1971 УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 4
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.54

Про непорожність одного класу функцій, аналітичних в скінченнозв'язній круговій області

Л. О. Дундученко

Нехай K_n означає n-зв'язну ($n > 5$) кругову область, одержану з розширеної z-площини вилученням n кругів, які обмежені колами Γ_k:

$$|z - a_k| = R_k;\ |a_k - a_j| > R_k + R_j;\ k \neq j;\ k, j = 1, 2, \ldots, n,$$

так що $\infty \in K_n$. Крім того, припустимо, що K_n задовольняє такі умови: 1) $R_k \leqslant \varrho$, $k = 1, 2, \ldots, n$, де $\varrho \leqslant (n-1)^{-1}$; 2) $d \geqslant 1 + \varrho$; $d = \inf\limits_{(k \neq j)} |\zeta_k - \zeta_j|$, $\zeta_k \in \Gamma_k$, $\zeta_j \in \Gamma_j$.

Розглянемо в K_n клас C_1 функцій, який визначається структурною формулою

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F_1(z;\ a_1 + R_1 e^{i\theta})\, d\mu(\theta). \tag{1}$$

Тут $\mu(\theta)$ дійсна неспадна функція класу M на відрізку $[0; 2\pi]$, нормована умовами

$$\mu(0) = \mu(+0) = 0;\ \mu(2\pi) = 2\pi. \tag{2}$$

Ядерна функція $w = F_1(z; \zeta_1)$, $(\zeta_1 = a_1 + R_1 e^{i\theta} \in \Gamma_1)$, однолиста в K_n та відображає K_n на праву півплощину $\operatorname{Re} w > 0$ з розрізами вздовж відрізків прямих, паралельних уявній осі так, що коло Γ_1 переходить в уявну вісь і функція $F_1(z; \zeta_1)$ має розвинення в околі свого простого полюса $z = \zeta_1$ такого типу [1]:

$$F_1(z; \zeta_1) = \frac{z + \zeta_1 - 2a_1}{z - \zeta_1} + \psi(z; \zeta_1). \tag{3}$$

При цьому $\psi(z; \zeta_1)$ однозначна та регулярна функція в кільці $R_1 - \delta \leqslant |z - a_1| \leqslant R_1 + \delta$, де $\delta\, (\delta > 0)$ — досить мале число, й до того ж $\operatorname{Re} \psi(\zeta, \zeta_1) = 0$, якщо $\zeta \in \Gamma_1$, та $\psi(\zeta_1; \zeta_1) = 0$.

Функція (3) вивчена досить добре (див. [1 — 3]), і її властивості будуть використані в цих нотатках. Покладемо

$$p_k(\theta) = \operatorname{Re} F_1(\zeta_k; \zeta_1),\ k = 2, 3, \ldots, n, \tag{4}$$

де $\zeta_k \in \Gamma_k$; $\theta = \arg(\zeta_1 - a_1) \in [0; 2\pi]$. Тоді $p_k(\theta) > 0$ та неперервна на $[0, 2\pi]$ [1].

Доведемо, перш за все, таку лему.

Лема 1. *Функції класу C_1 мають властивості:*

1) $\lim\limits_{z \to \zeta_k} \operatorname{Re} f(z) = p_k = \text{const}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, *в кожній точці* Γ_k *(маємо на увазі кутові значення* $\operatorname{Re} f(z)$ *на* Γ_k*);*

2) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ *в кільці* $Q_1^{(\delta)}: R_1 < |z - a_1| < R_1 + \delta$, *де* $\delta > 0$ — *досить мале та фіксоване число.*

Доведення. Знайдемо кутові значення $\operatorname{Re} f(z)$ в точках кожного граничного кола Γ_j; $j = 1, 2, \ldots, n$. Маємо:

$$1) \quad \lim_{z \to \zeta_k} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{z \to \zeta_k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F_1(z; \zeta_1)\, d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(\theta)\, d\mu(\theta) = p_k > 0,$$

бо $p_k(\theta)$ неперервна на $[0, 2\pi]$; $k = 2, 3, \ldots, n$ [1].

$$2) \quad \lim_{z \to \zeta_{10}} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{z \to \zeta_{10}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F_1(z; \zeta_1)\, d\mu(\theta) =$$

$$= \lim_{z \to \zeta_{10}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{z + \zeta_1 - 2a_1}{z - \zeta_1}\, d\mu(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{z \to \zeta_{10}} \operatorname{Re} \psi(z; \zeta_1)\, d\mu(\theta) =$$

$$= \lim_{z \to \zeta_{10}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{z + \zeta_1 - 2a_1}{z - \zeta_1}\, d\mu(\theta) = \mu'(\theta_0)$$

