(t, x) \cdot \exp\{Y(\tau, x, \varepsilon)\}, \tag{14}$$

де функція Y вибирається так:

$$Y(\tau, x, \varepsilon) = -x\left\{h_1(\tau, \varepsilon) + \frac{x}{2\pi}[h_2(\tau, \varepsilon) - h_1(\tau, \varepsilon)]\right\}, \tag{14'}$$

зводить задачу (10) — (13) до такої мішаної задачі відносно вказаної функції Z:

$$Z_{tt} = L_0 Z + \overline{a}Z + \overline{b}Z^{\Delta,\delta} + cZ_x + dZ_x^{\Delta,\delta} + fZ_t + \varepsilon\sum_{j=1}^{N} F_j^*(\tau, x, \varepsilon)\exp\{i\theta_j\} \tag{15}$$

з початковими умовами

$$Z(t, x) = \overline{\overline{\varphi}}(t, x, \varepsilon), \quad Z_t(t, x) = \overline{\overline{\psi}}(t, x, \varepsilon) \text{ при } -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0 \tag{16}$$

і крайовими умовами

$$Z_x(t, 0) = 0; \quad Z_x(t, \pi) = 0; \tag{17}$$

$$Z(t, x) \equiv 0, \text{ для } x - \delta < 0, \tag{18}$$

де $\overline{a}(\tau, x, \varepsilon) = (pY_x)_x + pY_x^2 - Y_{tt} - Y_t^2 + a + bY_x$; $\overline{b}(\tau, x, \varepsilon) = (a_1 + b_1 Y_x^{\Delta,\delta}) \times \times \exp\{Y^{\Delta,\delta} - Y\}$; $c(\tau, x, \varepsilon) = b + 2pY_x$; $d(\tau, x, \varepsilon) = b_1\exp\{Y^{\Delta,\delta} - Y\}$; $f(\tau, x, \varepsilon) = -2Y_t$; $F_j^*(\tau, x, \varepsilon) = F_j \cdot \exp\{-Y\}$; $\overline{\overline{\varphi}}(t, x, \varepsilon) = \overline{\varphi} \cdot \exp\{-Y\}$; $\overline{\overline{\psi}}(t, x, \varepsilon) = \overline{\psi} \cdot \exp\{-Y\}$.

Допускаємо, що функції $\overline{a}$, $\overline{b}$, c, d, f і F_j^* мають достатню кількість неперервних частинних похідних по τ і мають зображення у вигляді асимптотичних рядів:

$$\overline{a} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \overline{a}_s(\tau, x); \quad \overline{b} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \overline{b}_s(\tau, x); \quad c = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s c_s(\tau, x);$$

$$d = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s d_s(\tau, x); \quad f = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau, x); \quad F_j^* = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s F_{js}^*(\tau, x). \tag{19}$$

* Надалі для спрощення введемо такі позначення: $F^{\Delta,\delta} = F(t - \Delta(\tau), x - \delta)$, $F^{\Delta} = F(t - \Delta(\tau), \varepsilon)$, $F^{\delta} = F(x - \delta)$; при відсутності запізнення функцію будемо позначати тільки однією буквою: a, F_j, G_{nk} і т. д.

§ 2. Розглянемо задачу (15) — (18). Розв'язок її будемо шукати у вигляді

$$Z(t, x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t, \varepsilon) \cdot W_n(x), \tag{20}$$

де $W_n(x)$ — власні функції задачі Штурма — Ліувілля

$$L_0[W(x)] = -\lambda W(x); \tag{21}$$

$$W'(0) = 0; \qquad W'(\pi) = 0; \tag{22}$$

$$W(x) \equiv 0 \text{ для } x - \delta, \tag{23}$$

яка одержується для незбуреної мішаної задачі (якщо в задачі (15) — (18) покласти $\varepsilon = 0$), застосувавши до неї метод Фур'є.

Підставляючи функцію $Z(t, x, \varepsilon)$ за формулою (20) та її похідні по t і x в рівняння (15) і враховуючи (21), знаходимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n'' + \lambda_n z_n) W_n = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} L_1(W_n) z_n + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} L_2(W_n) z_n^{\Delta} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} L_3(W_n) z_n' + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_j^* \cdot \exp\{i\theta_j\}, \tag{24}$$

де $L_1(W_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s (\overline{a}_{s+1} W_n + c_{s+1} W_n')$; $L_2(W_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s (\overline{b}_{s+1} W_n^{\delta} + d_{s+1} W_n'^{\delta})$;

$L_3(W_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_{s+1} \cdot W_n$.

Розвинемо функції $L_i(W_n)$ $(i = 1, 2, 3)$ і $F_j^*(\tau, x, \varepsilon)$ в ряди Фур'є за власними функціями крайової задачі (21), (22) та позначимо коефіцієнти цих розвинень відповідно через $G_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $Q_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $R_{nk}(\tau, \varepsilon)$ і $F_{jn}^*(\tau, \varepsilon)$:

$$G_{nk}(\tau, \varepsilon) = \int_0^{\pi} L_1(W_n) W_k(x)\, dx; \qquad Q_{nk}(\tau, \varepsilon) = \int_0^{\pi} L_2(W_n) W_k(x)\, dx;$$

$$R_{nk}(\tau, \varepsilon) = \int_0^{\pi} L_3(W_n) W_k(x)\, dx; \qquad F_{jn}^*(\tau, \varepsilon) = \int_0^{\pi} F_j^*(\tau, x, \varepsilon) W_n(x)\, dx.$$

Припускаючи, що подвійні суми по n і k можна переставляти, із співвідношення (24) одержуємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням аргументу, повільно змінними коефіцієнтами і малим параметром

$$z_n'' + \lambda_n z_n = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} z_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} z_k^{\Delta} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk} z_k' + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_{jn}^* \exp\{i\theta_j\}. \tag{25}$$

З умов (16) одержуємо початкові умови для $z_n(t, \varepsilon)$:

$$z_n(t, \varepsilon) = \overline{\overline{\varphi}}_n(t, \varepsilon), \quad z_n'(t, \varepsilon) = \overline{\overline{\psi}}_n(t, \varepsilon) \text{ при } -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0, \tag{26}$$

де $\overline{\overline{\varphi}}_n$, $\overline{\overline{\psi}}_n$ — коефіцієнти Фур'є в розвиненні функцій $\overline{\overline{\varphi}}(t, x, \varepsilon)$ і $\overline{\overline{\psi}}(t, x, \varepsilon)$ в ряди за власними функціями крайової задачі (21), (22):

$$\overline{\overline{\varphi}}_n(t, \varepsilon) = \int_0^{\pi} \overline{\overline{\varphi}}(t, x, \varepsilon) W_n(x)\, dx; \qquad \overline{\overline{\psi}}_n(t, \varepsilon) = \int_0^{\pi} \overline{\overline{\psi}}(t, x, \varepsilon) W_n(x)\, dx.$$

Таким чином, мішана задача (15) — (18), а значить і задача (1) — (4), формально звелась до крайової задачі (21), (22)* і задачі Коші для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (25) з початковими умовами (26).

