1971 УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 4
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.93

Принцип зведення у банаховому просторі

О. Б. Ликова

1. Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння в нескінченновимірному банаховому просторі

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

де $X(t, x, \varepsilon)$ — деяка функція дійсного змінного t, $x (x \in \mathfrak{L})$, ε, зі значеннями в $\mathfrak{L}$, ε — малий параметр.

Дослідимо поведінку розв'язків рівняння (1) в околі деякого стаціонарного розв'язку відповідного (1) породжуючого рівняння.

Припустимо, що вектор-функція $X(t, x, \varepsilon)$ має в указаному околі обмежену сильну похідну по x, тобто у $X(t, x, \varepsilon)$ можна виділити її головну лінійну частину

$$X(t, x, \varepsilon) = Ax + X_1(t, x, \varepsilon), \tag{2}$$

де величина $\| X_1(t, x, \varepsilon)\|$ має більш високий порядок малості, ніж $\| x \|$ Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X_1(t, x, \varepsilon), \tag{3}$$

де лінійний обмежений оператор A — сталий, якщо досліджується окіл статичного розв'язку $x = \zeta = \text{const}$ відповідного породжуючого рівняння, і $A = A(\psi)$ — періодична оператор-функція, якщо досліджується окіл періодичного розв'язку $x = x^\circ(\psi)$ породжуючого рівняння.

Розглянемо спочатку окіл нульового розв'язку $x = x_0 = 0$.

Спектр лінійного оператора A назвемо критичним, якщо він знаходиться на уявній осі або в її околі. Решту спектра оператора A назвемо некритичним.

Припустимо, що спектр $\sigma(A)$ оператора A в рівнянні (3) розбивається на дві спектральні множини $\sigma_1(A)$ та $\sigma_2(A)$, що відповідають критичній та некритичній частинам спектра, $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$. Через $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ позначимо відповідні інваріантні півпростори, так що $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$, $x = \{\xi, h\}$, де $\xi \in \mathfrak{L}_1$, $h \in \mathfrak{L}_2$, і визначимо $\| x \| = \max\{\|\xi\|, \| h \|\}$. Через A_1, A_2 — позначимо оператори, індуковані оператором A відповідно в півпросторах $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. Тоді рівняння (3) запишеться у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi + X_1(t, \xi, h, \varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt} = A_2 h + X_2(t, \xi, h, \varepsilon), \tag{4}$$

причому $\sigma(A_1) = \sigma_1(A)$, $\sigma(A_2) = \sigma_2(A)$.

Рівняння виду (4), в яких одна група рівнянь відповідає критичній частині спектра оператора, а інша — некритичній, будемо називати рівняннями спеціального виду, а змінні ξ, h відповідно критичною та некритичною змінними.

Рівняння типу (4) розглядалися в роботі [1].

Як показано в [1, стор. 342], функції, що стоять у правих частинах рівнянь зі значеннями у відповідних інваріантних півпросторах $\mathfrak{L}_1$ та $\mathfrak{L}_2$, визначені на множині $R \times U_{\delta_0} \times V_{\nu_0} \times \varepsilon_{\varepsilon_0}$, де R — дійсна вісь, $\xi \in U_{\delta_0}$ (U_{δ_0} — куля в півпросторі $\mathfrak{L}_1$ радіуса δ_0 з центром в точці $\xi = 0$), $h \in V_{\nu_0}$ (V_{ν_0} — куля в півпросторі $\mathfrak{L}_2$ радіуса ν_0 з центром в точці $h = 0$), неперервні, задовольняють умову Ліпшіца щодо ψ, h з константою Ліпшіца $\lambda(\varepsilon, \mu) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\mu \to 0$.

Для рівнянь виду (4) розроблено методи доведення існування локального інтегрального многовиду $\mathfrak{M}_t$, поданого співвідношенням виду $h = \varphi(t, \xi, \varepsilon)$. Вивчені його властивості, зокрема властивість стійкості. Встановлено, що на многовиді $\mathfrak{M}_t$ вихідне рівняння зводиться до рівняння відносно критичної змінної. Це рівняння описує потік на многовиді. Його вимірність дорівнює вимірності півпростору $\mathfrak{L}_1$ і взагалі менша, ніж вимірність вихідного фазового простору.