майже у всіх точках Γ_1 (тут $\zeta_{10} = a_1 + R_1 e^{i\theta_0}$), бо останній інтеграл є інтеграл Пуассона — Стільтьєса [4]. Але $\mu'(\theta_0) \geqslant 0$, бо $\mu(\theta)$ — неспадна функція на $[0, 2\pi]$. Залишилось зауважити, що границя у випадку 1) існує в кожній точці Γ_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, бо $F_1(z; \zeta_1)$ неперервна в кожному замкнутому кільці $\overline{Q}_k^{(\delta)}$: $R_k \leqslant |z - a_k| \leqslant R_k + \delta$, а $\delta > 0$ — зазначене вище досить мале число.

Лему доведено.

Вилучимо тепер з класу C_1 підклас C_{11} таких функцій $\varphi(z)$, що задовольняють умови:

1) $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ в кільці $Q_1^{(\delta)}: R_1 < |z - a_1| < R_1 + \delta$;

2) $|\varphi(\zeta_k)| \leqslant \dfrac{d - 2\varrho}{\varrho}$, де ϱ та d — параметри області K_n, а $\zeta_k \in \Gamma_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$;

3) якщо в кільці $Q_k^{(\delta)}$: $R_k < |z - a_k| < R_k + \delta$, функція $\dfrac{\varphi(z) - 1}{z - a_1}$ має таке розвинення:

$$\frac{\varphi(z) - 1}{z - a_1} = \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} b_\nu^{(k)} \cdot (z - a_k)^\nu \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

то $b_{-1}^{(k)} = 0$;

4) $\dfrac{\varphi(z) - 1}{z - a_1} = 1 + \dfrac{C_2}{z^2} + \ldots$ в околі точки $z = \infty$.

Покажемо, що підклас C_{11} не порожній при умовах, якими визначається область K_n. Для цього перевіримо виконання всіх чотирьох умов, що ними визначено класс C_{11}.

Умова 1) виконується, як це випливає з леми 1.

Перевіримо виконання умови 2). Для цього досить показати, враховуючи (2), що в точках граничних кіл Γ_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, має місце нерівність

$$|F_1(\zeta_k; \zeta_1)| \leqslant \frac{d - 2\varrho}{\varrho} \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{6}$$

Як відомо [2], функцію $F_1(z; \zeta_1)$ можна подати у такому вигляді:

$$F_1(z; \zeta_1) = 1 + \frac{2R_1 e^{i\theta}}{z - a_1 - R_1 e^{i\theta}} + \sum_{m=1}^{n}{}' \varphi_m(z; \theta) - C(\theta), \tag{7}$$

де

$$C(\theta) = \sum_{j=2}^{n} \varphi_j(a_1; \theta) \quad (\theta = \arg(\zeta_1 - a_1) \in [0; 2\pi]),$$

а функції $\varphi_m(z; \theta)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, побудовані в роботі [2] у вигляді рівномірно та абсолютно збіжних функціональних рядів, які ми використаємо нижче. Зауважимо, що кожна функція $\varphi_m(z; \theta), m = 1, 2, \ldots, n$, регулярна та голоморфна відповідно в круговій області $|z - a_m| > R_m$, причому $\varphi_m(\infty; \theta) = 0, m = 1, \ldots, n$. Отже, кожну з них можна подати в її області голоморфності абсолютно та рівномірно збіжним степеневим рядом

$$\varphi_m(z; \theta) = \frac{g_1^{(m)}(\theta)}{z - a_m} + \frac{g_2^{(m)}(\theta)}{(z - a_m)^2} + \ldots \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Використовуючи результати [2, 3], найдемо верхні оцінки для

$$|\varphi_m(\zeta_k; \theta)|; \; (\zeta_k \in \Gamma_k; \, m = 1, 2, \ldots, n; \, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Запишемо $\varphi_m(z; \theta)$ у вигляді (див. [3]):

$$\varphi_m(z; \theta) = \varphi_{0m}(z; \theta) + \varphi_{1m}(z; \theta) + \sum_{\mu=2}^{+\infty} \varphi_{\mu m}(z; \theta) \tag{9}$$

та знайдемо верхню оцінку модуля кожного доданка в точках Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, виходячи із значень параметрів області K_n. Маємо при $m \neq 1$:

$$\varphi_{0m}(z; \theta) = \frac{B_m^{(1)}(\theta) R_m^2}{z - a_m^*} = \frac{2R_m^2 R_1 e^{-i\theta}}{(\bar{a}_m - \bar{a}_1 - R_1 e^{-i\theta})^2 \left(z - a_m + \dfrac{R_m^2}{\bar{a}_m - \bar{a}_1 - R_1 e^{-i\theta}}\right)}. \tag{10}$$