Відносно коефіцієнтів системи (25) припустимо, що вони диференційовні по τ і ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(G_{nk})\right|^2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(Q_{nk})\right|^2;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(R_{nk})\right|^2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left|\frac{d^p}{d\tau_p}(F_{jn}^*)\right|^2 \qquad (p=0,1,2,\ldots) \tag{27}$$

збігаються абсолютно і рівномірно**. Ці умови потрібні для обгрунтування асимптотичного методу при побудові необхідних наближень. Зрозуміло, що всі вони будуть випливати із загальних умов, що накладаються на коефіцієнти $\bar{a}_s$, $\bar{b}_s$, c_s, d_s, f_s і F_{js}^* (ці умови будуть вказані пізніше), але вони виконуються і тоді, коли вказані коефіцієнти та їх похідні по τ інтегровані з квадратом на відрізку $[0, \pi]$.

§ 3. При розв'язуванні задачі Коші (25), (26) розглядаємо два випадки:

1. «Резонансний», коли при деяких значеннях τ і деякому λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ одна або декілька функцій $k_l^2(\tau)$ $(l=1,2,\ldots,r;\ 1\leqslant r\leqslant N)$ дорівнюють одному або декільком дійсним кореням рівняння

$$-\mu^2+\lambda_n=0. \tag{28}$$

2. «Нерезонансний», коли жодна із функцій $k_l^2(\tau)$ не дорівнює ні одному із коренів рівняння (28).

В «резонансному» випадку має місце така теорема.

Теорема 1. *Якщо функції* $G_{nk}(\tau,\varepsilon)$, $Q_{nk}(\tau,\varepsilon)$, $R_{nk}(\tau,\varepsilon)$ *і* $F_{jn}^*(\tau,\varepsilon)$ *необмежено диференційовні по* τ *і виконуються умови* (27), *то формальний розв'язок системи* (25) *можна зобразити у такому вигляді*:

$$z_n(t,\varepsilon)=\sum_{l=1}^{r}\{[\delta_{n,1}+\Pi_n(\tau,\varepsilon)]\,\xi_l(t)+P_{nl}(\tau,\varepsilon)\}\exp\{i\theta_l\}+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=r+1}^{N}T_{jn}(\tau,\varepsilon)\exp\{i\theta_j\}, \tag{29}$$

де $\delta_{n,1}$ — *символ Кронекера, а* $\xi_l(t)=\alpha_l(t)+i\beta_l(t)$ $(l=1,2,\ldots,r)$ *визначаються із системи рівнянь першого порядку*

$$\xi_l'(t)=\{D(\tau,\varepsilon)+i\,[\omega(\tau,\varepsilon)-k_l(\tau)]\}\,\xi_l(t)+S_l(\tau,\varepsilon), \tag{30}$$

причому невідомі функції співвідношень (29), (30) *мають вигляд*:

$$\Pi_n(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\Pi_n^{(s)}(\tau);\qquad P_{nl}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^sP_{nl}^{(s)}(\tau);\qquad \omega(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\omega_s(\tau);$$
$$T_{jn}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^sT_{jn}^{(s)}(\tau);\qquad D(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^sD_s(\tau);\qquad S_l(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^sS_l^{(s)}(\tau). \tag{31}$$

---

* Результати, що стосуються крайової задачі (21), (22), можна знайти, наприклад, в книжці [7].

** За похідну нульового порядку будемо вважати саму функцію.

Доведення теореми 1 полягає в тому, щоб вказати алгоритм побудови функцій, що входять в асимптотичні зображення (31), причому так, щоб послідовність z_n формули (29) задовольняла систему (25).

Підставляючи вираз (29) і його похідні по t в систему (25), враховуючи (30) і вираз для $z_n(t-\Delta(\tau), \varepsilon)$ вигляду

$$z_n^{\Delta} = \sum_{l=1}^{r} \left\{ [\delta_{n,1} + \Pi_n(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon)] \exp\left\{ \int_t^{t-\Delta(\tau)} [D + i(\omega - k_l)]\, dt \right\} \times \right.$$
$$\times \left(\xi_l + \int_t^{t-\Delta(\tau)} S_l(\tau_1, \varepsilon) \exp\left\{ -\int_t^{t_1} [D + i(\omega - k_l)]\, dt' \right\} dt_1 \right) +$$
$$\left. + P_{nl}(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) \right\} \exp\{i\theta_l(t - \Delta(\tau), \varepsilon)\} + \sum_{j=r+1}^{N} T_{jn}(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) \times$$
$$\times \exp\{i\theta_j(t - \Delta(\tau), \varepsilon)\}$$

та зрівнюючи коефіцієнти при $\xi_l \exp\{i\theta_l\}$, $\exp\{i\theta_l\}$, $\exp\{i\theta_j\}$ $(l = 1, \ldots, r;$ $1 \leqslant r \leqslant N;$ $j = 1, 2, \ldots, N)$, знаходимо такі співвідношення:

$$(\delta_{n,1} + \Pi_n)(D + i\omega)^2 + \varepsilon(\delta_{n,1} + \Pi_n)(D' + i\omega') + \varepsilon^2\Pi_n'' + \lambda_n(\delta_{n,1} + \Pi_n) =$$
$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(\delta_{k,1} + \Pi_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\delta_{k,1} + \Pi_k) \exp\left\{ \int_t^{t-\Delta(t)} (D + i\omega)\, dt \right\} +$$
$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk}[(\delta_{k,1} + \Pi_k)(D + i\omega) + \varepsilon\Pi_k'] \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{32}$$

$$(\delta_{n,1} + \Pi_n)[(D + i\omega) S_l + ik_l S_l + \varepsilon S_l'] + 2i\varepsilon k_l P_{nl}' + i\varepsilon k_l' P_{nl} +$$
$$+ 2\varepsilon S_l \Pi_n' + \varepsilon^2 P_{nl}'' + P_{nl}(\lambda_n - k_l^2) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} P_{kl} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} (\delta_{k,1} + \Pi_k) \times$$
$$\times \exp\left\{ \int_t^{t-\Delta(\tau)} [D + i(\omega - k_l)]\, dt \right\} \times \int_t^{t-\Delta(\tau)} S_l(\tau_1, \varepsilon) \times$$
$$\times \exp\left\{ -\int_t^{t_1} [D + i(\omega - k_l)]\, dt \right\} dt_1 + P_{kl} \Bigg\} \exp\left\{ i \int_t^{t-\Delta(\tau)} k_l dt \right\} +$$
$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [(\delta_{k,1} + \Pi_k) S_l + ik_l P_{kl} + \varepsilon P_{kl}'] + F_{ln}^* \quad (n = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, r); \tag{33}$$