Тому при $m \neq 1$:

$$\frac{2\varrho_0^3}{(d + 2\varrho_0 + \varrho)[(d + 2\varrho_0 + \varrho)^2 + \varrho^2]} \leqslant |\varphi_{0m}(\zeta_k; \theta)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varrho^3}{(d + 2\varrho_0 - \varrho)[(d + 2\varrho_0 - \varrho)^2 - \varrho^2]},$$

якщо умовитись, що $\varrho_0 = \min\{R_1, \ldots, R_n\} \geqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$, що й матимемо на увазі далі. Якщо ж $m = 1$, то $\varphi_{01}(z; \theta) \equiv 0$ (див. [2]). Тепер оцінимо $|\varphi_{1m}(\zeta_k; \theta)|, k = 1, 2, \ldots, n$, приймаючи до уваги, що [3]

$$\varphi_{1m}(z; \theta) = -\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq m)}}^{n} \left\{ \bar{\varphi}_{0\nu}\left(\bar{a}_m + \frac{R_m^2}{z - a_m}; \theta\right) - \bar{\varphi}_{0\nu}(\bar{a}_m; \theta) \right\} =$$

$$= -\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq m)}}^{n} \bar{B}_\nu^{(1)}(\theta) \left\{ \frac{R_\nu^2 (z - a_m)}{(\bar{a}_m - \bar{a}_\nu^*)(z - a_m) + R_m^2} - \frac{R_\nu^2}{\bar{a}_m - \bar{a}_\nu^*} \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq m)}}^{n} \frac{\overline{B}_\nu^{(1)}(\theta) R_\nu^2 R_m^2}{(\overline{a}_m - \overline{a}_\nu^*)[(\overline{a}_m - \overline{a}_\nu^*)(z - a_m) + R_m^2]} \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Отже,

$$|\varphi_{1m}(\zeta_k; \theta)| \leqslant \frac{2\varrho^4 (n-1)}{(d + 2\varrho_0)[d + 2\varrho_0 - \varrho]} \leqslant 2(n-1)\varrho^4.$$

Залишилось знайти верхню оцінку для останнього доданка в формулі (9). Застосуємо для цього метод, який викладено в роботі [3]. Ідея цього методу належить Г. М. Голузіну [5].

Позначимо через M_k максимум $|\varphi'_{1m}(z; \theta)|$ в крузі $|z - a_k| \leqslant R_k$; $k \neq m$; $k = 1, \ldots, n$, а через $M - \max\limits_{(k)} M_k$. Тоді неважко одержати таку оцінку:

$$M = \max_{(k)} \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq k)}}^{n} \frac{|B_\nu^{(1)}(\theta)| R_\nu^2 R_k^2}{d^2 \min \left| z - a_k + \dfrac{R_k^2}{\overline{a}_k - \overline{a}_\nu^*} \right|^2} \leqslant \frac{d(n-1)\varrho^5}{d^2 (d - \varrho^2)^2}. \tag{12}$$

Нехай $l_{\nu j}$ означає віддаль від точки a_j до кола Γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\nu \neq j$. Покладемо

$$L = \max_{(k)} \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq k)}}^{n} R_\nu^2 l_{\nu k}^{-2}.$$

Тоді $L < (n-1)\varrho^2 d^{-2} < 1$.

Тепер перейдемо до оцінки модуля останнього доданка в формулі (9). Маємо

$$\left| \sum_{\mu=2}^{+\infty} \varphi_{\mu m}(z; \theta) \right| = \left| \sum_{\mu=2}^{+\infty} \int_{\infty}^{z} \varphi'_{\mu m}(z; \theta)\, dz \right|$$

(тут ми використали умову $\varphi_{\mu m}(\infty; \theta) = 0$). Нехай $z_{0m} = a_m + R_m e^{i\gamma}$ — та точка кола Γ_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$, в якій $|\varphi_{\mu m}(z; \theta)|$ досягає свого абсолютного максимуму. Візьмемо за шлях інтегрування прямолінійний промінь, що іде з точки $z = \infty$ в точку z_{0m}, на продовженні якого знаходиться точка a_m, тобто покладемо: $z = a_m + re^{i\gamma}$, $\gamma = \text{const}$, $R_m \leqslant r < +\infty$. Тоді одержимо

$$\left| \sum_{\mu=2}^{+\infty} \varphi_{\mu m}(\zeta_k; \theta) \right| \leqslant \sum_{\mu=2}^{+\infty} |\varphi_{\mu m}(\zeta_k; \theta)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=2}^{+\infty} \left| \int_{\infty}^{R_m} \left| \frac{d\varphi_{\mu m}(a_m + re^{i\gamma}; \theta)}{dr} \right| |dr| \leqslant \sum_{\mu=2}^{+\infty} \left| \int_{\infty}^{R_m} \frac{(n-1) M L^{\mu-1} \varrho R_m}{r^2} dr \right| =$$

$$= \sum_{\mu=2}^{+\infty} (n-1) M \varrho L^{\mu-1} \leqslant \frac{2(n-1)^3 \varrho^8}{d^2 (d - \varrho^2)^2 (d^2 - (n-1)\varrho^2)} \leqslant 2(n-1)^3 \varrho^8. \tag{13}$$