$$i\varepsilon k_j' T_{jn} + 2i\varepsilon k_j T_{jn}' + \varepsilon^2 T_{jn}'' + T_{jn}(\lambda_n - k_j^2) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} T_{jk} +$$
$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} T_{jk}(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) \exp\left\{ i \int_t^{t-\Delta(\tau)} k_j dt \right\} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [\varepsilon R_{nk} T_{jk}' +$$
$$+ ik_j R_{nk} T_{jk}] + F_{jn}^* \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ j = r + 1,\ r + 2, \ldots, N). \tag{34}$$

§ 4. Для знаходження коефіцієнтів зображень (31), розвинемо в співвідношеннях (32) — (34) функції

$$\exp\left\{ i \int_t^{t-\Delta(\tau)} k_l dt \right\}, \quad \exp\left\{ \int_t^{t-\Delta(\tau)} (D + i\omega)\, dt \right\},$$
$$\int_t^{t-\Delta(\tau)} S_l \exp\left\{ -\int_t^{t_1} [D + i(\omega - k_l)]\, dt' \right\} dt_1,$$

в ряди за степенями ε

$$\exp\left\{\int_{t}^{t-\Delta(\tau)} (D+i\omega)\,dt\right\} = \exp\{-i\Delta\omega_0\} \times$$

$$\times\left\{1+\varepsilon\left[-\Delta(D_1+i\omega_1)+i\omega_0'\frac{\Delta^2}{2}\right]+\varepsilon^2\ldots\right\};$$

$$\exp\left\{i\int_{t}^{t-\Delta(\tau)} k_l dt\right\} = \exp\{-i\Delta k_l\}\left\{1+\varepsilon i k_j'\frac{\Delta^2}{2}\exp\{-i\Delta k_j\}+\varepsilon^2\ldots\right\};$$

$$\exp\left\{\int_{t}^{t-\Delta(\tau)} (D+i\omega)\,dt\right\}\int_{t}^{t-\Delta(\tau)} S_l\exp\left\{-\int_{t}^{t_1}[D+i(\omega-k_l)]\,dt'\right\}dt_1 =$$

$$=\varepsilon(-\Delta S_l^{(1)}\exp\{-i\Delta\omega_0\})+\varepsilon^2\exp\{-i\Delta\omega_0\}\left\{\Delta S_l^{(1)}\left[\int_{0}^{\pi}(D_2+i\omega_2)\,d\tau-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Delta(D_1+i\omega_1)\right]+\Delta^2 S_l'^{(1)}-2\Delta S_l^{(2)}+\Delta^2 S_l^{(1)}(D_1+i\omega_1)-i\omega_0'\frac{\Delta^3}{2}S_l^{(1)}\right\}+\varepsilon^3\ldots;$$

$$P_{nl}(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\exp\left\{i\int_{t}^{t-\Delta(\tau)} k_l dt\right\} = \varepsilon P_{nl}^{(1)}\exp\{-i\Delta k_l\}+$$

$$+\varepsilon^2\exp\{-i\Delta k_l\}\left[ik_l'\frac{\Delta^2}{2}P_{nl}^{(1)}-\Delta P_{nl}'^{(1)}\right]+\varepsilon^3\ldots$$

та зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^0 із співвідношення (32) одержуємо: $\delta_{n,1}[\lambda_n-\omega_0^2(\tau)]=0$, звідки при $n=1$ маємо

$$\omega_0(\tau)=\pm\sqrt{\lambda_1}. \tag{35}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^1 в співвідношенні (32), одержимо:

$$2i\omega_0(D_1+i\omega_1)\delta_{n,1}+\Pi_n^{(1)}(\lambda_n-\omega_0^2)=\sum_{k=1}^{\infty}G_{nk}^{(0)}\delta_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}i\omega_0 R_{nk}^{(0)}\delta_{k,1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}Q_{nk}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}\delta_{k,1},$$

звідки для $n=1$ маємо

$$D_1+i\omega_1=(2i\omega_0)^{-1}[G_{11}^{(0)}+i\omega_0 R_{11}^{(0)}+Q_{11}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}], \tag{36}$$

а при $n\geq 2$

$$\Pi_n^{(1)}(\tau)=(\lambda_n-\omega_0^2)^{-1}[G_{n1}^{(0)}+i\omega_0 R_{n1}^{(0)}+Q_{n1}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}]. \tag{37}$$

Легко бачити, що функція $\Pi_1^{(1)}(\tau)$ не визначена, вона може бути довільною (покладемо її рівною нулю).

Із формул (36), (37) видно, що функції $D_1+i\omega_1$, $\Pi_n^{(1)}(\tau)$ диференційовні по τ.

Покажемо тепер, що ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2|\Pi_k^{(1)}(\tau)|^2$ збігається абсолютно і рівномірно.

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2\,|\,\Pi_k^{(1)}\,|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\lambda_0^2}\right)^{-2}|\,G_{k1}^{(0)}+i\omega_0R_{k1}^{(0)}+Q_{k1}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}\,|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}|\,G_{k1}^{(0)}+Q_{k1}^{(0)}\,|^2+\sum_{k=2}^{\infty}|\,Q_{k1}^{(0)}+\omega_0R_{k1}^{(0)}\,|^2. \qquad (37')$$

Наше твердження буде доведено, якщо покажемо абсолютну і рівномірну збіжність рядів правої частини нерівності (37′). Для цього досить довести рівномірну збіжність рядів $\sum\limits_{n,k=2}^{\infty}G_{n1}^{(0)}\cdot Q_{k1}^{(0)}$, $\sum\limits_{n,k=2}^{\infty}Q_{n1}^{(0)}R_{k1}^{(0)}$. Збіжність решти рядів буде випливати із умов (27).

Застосовуючи нерівність Буняковського, маємо

$$\sum_{n,k=2}^{\infty}|\,G_{n1}^{(0)}Q_{k1}^{(0)}\,|\leqslant\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}|\,G_{n1}^{(0)}\,|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty}|\,Q_{k1}^{(0)}\,|^2}.$$

Ряди під знаком квадратних коренів збігаються абсолютно і рівномірно. Тому наше твердження повністю доведено.