Тут використано нерівність (12) та нерівність $1 - L > (d^2 - (n-1)\varrho^2) d^{-2}$.

Отже, із знайдених оцінок та формули (9) випливає така оцінка:

$$|\varphi_m(\zeta_k; \theta)| \leqslant 2\varrho^3 + 2(n-1)\varrho^4 + 2(n-1)^3\varrho^8.$$

Тому маємо (див. (7)) при $k=2, 3, \ldots, n$:

$$|C(\theta)| \leqslant \sum_{j=2}^{n} |\varphi_j(a_1; \theta)| \leqslant 2(n-1)[\varrho^3 + (n-1)\varrho^4 + (n-1)^3\varrho^8],$$

$$|F_1(\zeta_k; \zeta_1)| \leqslant 1 + \frac{2\varrho}{d+\varrho_0-\varrho} + 4(n-1)\varrho^3(1+(n-1)\varrho + $$

$$+ (n-1)^3\varrho^5) < \frac{d-2\varrho}{\varrho},$$

якщо $n=5, 6, \ldots$, а d, ϱ, ϱ_0 — параметри області K_n. Отже, умову 2) виконано, бо виконана нерівність (6) при $n \geqslant 5$.

Більш громіздкі обчислення показують, що нерівність (6) виконуватиметься і при $n \geqslant 4$, але на цьому вже не зупиняємось.

Подивимось тепер, чи може виконуватись умова 3). Для цього покажемо, що $\arg b_{-1}^{(k)}(\theta)$ може приймати всі значення з інтервалу $(0; 2\pi]$ при довільному $k, k=1, 2, \ldots, n$, де $b_{-1}^{(k)}(\theta)$ є коефіцієнтом Лорана при $(z-a_k)^{-1}$ в розвиненні функції $[F_1(z; \zeta_1)-1](z-a_1)^{-1}$ в кільці $Q_k^{(\delta)}$: $R_k < |z-a_k| < R_k+\delta$.

Нехай спочатку $k \neq 1$. Використаємо формулу (7) та врахуємо при цьому, що всі функції $\varphi_m(z; \theta)$ $(\varphi_m(\infty; \theta)=0)$, регулярні в крузі $|z-a_k| \leqslant R_k$ при $m \neq k$. Тому

$$b_{-1}^{(k)}(\theta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{F_1(z; \zeta_1)-1}{z-a_1}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{\varphi_k(z; \theta)}{z-a_1}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{1}{z-a_1}\sum_{\mu=1}^{+\infty}\frac{g_\mu^{(k)}(\theta)}{(z-a_k)^\mu}\,dz = -\frac{g_1^{(k)}(\theta)}{a_k-a_1} +$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{+\infty}\frac{(-1)^\mu g_\mu^{(k)}(\theta)}{(a_k-a_1)^\mu} = -\frac{g_1^{(k)}(\theta)}{a_k-a_1} + A_k(\theta), \tag{14}$$

де Γ_k тут і далі обходиться проти годинникової стрілки.

Оцінимо порядок величини $|A_k(\theta)|$ в залежності від $\varrho, \varrho \geqslant R_k$; $k=2, \ldots, n$. Маємо, перш за все:

$$|g_\mu^{(k)}(\theta)| = \left| -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\varphi_k(z; \theta)(z-a_k)^{\mu-1}\,dz\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi_k(a_k+R_ke^{i\alpha}; \theta)\,R_k^\mu e^{i\mu\alpha}d\alpha\right| \leqslant \widetilde{M}_k R_k^\mu,$$

де $\widetilde{M}_k = \max\limits_{(\alpha; \theta)}|\varphi_k(a_k+R_ke^{i\alpha}; \theta)|$. Тому

$$|A_k(\theta)| \leqslant \sum_{\mu=2}^{+\infty}\frac{R_k^\mu\widetilde{M}_k}{|a_k-a_1|^\mu} = \frac{R_k^2\widetilde{M}_k}{|a_k-a_1|(|a_k-a_1|-R_k)}. \tag{15}$$

В свою чергу

$$\widetilde{M}_k \leqslant \max\left\{|\varphi_{0k}(\zeta;\theta)| + |\varphi_{1k}(\zeta_k;\theta)| + \sum_{\mu=2}^{+\infty} |\varphi_{\mu k}(\zeta_k;\theta)|\right\}. \tag{16}$$

З (13) випливає, що третій доданок справа не перевищує величини $2(n-1)^3\varrho^8$ і оскільки $0<\varrho\leqslant(n-1)^{-1}$, то має порядок $O(\varrho^5)$.