Аналогічно ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(\Pi_k^{(1)}(\tau))\right|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\lambda_k^2}\right)^{-2}\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(G_{k1}^{(0)}+i\omega_0R_{k1}^{(0)}+Q_{k1}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\})\right|^2$$

збігається абсолютно і рівномірно в силу тих же умов (27) при $k=1$.

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^2 в рівності (32), дістанемо:

$$2i\omega_0(D_2+i\omega_2)\delta_{n,1}+(D_1+i\omega_1)^2\delta_{n,1}+(D_1'+i\omega_1')\delta_{n,1}+\Pi_n^{(2)}(\lambda_n-\omega_0^2)+$$

$$+2i\omega_0\Pi_n^{(1)}(D_1+i\omega_1)+2i\omega_0\Pi_n'^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}G_{nk}^{(1)}\delta_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}G_{nk}^{(0)}\Pi_k^{(1)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}R_{nk}^{(0)}(D_1+i\omega_1)\delta_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}i\omega_0R_{nk}^{(1)}\delta_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}i\omega_0R_{nk}^{(0)}\Pi_k^{(1)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}Q_{nk}^{(1)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}\delta_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}Q_{nk}^{(0)}\left[-\Delta(D_1+i\omega_1)+i\omega_0'\frac{\Delta^2}{2}\right]\delta_{k,1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}Q_{nk}^{(0)}\Pi_k^{(1)}\exp\{-i\Delta\omega_0\},$$

звідки для $n=1$ маємо

$$D_2+i\omega_2=(2i\omega_0)^{-1}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\Pi_k^{(1)}(G_{1k}^{(0)}+i\omega_0R_{1k}^{(0)}+Q_{1k}^{(0)}\exp\{-i\Delta\omega_0\})+\right.$$

$$+G_{11}^{(1)}+R_{11}^{(0)}(D_1+i\omega_1)+i\omega_0R_{11}^{(1)}+Q_{11}^{(1)}\exp\{-i\Delta\omega_0\}+$$

$$\left.+Q_{11}^{(0)}\left[-\Delta(D_1+i\omega_1)+i\omega_0'\frac{\Delta^2}{2}\right]-(D_1+i\omega_1)^2-(D_1'+i\omega_1')\right\},$$

а при $n \geq 2$ одержуємо

$$\Pi_n^{(2)}(\tau) = (\lambda_n - \omega_0^2)^{-1} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \Pi_k^{(1)} (G_{nk}^{(0)} + i\omega_0 R_{nk}^{(0)} + Q_{nk}^{(0)} \exp\{-i\Delta\omega_0\}) + \right.$$
$$+ G_{n1}^{(1)} + R_{n1}^{(0)} (D_1 + i\omega_1) + i\omega_0 R_{n1}^{(1)} + Q_{n1}^{(1)} \exp\{-i\Delta\omega_0\} +$$
$$\left. + Q_{n1}^{(0)} \left[-\Delta (D_1 + i\omega_1) + i\omega_0' \frac{\Delta^2}{2} \right] - 2i\omega_0 \Pi_n^{(1)} (D_1 + i\omega_1) - 2i\omega_0 \Pi_n^{\prime(1)} \right\}.$$

Функція $\Pi_1^{(2)}(\tau)$ не визначена. Вона може бути довільною (приймемо такою, що дорівнює нулю).

Для доведення можливості диференціювання по τ функції $D_2 + i\omega_2$ покажемо, що ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |\Pi_k^{(1)} (i\omega_0 R_{1k}^{(0)} + G_{1k}^{(0)} + Q_{1k}^{(0)} \exp\{-i\Delta\omega_0\})|$ збігається абсолютно і рівномірно, а також абсолютно і рівномірно збігаються ряди, одержані почленним диференціюванням його по τ, $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Дійсно, застосовуючи нерівність Буняковського, маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} |\Pi_k^{(1)} (G_{1k}^{(0)} + i\omega_0 R_{1k}^{(0)} + Q_{1k}^{(0)} \exp\{-i\Delta\omega_0\})| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 |\Pi_k^{(1)}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} | G_{1k}^{(0)} + i\omega_0 R_{1k}^{(0)} + Q_{1k} \exp\{-i\Delta\omega_0\}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 |\Pi_k^{(1)}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} | G_{1k}^{(0)} + Q_{1k}^{(0)}|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} | Q_{1k}^{(0)} + \omega_0 R_{1k}^{(0)}|^2}.$$

У правій частині одержаної нерівності під знаком квадратних коренів знаходяться абсолютно і рівномірно збіжні ряди (це було доведено вище). Тому перша частина нашого твердження доведена. Абсолютна і рівномірна збіжність ряду $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^p}{d\tau^p} [(G_{1k}^{(0)} + i\omega_0 R_{1k}^{(0)} + Q_{1k}^{(0)} \exp\{-i\Delta\omega_0\}) \cdot \Pi_k^{(1)}]$ доводиться аналогічно за допомогою нерівності Буняковського і умов (27). Аналогічно доводиться диференційовність по τ функцій $\Pi_k^{(s)}(\tau)$ $(s = 2, 3, \ldots)$ і рівномірна збіжність $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 |\Pi_k^{(s)}(\tau)|^2$, $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (\Pi_k^{(s)}) \right|^2$.

Вказаний процес знаходження коефіцієнтів $D_s + i\omega_s$, $\Pi_n^{(s)}(\tau)$ $(s=3, 4, \ldots)$ може бути продовжений до безмежності.

§ 5. Перейдемо до знаходження коефіцієнтів $P_{nl}^{(s)}(\tau)$ і $S_l^{(s)}(\tau)$ $(l=1, 2, \ldots, r;\ 1 \leqslant r \leqslant N;\ s = 1, 2, \ldots)$. Для цього зрівнюємо коефіцієнти в співвідношенні (33) при однакових степенях ε.

При ε^1 одержимо: $i\omega_0 S_l^{(1)} \delta_{n,1} + ik_l S_l^{(1)} \delta_{n,1} + (\lambda_n - k_l^2) P_{nl}^{(1)} = F_{ln}^{*(0)}$, звідки для $n = 1$ в силу розглядуваного «резонансного» випадку дістанемо:

$$S_l^{(1)}(\tau) = [i(k_l + \omega_0)]^{-1} F_{l1}^{*(0)}, \tag{38}$$

а при $n \geq 2$

$$P_{nl}^{(1)}(\tau) = (\lambda_n - k_l^2)^{-1} F_{ln}^{*(0)}. \tag{39}$$

Функції $P_{1l}^{(1)}$ через свою невизначеність можуть бути довільними (приймемо їх рівними нулю).

Покажемо тепер, що ряди $\sum_{k=2}^{\infty} |P_{kl}^{(1)}(\tau)|^2$ і $\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{d^p}{d\tau^p}(P_{kl}^{(1)})\right|^2$ $(p=1, 2, \ldots)$ рівномірно збігаються для всіх τ, $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Дійсно, із (39) маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} |P_{kl}^{(1)}|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}\left(1-\frac{k_l^2}{\lambda_k}\right)^{-2} |F_{lk}^{*(0)}|^2 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} |F_{lk}^{*(0)}|^2. \tag{40}$$

Тут, як і раніше, ми користуємося фактом, що $\left(1-\frac{k_l^2}{\lambda_k}\right) \to 1$ при $k \to \infty$ (оскільки $\lambda_k \to \infty$, коли $k \to \infty$). Через те що функції $k_l(\tau)$ обмежені на $[0, L]$, то в силу умов (27) розглядуваний ряд (40) збігається абсолютно і рівномірно.

Розглянемо ряди для похідних

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{d^p}{d\tau_p}(P_{kl}^{(1)})\right|^2 = \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{\mu=0}^{p} a_p^{\mu} \frac{d^{p-\mu}}{d\tau^{p-\mu}}\left[\left(1-\frac{k_l^2}{\lambda_k}\right)^{-1}\right]\cdot\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{d^{\mu}}{d\tau^{\mu}}(F_{lk}^{*(0)})\right|. \tag{41}$$

Зауважимо, що для довільних μ і p і для всіх $k \geqq 2$ функції $\frac{d^{p-\mu}}{d\tau^{p-\mu}}\left[\left(1-\frac{k_l^2}{\lambda_k}\right)^{-1}\right]$ обмежені. Це випливає з того, що функції $k_l(\tau)$ та їх похідні по τ обмежені на сегменті $[0, L]$ і $k_l^2(\tau) \neq \lambda_n$ для $n \geqq 2$. На цій підставі із умов (27) ряд (41) збігається абсолютно і рівномірно.

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^2 в рівності (33), дістанемо:

$$(D_1 + i\omega_1) S_l^{(1)}\delta_{n,1} + i(\omega_0 + k_l) S_l^{(1)}\Pi_n^{(1)} + S_l^{(1)}\delta_{n,1} + i(\omega_0 + k_l) S_l^{(2)}\delta_{n,1} +$$
$$+ 2ik_l P_{nl}^{\prime(1)} + ik_l^{\prime} P_{nl}^{(1)} + (\lambda_n - k_l^2) P_{nl}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} ik_l P_{kl}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} S_l^{(1)}\delta_{k,1} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}^{(0)} P_{kl}^{(1)} (1 + \exp\{-i\Delta k_l\}) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\Delta) Q_{nk}^{(0)} S_l^{(1)} \exp\{-i\Delta\omega_0\}\delta_{k,1} + F_{ln}^{*(1)},$$

звідки для $n=1$ маємо

$$S_l^{(2)}(\tau) = [i(\omega_0 + k_l)]^{-1}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} G_{1k}^{(0)} P_{kl}^{(1)} (1 + \exp\{-i\Delta k_l\}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{\infty} ik_l P_{kl}^{(1)} + S_l^{(1)} + F_{l1}^{*(1)} - \Delta Q_{11}^{(0)} S_l^{(1)} \exp\{-i\Delta\omega_0\}\right\}, \tag{42}$$

а при $n \geqq 2$

$$P_{nl}^{(2)}(\tau) = (\lambda_n - k_l^2)^{-1}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} G_{nk}^{(0)} P_{kl}^{(1)} (1 + \exp\{-i\Delta k_l\}) + \sum_{k=2}^{\infty} ik_l P_{kl}^{(1)} + \right.$$
$$+ F_{ln}^{*(0)} - \Delta Q_{n1}^{(0)} S_l^{(1)} \exp\{-i\Delta\omega_0\} - i(\omega_0 + k_l) S_l^{(1)}\Pi_n^{(1)} - 2ik_l P_{nl}^{\prime(1)} - ik_l^{\prime} P_{nl}^{(1)}. \tag{43}$$

Зауважимо, що функцію $P_{1l}^{(2)}(\tau)$ через її довільність можна покласти рівною нулеві.

Для доведення диференційовності по τ функції $P_{nl}^{(2)}$ і $S_l^{(2)}$ досить довести, що ряд $\sum_{k=2}^{\infty} G_{nk}^{(0)} P_{kl}^{(1)}$ рівномірно збігається. Це твердження легко доводиться за допомогою нерівності Буняковського і умов (27) при $k=1$. Рівномірна збіжність рядів, одержаних почленним диференціюванням по τ рядів (42), (43), випливає з умов (27) та рівномірної збіжності ряду (41).

Процес знаходження функцій $P_{nl}^{(s)}(\tau)$ і $S_l^{(s)}$ $(s=3, 4, \ldots)$ може бути продовжений до нескінченності.

§ 6. Визначимо, нарешті, коефіцієнти $T_{jn}^{(s)}(\tau)$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$. Для цього зрівнюємо коефіцієнти в рівності (34) при однакових степенях ε. Зрівнюючи коефіцієнти при ε^0, дістанемо: $T_{jn}^{(0)}(\lambda_n - k_j^2) = F_{jn}^{*(0)}$, звідки маємо:

$$T_{jn}^{(0)} = (\lambda_n - k_j^2)^{-1} F_{jn}^{*(0)} \quad (j = r+1,\ r+2, \ldots, N;\ 1 \leqslant r \leqslant N). \tag{44}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^1 в співвідношенні (34), одержимо:

$$ik_j' T_{jn}^{(0)} + 2ik_j T_{jn}^{\prime(0)} + (\lambda_n - k_j^2) T_{jn}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_{jk}^{(0)} (G_{nk}^{(0)} + ik_j R_{nk}^{(0)} + \\ + Q_{nk}^{(0)} \exp\{-i\Delta k_j\}) + F_{jn}^{*(1)}, \tag{45}$$

звідки для $T_{jn}^{(1)}(\tau)$ маємо

$$T_{jn}^{(1)}(\tau) = (\lambda_n - k_j^2)^{-1} \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} T_{jk}^{(0)} (G_{nk}^{(0)} + ik_j R_{nk}^{(0)} + Q_{nk}^{(0)} \exp\{-i\Delta k_j\}) + \\ + F_{jn}^{*(1)} - 2ik_j T_{jn}^{\prime(0)} - ik_j' T_{jn}^{(0)} \Big\}. \tag{46}$$