Оцінюємо порядок двох перших доданків:

$$|\varphi_{0k}(\zeta_k;\theta)| \leqslant 2R_1R_k^2 \cdot \left|a_k + R_k e^{i\theta} - a_k + \frac{R_k^2}{\overline{a}_k - \overline{a}_1 - R_1 e^{-i\theta}}\right|^{-1} \times$$

$$\times |\overline{a}_k - \overline{a}_1 - R_1 e^{-i\theta}|^{-2} \leqslant \varrho^2(d-2\varrho)^{-1}(d-\varrho)^{-1} = O(\varrho^2);$$

$$|\varphi_{0k}(\zeta_k;\theta)| \geqslant \varrho_0^2(d+2\varrho)^{-1}(d+\varrho)^{-1};$$

$$|\varphi_{1k}(\zeta_k;\theta)| = \left|\int_{\infty}^{\zeta_k} \varphi'_{1k}(z;\theta)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq k)}}^{n} R_k^2 \int_{\infty}^{R_k} \left|\varphi'_{0\nu}\left(\overline{a}_k + \frac{R_k^2}{re^{i\varphi_\bullet}};\theta\right)\right| \left|\frac{dr}{r^2}\right|\right| \leqslant 2(n-1)\varrho^4 = O(\varrho^3).$$

Таким чином, як це випливає з нерівності (16), порядок величини $\widetilde{M}_k$ є $O(\varrho^2)$. Але це значить, що порядок величини $|A_k(\theta)|$ є $O(\varrho^4)$.

Отже, на основі (14) виводимо, що значення $\arg b_{-1}^{(k)}(\theta)$ визначається тільки першим доданком: $[-g_1^{(k)}(\theta)(a_k-a_1)^{-1}]$, тобто значенням $\arg g_1^{(k)}(\theta)$. Але

$$g_1^{(k)}(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \varphi_k(z;\theta)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \varphi_{0k}(z;\theta)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{+\infty}\int_{\Gamma_k} \varphi_{\mu k}(z;\theta)\,dz = R_k^2 R_1 e^{-i\theta}(\overline{a}_k - \overline{a}_1 - R_1 e^{-i\theta})^{-2} + D_k(\theta).$$

Так само, як і вище, показуємо, що порядок $|D_k(\theta)|$ є $O(\varrho^4)$, тому значення $\arg g_1^{(k)}(\theta)$ визначаються тільки значеннями першого доданка, аргумент якого може приймати всі значення на інтервалі $(0, 2\pi]$, коли θ перебігає інтервал $(0, 2\pi]$.

Залишилось розглянути випадок $k=1$. Позначимо через Γ_1^* коло $z = a_1 + (R_1+\varepsilon)e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ ($\varepsilon>0$ — довільно мале число), яке обходиться проти годинникової стрілки. Приймаючи до уваги формулу (7), будемо мати:

$$b_{-1}^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^*} \frac{F_1(z;\zeta_1)-1}{z-a_1}\,dz = -C(\theta) + \frac{R_1 e^{i\theta}}{\pi i}\int_{\Gamma_1^*} \frac{dz}{(z-a_1)(z-\zeta_1)} +$$

$$+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^*}\frac{\varphi_m(z;\theta)}{z-a_1}\,dz + \sum_{\mu=1}^{+\infty}\frac{g_\mu^{(1)}(\theta)}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^*}\frac{dz}{(z-a_1)^{\mu+1}} =$$

$$= -\sum_{m=2}^{n}\varphi_m(a_1;\theta) + \sum_{m=2}^{m}\varphi_m(a_1;\theta) = 0,$$

бо функції $\varphi_m(z;\theta)$, $m=2,3,\ldots,n$, регулярні всередині кола Γ_1^*.

Нарешті, залишилась перевірка умови 4). Ця умова приймає досить зручний вигляд, якщо використати формулу (7) та те, що функції $\varphi_k(z;\theta)$, $k=1, 2, \ldots, n$, регулярні в околі точки $z=\infty$. Тоді одержимо, перш за все:

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(z)-1}{z-a_1}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{F_1(z;\zeta_1)-1}{z-a_1}\,d\mu(\theta)\right]dz =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_L \frac{F_1(z;\zeta_1)-1}{z-a_1}\,dz\right]d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C(\theta)\,d\mu(\theta),$$

де L — коло $|z|=r$, досить великого радіуса, яке обходиться проти годинникової стрілки.