Покажемо тепер, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |T_{jk}^{(0)}|^2$ абсолютно і рівномірно збігається. Дійсно, маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |T_{jk}^{(0)}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left| \left(1 - \frac{k_j^2}{\lambda_k}\right)^{-2} F_{jk}^{*(0)} \right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} |F_{jk}^{*(0)}|^2. \tag{47}$$

На підставі умов (27) ряд (47) збігається абсолютно і рівномірно. Покажемо абсолютну і рівномірну збіжність рядів, одержаних почленним диференціюванням по τ ряду (47). Дійсно, розглянемо ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (T_{jk}^{(0)}) \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{p} \alpha_p^{\mu} \frac{d^{p-\mu}}{d\tau^{p-\mu}} \left[\left(1 - \frac{k_j^2}{\lambda_k}\right)^{-1} \right] \frac{1}{\lambda_k} \frac{d^{\mu}}{d\tau^{\mu}} (F_{jk}^{*(0)}) \right|^2. \tag{48}$$

Застосовуючи до правої частини співвідношення (48) нерівність Буняковського та враховуючи умови теореми 1, переконуємося в справедливості твердження. Абсолютна і рівномірна збіжність рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |T_{jk}^{(1)}|^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (T_{jk}^{(1)}) \right|^2$ доводиться аналогічно.

Знаходження коефіцієнтів $T_{jn}^{(s)}(\tau)$, $(s=2, 3, \ldots)$ можна б продовжити.

Таким чином, вказавши спосіб знаходження коефіцієнтів розкладів (31), ми довели теорему 1.

§ 7. Для «нерезонансного» випадку має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, то формальний розв'язок системи* (25) *може бути зображений у вигляді*:

$$z_n(t, \varepsilon) = \delta_{n,1} \xi(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \widetilde{T}_{jn}(\tau, \varepsilon) \cdot \exp\{i\theta_j(t, \varepsilon)\}, \tag{49}$$

де $\delta_{n,1}$ — *символ Кронекера, а* $\xi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ *визначається з диференціального рівняння першого порядку*

$$\xi'(t) = [\widetilde{D}(\tau, \varepsilon) + i\widetilde{\omega}(\tau, \varepsilon)]\,\xi(t). \tag{50}$$

Функції $\widetilde{T}_{jn}$, $\widetilde{D}$, $\widetilde{\omega}$ мають зображення у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра ε.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

§ 8. Переходимо зараз до обгрунтування вказаного асимптотичного методу. Спочатку доведемо існування і єдиність розв'язку задачі Коші (25), (26).

Для цієї мети введемо простір Банаха таким способом. Нехай послідовність дійсних чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, що задовольняють умову $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$, означає вектор простору l_1: $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_n)$. Якщо норму довільного вектора визначити таким способом: $\|\vec{\xi}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$, то стає очевидним, що простір l_1 є простір Банаха. Введемо ще простір $L_1(0, L)$, що складається з множини послідовностей неперервних функцій $(f_1(\tau, \varepsilon),\ f_2(\tau, \varepsilon), \ldots$ $\ldots, f_n(\tau, \varepsilon), \ldots)$, які задовольняють умову $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_{\tau} |f_n(\tau, \varepsilon)| < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Якщо прийняти за норму вектор-функції (f_n) число $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_{\tau} |f_n(\tau, \varepsilon)|$, то $L_1(0, L)$ є простір Банаха.

Введемо тепер підстановку

$$z_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_n}\,(t - s)\, y_n(s, \varepsilon)\, ds + \alpha_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n} t. \tag{51}$$

Враховуючи для $z_n(t - \Delta(\tau); \varepsilon)$ вираз (51), одержимо формулу

$$z_n^{\Delta} = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^{t-\Delta(\tau)} \sin\sqrt{\lambda_n}\,(t - \Delta(\tau) - s)\, y_n(s, \varepsilon)\, ds +$$

$$+ \alpha_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t - \Delta(\tau)) + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\,(t - \Delta(\tau)). \tag{52}$$

Підстановка (51) зводить систему диференціальних рівнянь (25) з початковими умовами (26) до нескінченної системи інтегральних рівнянь вигляду

$$y_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^s A_{nk}(\tau, s, \varepsilon)\, y_k(s, \varepsilon)\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{t_1} B_{nk}(t_1, s, \varepsilon)\, y_k(s, \varepsilon)\, ds + f_n(t, t_1, \varepsilon), \tag{53}$$

де $t_1 = t - \Delta(\tau)$; $A_{nk}(\tau, s, \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_k}} G_{nk} \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t - s) + \varepsilon R_{nk} \cos\sqrt{\lambda_k}\,(t - s)$;

$B_{nk}(t_1, s, \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_k}} Q_{nk} \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t - \Delta(\tau) - s)$; $f_n(t, t_1, \varepsilon) = \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big\{ G_{nk} \Big[\alpha_k \cos \times$

$$\times\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\Big]+Q_{nk}\Big[\alpha_k\cos\sqrt{\lambda_k}t_1+\frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t_1\Big]+R_{nk}[\beta_k\cos\times$$
$$\times\sqrt{\lambda_k}t-\alpha_k\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t]\Big\}.$$

Під розв'язком системи (53) будемо розуміти послідовність функцій $\{y_n(t,\varepsilon)\}\in L_1(0,L)$, для якої ряди $\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}y_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}B_{nk}y_k$ при довільному n рівномірно збігаються, зображують собою неперервні функції та задовольняють цю систему.

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Якщо* $\sum_{n=1}^{\infty}\max_t|f_n(t,t_1,\varepsilon)|<\infty$, $|A_{nk}|<\varepsilon a_{nk}$ *і* $|B_{nk}|<\varepsilon b_{nk}$, *де матриці* (a_{nk}), (b_{nk}) *обмежені в* l_1, *тобто для всякого* $\vec{\xi}\in l_1$,

$$\|(a_{nk})\vec{\xi}\|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\xi_n\right|\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|=C\|\vec{\xi}\|,$$

$$\|(b_{nk})\vec{\xi}\|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\xi_n\right|\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|=E\|\vec{\xi}\|$$

(C і E деякі сталі величини, незалежні від ξ*), то система* (53) *має розв'язок, причому єдиний, що задовольняє умову:* $\sum_{n=1}^{\infty}\max_t|y_n|<\infty$.

Теорему будемо доводити за допомогою методу послідовних наближень.

Нехай $y_n^{(0)}(t,\varepsilon)=f_n(t,t_1,\varepsilon)\left(n=1,2,\ldots;\ 0\leqslant\tau\leqslant L;\ 0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}\right)$ нульове наближення, а наступні наближення визначаються із рівностей

$$y_k^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t A_{nk}y_k^{(m-1)}ds+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t_1}B_{nk}y_k^{(m-1)}ds+f_n.$$

Оцінимо зараз різницю

$$|y_n^{(1)}-y_n^{(0)}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t A_{nk}y_k^{(0)}ds\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{t_1}B_{nk}y_k^{(0)}ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon t a_{nk}\max_t|f_n|+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon t_1 b_{nk}\max_t|f_n|.$$

Далі одержуємо

$$|y_n^{(2)}-y_n^{(1)}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t A_{nk}(y_k^{(1)}-y_k^{(0)})\,ds\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{t_1}B_{nk}(y_k^{(1)}-y_k^{(0)})\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\varepsilon a_{nk}\sum_{k_1=1}^{\infty}\varepsilon s a_{kk_1}\max_t|f_{k_1}|\,ds+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{t_1}\varepsilon b_{nk}\sum_{k_1=1}^{\infty}\varepsilon s b_{kk_1}\max_t|f_{k_1}|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\varepsilon t)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\sum_{k_1=1}^{\infty}a_{kk_1}\max_t|f_{k_1}|+\frac{(\varepsilon t_1)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\sum_{k_1=1}^{\infty}b_{kk_1}\max_t|f_{k_1}|.$$

Застосовуючи метод повної математичної індукції, можна довести нерівність

$$|y_n^{(m)} - y_n^{(m-1)}| \leqslant \frac{(\varepsilon t)^m}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{kk_1} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{\infty} a_{k_{m-2}k_{m-1}} \max_t |f_{k_{m-1}}| +$$

$$+ \frac{(\varepsilon t_1)^m}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \sum_{k_1=1}^{\infty} b_{kk_1} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{\infty} b_{k_{m-2}k_{m-1}} \max_t |f_{k_{m-1}}|.$$

Тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_t |y_n^{(m)} - y_n^{(m-1)}| \leqslant \frac{(LC)^m}{m!} \|f_n\| + \frac{(LE)^m}{m!} \|f_n\|;$$

$$|y^{(m)} - y^{(m-1)}| \leqslant \left(\frac{(LC)^m}{m!} + \frac{(LE)^m}{m!}\right) \|f\|,$$

де $y = (y_1, \dots y_n, \dots)$, $f = (f_1, \dots, f_n, \dots)$. Таким чином, можна одержати таку нерівність:

$$\|y^{(m+\mu)} - y^{(m)}\| \leqslant \sum_{i=m}^{m+\mu-1} \|y^{(i+1)} - y^{(i)}\| \leqslant \sum_{i=m}^{m+\mu-1} \left[\frac{(LC)^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{(LE)^{i+1}}{(i+1)!}\right] \|f\|,$$

звідки випливає фундаментальність послідовності $\{y_n^{(m)}(t, \varepsilon)\}$. Оскільки простір $L_1(0, L)$ повний, то існує границя $\lim\limits_{m\to\infty} (y_n^{(m)}) = (y_n)$.

В силу неперервності оператора (53) дістаємо, що (y_n) — розв'язок системи інтегральних рівнянь (53), а значить, на підставі заміни (51) — розв'язок системи (25). Єдиність розв'язку системи (53), а значить і системи (25), випливає з нерівності

$$\|\Phi_n\| \leqslant \left[\frac{(LC)^m}{m!} + \frac{(LE)^m}{m!}\right] \|\Phi_n\|, \tag{54}$$

де Φ_n — розв'язок відповідної однорідної системи інтегральних рівнянь:

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A_{nk} \Phi_k ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_1} B_{nk} \Phi_k ds. \tag{55}$$

Дійсно, нехай Φ_n^* і Φ_n^{**} — розв'язки системи (53), причому $\Phi_n^* \neq \Phi_n^{**}$. Тоді різниця $\Phi_n^* - \Phi_n^{**} = \Phi_n$ є розв'язком системи (55), відмінним від нуля. Це приводить до суперечності на підставі (54).

Надалі нам потрібні будуть такі леми:

Лема 1. *При умові попередньої теореми має місце така оцінка*

$$\|y\| \leqslant (\exp\{LC\} + \exp\{LE\} - 1) \|f\|, \tag{56}$$

де y є розв'язком системи (53).

Дійсно, маємо

$$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_t |y_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_t |y_n^{(0)}| + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \max_t |y_n^{(m)} - y_n^{(m-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(LC)^m}{m!} + \frac{(LE)^m}{m!}\right] \|f\| = (\exp\{LC\} + \exp\{LE\} - 1) \|f\|.$$

Лема 2. *Якщо при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ коефіцієнти системи (25) мають достатню кількість похідних по τ, то «m»-ті наближення $z_n^{(m)}(t, \varepsilon)$ цієї системи задовольняють її з точністю до величин порядку малості $O(\varepsilon^{m+1})$.*

Доведення цієї леми випливає з самої побудови наближених розв'язків.

Для «резонансного» випадку доводиться така теорема.

Теорема 4. *Якщо точні розв'язки системи (25) $z_n(t, \varepsilon)$ і «m»-ті наближення $z_n^{(m)}(t, \varepsilon)$ взято при однакових початкових умовах (а умови леми 2 виконуються), то знайдуться такі додатні постійні C_m, що не залежать від ε, що $\| z_n - z_n^{(m)} \| \leqslant C_m \varepsilon^m$.*

Доведення. Введемо позначення $z_n - z_n^{(m)} = x_n^{(m)}$. Тоді система (25) перепишеться так:

$$\frac{d^2 x_n^{(m)}}{dt^2} + \lambda_n x_n^{(m)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} x_k^{(m)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} x_k^{(m)\Delta} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk} \frac{dx_n^{(m)}}{dt} + \varepsilon^{m+1} \times$$
$$\times H_n^{(m)}(\tau, \varepsilon). \tag{57}$$

За допомогою підстановки

$$x_n^{(m)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - s)\, y_n^{(m)}(s, \varepsilon)\, ds \tag{58}$$

система (57) зводиться до нескінченної системи інтегральних рівнянь

$$y_n^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \widetilde{A}_{nk} y_k^{(m)} ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_1} \widetilde{B}_{nk} y_k^{(m)} ds + \widetilde{f}_n(t, t_1, \varepsilon), \tag{59}$$

де $\widetilde{A}_{nk}(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} G_{nk} \sin \sqrt{\lambda_k}\,(t - s) + \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_k}} R_{nk} \cos \sqrt{\lambda_k}\,(t - s)$; $\widetilde{B}_{nk} \times$
$\times (t_1, s, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_k}} Q_{nk}(\tau, \varepsilon) \sin \sqrt{\lambda_k}\,(t_1 - s)$; $\widetilde{f}_n(t, t_1, \varepsilon) = \varepsilon^{m+1} \sqrt{\lambda_k} H_n^{(m)}(\tau, \varepsilon)$.