Отже, умова (4) приймає такий вигляд:

$$\int\limits_0^{2\pi} C(\theta)\,d\mu(\theta) = 0$$

де $C(\theta)$ визначається з формули (7).

За допомогою міркувань і оцінок, аналогічних до тих, які наведено вище, при перевірці умови 3), можна досить просто показати, що й величина $\arg C(\theta)$ (див. 7)), де $C(\theta)=\sum\limits_{j=2}^{n}\varphi_j(a_1;\theta)$, приймає всі значення з інтервалу $(0;\ 2\pi]$, коли θ перебігає інтервал $(0,\ 2\pi]$. На цьому не будемо зупинятись.

Тепер переходимо до доведення основної леми 2.

Для цього спочатку введемо одноманітні позначення (див. (14)):

$$\left.\begin{aligned} &s_j(\theta) = b_{-1}^{(j)}(\theta) = -\frac{g_1^{(j)}(\theta)}{a_k-a_1} + A_j(\theta),\ \ j=2, 3, \ldots, n,\\ &s_1^{(\theta)} = C(\theta) = \sum_{m=2}^{n}\varphi_m(a_1;\theta)\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \end{aligned}\right\}\qquad (17)$$

Лема 2. *Система інтегральних рівнянь відносно шуканої функції* $\mu(\theta)$, $\mu(\theta)\in M$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re} s_k(\theta)\,d\mu(\theta) = 0,\qquad \int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im} s_k(\theta)\,d\mu(\theta) = 0,\quad k=1, 2, \ldots, n,\qquad (18)$$

сумісна і, отже, має розв'язок в класі M.

Доведення. Покажемо, що система (18) є сумісною, коли її розглядати навіть лише на підкласі $M_p\subset M$ кусково-сталих функцій $\mu(\theta)$, що мають p, $p>2n$, точок зростання на інтервалі $(0,\ 2\pi]$.

Нехай цими точками будуть точки θ_m, $m=1, 2, \ldots, p$, підібрані так, щоб система (18) прийняла вигляд:

$$\sum_{m=1}^{p}\lambda_m\operatorname{Re} s_k(\theta_m) = 0,\qquad \sum_{m=1}^{p}\lambda_m\operatorname{Im} s_k(\theta_m) = 0,\quad k=1, 2, \ldots, n,\qquad (19)$$

де через λ_m, $\lambda_m>0$, $\sum\limits_{m=1}^{p}\lambda_m=2\pi$, позначено стрибки функції $\mu(\theta)$ у відповідних точках θ_m, $m=1, 2, \ldots, p$. Тоді доведення леми зведеться, як легко бачити, до доведення сумісності системи рівнянь (19), де θ_m та λ_m,

$n=1, 2, \ldots, p$, підібрані належним чином. Оскільки $\arg s_k(\theta)$, $k=1, 2, \ldots, n$, може приймати всі значення із інтервалу $(0, 2\pi]$, як це ми показали раніше, то величини $\operatorname{Re} s_k(\theta)$ та $\operatorname{Im} s_k(\theta)$, $k=1, 2, \ldots, n$, можуть бути як додатні, так і від'ємні в залежності від θ. Тому будемо вважати, що точки θ_m, $m=1, 2, \ldots, p$, підібрано так, щоб серед чисел $\operatorname{Re} s_k(\theta_m)$ та $\operatorname{Im} s_k(\theta_m)$, $k=1, 2, \ldots, n$, були як додатні, так і від'ємні. По тому й зафіксуємо ці точки θ_m; $m=1, 2, \ldots, p$, та будемо варіювати лише додатні числа λ_m; $m=1, 2, \ldots, p$, тобто будемо розглядати множину P векторів $\vec{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, для кожного з яких виконуються одночасно всі рівності з (19). Покажемо, що ця множина векторів P не порожня.

Легко бачити, що P — лінійна система p-вимірного евклідового простору в тому розумінні, що при $\vec{\lambda}_1 \in P$, $\vec{\lambda}_2 \in P$, буде й $A\vec{\lambda}_1 + B\vec{\lambda}_2 \in P$, де $A > 0$ та $B \geqslant 0$—довільні дійсні сталі. Розглянемо тепер множину P, як p-вимірну підмножину в $(2n+p+1)$-вимірному евклідовому просторі й позначимо через $\{\vec{e}_i\}$, $i=1, 2, \ldots, 2n+p+1$, ортогональний та нормований базис цього простору, тобто покладемо $\vec{e}_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, $i=1, 2, \ldots, 2n+p+1$. Тоді множина P буде складатись з векторів

$$\vec{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2n+1}).$$

Нехай також

$$\vec{U}_k=(\operatorname{Re} s_k(\theta_1), \ldots, \operatorname{Re} s_k(\theta_p), \underbrace{0, \ldots, 0}_{2n+1});$$

$$\vec{V}_k=(\operatorname{Im} s_k(\theta_1), \ldots, \operatorname{Im} s_k(\theta_p), \underbrace{0, \ldots, 0}_{2n+1}); \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Тоді система рівнянь (19) набере такого вигляду:

$$\left\{\begin{array}{l}
f_1(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{E} = 2\pi\,(=\alpha_1) \qquad (\vec{E}=(1, \ldots, 1)),\\
f_2(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{U}_1 = 0\,(=\alpha_2),\\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{n+1}(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{U}_n = 0\,(=\alpha_{n+1}),\\
f_{n+2}(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{V}_1 = 0\,(=\alpha_{n+2});\\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{2n+1}(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{V}_n = 0\,(=\alpha_{2n+1}),\\
f_{2n+2}(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{e}_1 > 0\,(=\alpha_{2n+2} > 0),\\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{2n+p+1}(\vec{\lambda}) \equiv \vec{\lambda}\vec{e}_p > 0\,(=\alpha_{2n+p+1} > 0).
\end{array}\right. \tag{20}$$

Покажемо, що ця система рівнянь та нерівностей сумісна за критерієм Фань Цзи [6]. Для цього досить показати, що з рівності $\sum_{j=1}^{2n+p+1} \delta_j f_j = 0$ випливає нерівність $\sum_{j=1}^{2n+p+1} \delta_j \alpha_j \leqslant 0$ для довільних невід'ємних та дійсних чисел δ_j, $j=1, \ldots, 2n+p+1$.

Маємо:

$$\sum_{j=1}^{2n+p+1} \delta_j f_j = \vec{\lambda}(\delta_1 \vec{E} + \delta_2 \vec{U}_1 + \ldots + \delta_{n+1}\vec{U}_n + \delta_{n+2}\vec{V}_1 + \ldots + \delta_{2n+1}\vec{V}_n +$$

$$+ \delta_{2n+2}\vec{e}_1 + \ldots + \delta_{2n+p+1}\vec{e}_p) = \delta_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p) + \delta_2(\lambda_1 \operatorname{Re} s_1(\theta_1) + \ldots +$$

$$+ \lambda_p \operatorname{Re} s_1(\theta_p)) + \ldots + \delta_{n+2}(\lambda_1 \operatorname{Im} s_1(\theta_1) + \ldots + \lambda_p \operatorname{Im} s_1(\theta_p)) + \ldots +$$

$$+ \delta_{2n+1}(\lambda_1 \operatorname{Im} s_n(\theta_1) + \ldots + \lambda_p \operatorname{Im} s_n(\theta_p)) + \delta_{2n+2}\lambda_1 + \ldots +$$

$$+ \delta_{2n+p+1}\lambda_p = 2\pi\delta_1 + \delta_{2n+2}\lambda_1 + \ldots + \delta_{2n+p+1}\lambda_p = 0.$$

Ми врахували, що $\vec{\lambda} \in P$. Але остання рівність можлива лише тоді, коли $\delta_j = 0$, $j = 1,\ 2n+2, \ldots, 2n+p+1$, бо $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, за умовою. Звідси випливає

$$\sum_{j=1}^{2n+p+1} \delta_i \alpha_j = \sum_{j=2}^{2n+1} \delta_j \alpha_j = 0,$$

що й потрібно було показати. Цим доведено сумісність системи (20), а тому й сумісність систем (19) та (18), яку ми розглядали лише на підкласі $M_p \subset M$.

Лему 2 доведено.

Із доведення леми 2 випливає, що підклас $C_{11} \subset C_1$ не порожній для областей K_n, описаного вище типу. Підклас C_{11} є основний для означення і побудови структурної формули одного підкласу однозначних аналітичних в K_n функцій, що мають єдиний простий полюс в точці $z = \infty$ та є узагальнено опуклі в локальному розумінні в області K_n (див. нижче).

Позначимо такий підклас узагальнено опуклих в K_n функцій через U_{11}^0 й дамо означення.