Із формули (58) маємо

$$| x_n^{(m)} | \leqslant \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t | \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - s) | \cdot | y_n^{(m)}(s, \varepsilon) | \, ds \leqslant \frac{1}{\lambda} \max_t | y_n^{(m)} | \cdot \frac{L}{\varepsilon},$$

де $\lambda = \min_n \lambda_n$. Далі дістаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_t | x_n^{(m)} | \leqslant \frac{L}{\varepsilon\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \max_t | y_n^{(m)} |.$$

Звідси, на підставі умов теореми 4 та нерівності (56), одержуємо

$$\| x_n^{(m)} \| \leqslant \frac{L}{\varepsilon\lambda} \| y_n^{(m)} \| \leqslant (\exp\{LC\} + \exp\{LE\} - 1) \| H_n^{(m)} \| \varepsilon^{m+1} = C_m \varepsilon^m,$$

де $C_m = \frac{L}{\lambda} (\exp\{LC\} + \exp\{LE\} - 1) \| H_n^{(m)} \|$.

Таким чином, маємо

$$\| z_n - z_n^{(m)} \| \leqslant C_m \varepsilon^m.$$

Отже, асимптотичний характер наближених розв'язків системи (25) доведено.

§ 9. Повернемось зараз до мішаної задачі (15) — (18). Враховуючи вигляд шуканого розв'язку (20), неважко переконатись, що для обгрунтування узагальненого методу Фур'є досить показати рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \max_t |z_n|$, оскільки рівномірна збіжність інших рядів для Z_t, Z_{tt}, Z_x, Z_{xx} буде випливати із рівномірної збіжності цього ряду.

Вкажемо умови, які потрібно накласти на задачу (15) — (18), щоб ряд (20) рівномірно збігався і давав розв'язок вказаної мішаної задачі. Оскільки власні функції $W_n(x)$ головної частини рівняння обмежені в сукупності, то для рівномірної збіжності ряду (20) досить, щоб рівномірно збігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \max_t |z_n(t, \varepsilon)|$, тобто щоб функція $z_n(t, \varepsilon)$ була із простору $L_1(0, L)$. Для існування $Z_{tt}(t, x)$ досить, щоб рівномірно збігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \max_t |z_n''(t, \varepsilon)|$, а для цього, як видно з самої системи (25), достатня рівномірна збіжність вказаного вище ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \max_t |z_n(t, \varepsilon)|$. Для існування похідної $Z_x(t, x)$ достатньо, щоб рівномірно збігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \max_t | z_n(t, \varepsilon) \max_x W_n'(x)|$. Оскільки $W_n'(x) = O(n)$, то рівномірна збіжність попереднього ряду забезпечує рівномірну збіжність останнього. Що стосується похідної $Z_{xx}(t,x)$ ряду (20), то її існування випливає з самого рівняння (15). Неважко переконатись у тому, що для того, щоб існував класичний розв'язок мішаної задачі (15)—(18), а значить і задачі (1) — (3), та зображався у вигляді (20), досить накласти такі умови:

1. Функція $p(x)$, як було раніше вказано, неперервна разом з похідними до другого порядку включно, $q(x)$ — неперервна функція;

2. Коефіцієнти $\overline{a}_s(\tau, x), \overline{b}_s(\tau, x), c_s(\tau, x), d_s(\tau, x)$ і $f_s(\tau, x)$ неперервні разом з похідними по x до другого порядку і перетворюються в нуль на кінцях відрізка $[0, \pi]$;

3. Вільний член $F = \sum_{j=1}^{N} F_j^* \exp\{i\theta_j\}$ і $L_0 F$ неперервні і задовольняють крайові умови (17);

4. Початкова функція $\overline{\overline{\varphi}}(t, x, \varepsilon)$ має на відрізку $[0, \pi]$ неперервні похідні по x до третього порядку, а по t є неперервна на відрізку $[-\tau_0, 0]$. Функції $\overline{\overline{\varphi}}$ і $L_0\overline{\overline{\varphi}}$ задовольняють крайові умови (22); друга початкова функція $\overline{\overline{\psi}}(t, x, \varepsilon)$ має на відрізку неперервні похідні по x до другого порядку і неперервна по t на сегменті $[-\tau_0, 0]$, крім того, $\overline{\overline{\psi}}$ і $L_0\overline{\overline{\psi}}$ задовольняють крайові умови (22).

Нарешті, покажемо, що розв'язок $Z(t, x)$ мішаної задачі (15) — (18), а значить і задачі (1) — (3), знайдений за формулою (20), має асимптотичний характер. Для цього розглянемо різницю $Z(t, x) - Z^{(m)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(t,\varepsilon) - z_n^{(m)}(t, \varepsilon)] W_n(x)$, де $Z^{(m)}(t, x)$ — m-те наближення розв'язку задачі (15) —

(18), одержане обриванням рядів у формулах (29), (30) на m-х членах. Тоді маємо

$$\max_{t,x} | Z - Z^{(m)} | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t} | z_n - z_n^{(m)} | \cdot \max_{x} | W_n(x) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \max_{t} | z_n - z_n^{(m)} | \leqslant C_1 \| z_n - z_n^{(m)} \| \leqslant C_1 \cdot C_m \varepsilon^m.$$

Тому звідси дістаємо

$$Z(t, x, \varepsilon) = Z^{(m)}(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^m), \tag{60}$$

що і доводить асимптотичний характер розв'язку мішаної задачі (15) — (18). Оскільки ця задача одержана із задачі (1) — (4) шляхом вказаних перетворень, то розв'язок останньої також має асимптотичний характер.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Ф. Фещенко, Асимптотичний розв'язок нескінченної системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, ДАН УРСР, № 2, 1954.
2. Г. М. Савін і С. Ф. Фещенко, Про асимптотичний розв'язок одного класу рівнянь в частинних похідних із змінними граничними умовами, ДАН УРСР, № 6, 1958.
3. И. И. Маркуш, Об асимптотическом представлении решения смешанной задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа с малым параметром. Дифференциальные уравнения, т. 3, № 2, 1967.
4. В. А. Домбровский, В. И. Фодчук, Об асимптотическом представлении решений для дифференциального уравнения гиперболического типа с запаздыванием, Математическая физика, вып. 6, 1969.
5. Я. П. Менько, К теории асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих параметр, Автореф. канд. дисс., К., 1966.
6. М. І. Шкіль, Побудова формальних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із загаювальним аргументом, ДАН УРСР, № 11, серія А, 1967.
7. Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, Гостехиздат, 1950.

Надійшла 26.IV 1970 р.

Ужгородський державний університет