О з н а ч е н н я. Однозначну та мероморфну в K_n функцію $w = f(z)$ з єдиним простим полюсом в $z = \infty$ назвемо функцією класу U_{11}^0, якщо вона задовольняє умову:

$$1 + \frac{(z - a_1) f''(z)}{f'(z)} = \psi(z) \in C_{11}. \tag{21}$$

З цього означення випливає:

1) клас U_{11}^0 не порожній, бо не порожній підклас C_{11};

2) оскільки $\operatorname{Re}\psi(a_1 + R_1 e^{i\theta}) \geqslant 0$, як це випливає із властивостей функцій підкласу C_{11}, то кожне коло $\Gamma_1^*: z = a_1 + \varrho e^{i\theta}$; $R_1 < \varrho < R_1 + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$—достатньо мале число, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, — перетворюється кожною функцією класу U_{11}^0 у відповідну замкнену аналітичну криву L_f на w-площині, узагальнено опуклу, тобто таку, що її тангенціальний вектор $\overrightarrow{d\tau_L}$ обертається в одному напрямі, коли точка w перебігає L в одному напрямі (і, отже, коли точка z перебігає в одному напрямі коло Γ_1^*);

3) нехай точка z описує коло Γ_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, в одному напрямі Тоді

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{(z - a_k) f''(z)}{f'(z)}\right]_{z \in \Gamma_k} = \operatorname{Re}\left[1 + \frac{z - a_k}{z - a_1}(\varphi(z) - 1)\right]_{z \in \Gamma_k} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{\varrho}{d - \varrho}\left(\frac{d - 2\varrho}{\varrho} + 1\right) = 0,$$

де $\varphi(z) \in C_{11}$; $\varrho \geqslant R_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $d = \inf\limits_{(k \neq j)} |\zeta_k - \zeta_j|$; $\zeta_k \in \Gamma_k$; $\zeta_j \in \Gamma_j$; $k \neq j$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Отже функції класу U_{11}^0 мають узагальнену опуклість, в кожному з кілець $Q_k^{(\delta)}$, $k=2, 3, \ldots, n$, якщо $\delta > 0$ — досить мале. З цього випливає, що клас U_{11}^0 складається з функцій, локально узагальнено опуклих в K_n, якщо K_n задовольняє наведені раніше умови. Можна побудувати структурну формулу цього класу.

Теорема. *Умовою, необхідною та достатньою для того, щоб $w = f(z)$ належала класу U_{11}^0 в області K_n описаного вище типу, є можливість подати цю функцію структурною формулою*

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{F_1(z;\zeta_1)-1}{z-a_1}\,d\mu(\theta)\right)dz\right]dz + C_2,$$

де C_1 та C_2 — сталі інтегрування, залежні від нормування функції $f(z)$ в довільно взятій та фіксованій точці z_0, $z_0 \in K_n$, $z_0 \neq \infty$; крім того, всі лишки експоненціальної функції дорівнюють нулеві, а лишки функції під знаком внутрішнього інтеграла — цілі числа, або нулі.

На доведенні цієї теореми зупинятись не будемо. Зауважимо лише, що її можна одержати, інтегруючи диференціальне рівняння $f'(z) + (z-a_1)f''(z) = \varphi(z)f'(z)$, де $\varphi(z) \in C_{11}$.

Зробимо принципове зауваження: метод, наведений вище, можна успішно застосувати для аналітичного доведення того, що всі класи однозначних аналітичних функцій в області K_n описаного вище типу, для яких побудовано структурні формули в роботі [3] (а також і інші класи, для яких можуть бути побудовані структурні формули) є не порожні. Це значить, що таким методом можна одержати доведення теорем існування та єдиності конформного відображення областей K_n описаного вище типу на цілі класи n-зв'язних областей, що мають певні аналітичні та геометричні властивості.

В цьому розумінні доведення того, що той чи інший клас аналітичних функцій, який має структурну формулу, є не порожнім — можна розглядати, як узагальнення теорем існування та єдиності конформного відображення n-зв'язних кругових областей згаданого типу на n-зв'язні області канонічних типів.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. А. Зморович, Формула Шварца для n-зв'язної кругової області, ДАН УРСР, № 5, 1958.
2. Л. О. Дундученко, Ще про формулу Шварца для n-зв'язної кругової області, ДАН УРСР, № 11, 1966.
3. Л. Е. Дундученко, Метод структурных формул в теории специальных классов аналитических функций, Автореф. докт. дисс. Институт матем. АН УССР, К., 1968.
4. И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, Гостехиздат, М., 1950.
5. Г. М. Голузин, Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями, Матем. сб., т. 41, № 2, 1934.
6. Фань Цзи, О системах линейных неравенств, Линейные неравенства и смежные вопросы (сб. переводов), ИЛ, М., 1959.

Надійшла 18.III 1970 р.
Київ