2. Для диференціальних рівнянь, що розглядаються в нескінченновимірному банаховому просторі $\mathfrak{L}$, цікаво встановити принцип зведення [2—4], який дозволяє питання про стійкість розв'язків рівнянь (3) при наявності критичної частини спектра у оператора, що стоїть коефіцієнтом у головній лінійній частині, звести до питання про стійкість розв'язків рівняння відносно критичної змінної і, таким чином, звести задачу про стійкість для рівняння (1), до задачі про стійкість для рівняння меншої вимірності, зокрема скінченної.

Другими словами, принцип зведення для рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + X_1(t, x, y, \varepsilon), \qquad \frac{dy}{dt} = A_2 y + X_2(t, x, y, \varepsilon), \tag{5}$$

що розглядаються в нескінченновимірному просторі $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$, де спектр оператора A_1 — критичний, а оператора A_2 — не перетинається з уявною віссю і знаходиться зліва від неї, полягає в знаходженні такої функції $y = \varphi(t, x, \varepsilon)$ ($x \in \mathfrak{L}_1$, $y \in \mathfrak{L}_2$), щоб питання про стійкість положення рівноваги рівнянь (5) зводилося до дослідження стійкості положення рівноваги рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + \overline{X}(t, x; \varphi(t, x, \varepsilon), \varepsilon), \tag{6}$$

що описує потік на многовиді, який визначається через $y = \varphi(t, x, \varepsilon)$.

Цікаво виділити ті випадки, коли рівняння (6) має скінченну вимірність. Так, якщо у спектра оператора A вдається виділити дискретну частку, що складається з k ізольованих точок $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$, розташованих на уявній осі, кожна скінченного рангу* $m_1, \ldots, m_k$, то приходимо до розглядання таких рівнянь, які описують потік на многовиді:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A_1\xi + P_1(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon), \\ \frac{d\eta}{dt} &= A_2\eta + P_2(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\zeta}{dt} &= A_k\zeta + P_k(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{7}$$

---

* Ізольована точка спектра α_j лінійного обмеженого оператора A має скінченний ранг m_j, якщо вона є полюсом порядку m_j в розвиненні відповідного резольвентного оператора в околі цієї точки в ряд Лорана.

Ці рівняння розглядаються в кореневих півпросторах $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_k$, відповідно вимірності $m_1, \ldots, m_k$ при цьому, $\sigma(A_1) = i\omega_1$, $\sigma(A_2) = i\omega_2, \ldots, \sigma(A_k) = i\omega_k$ і $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — скінченновимірні оператори порядків відповідно $m_1, \ldots, m_k$, індуковані оператором A в півпросторах $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$.

Якщо кожне із власних значень $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$ є ізольованою точкою спектра $\sigma(A)$ скінченного рангу, рівного 1 (оператор A є оператором скалярного типу), то рівняння, що описують потік на многовиді, записуються у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = i\omega_1\xi + P_1(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = i\omega_2\eta + P_2(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = i\omega_k\zeta + P_k(t, \xi, \eta, \ldots, \zeta, \varepsilon)$$

і розглядаються в одновимірних власних півпросторах $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$. Покладаємо далі, що рівняння відносно критичної змінної в (5) має скінченну вимірність.

Розглянемо тепер окіл періодичного розв'язку $x = x^0(\psi)$ $(x^0(\psi + 2\pi) = x^0(\psi))$, відповідного (1) породжуючого рівняння. В околі цього розв'язку вихідне рівняння можна представити у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = A(\psi)x + X(t, x, \varepsilon). \tag{9}$$

В лінійному рівнянні

$$\frac{dx}{dt} = A(\psi)x, \tag{10}$$

де $A(\psi)$ — періодична оператор-функція ψ періоду 2π, один характеристичний показник завжди дорівнює 0, отже, в наведеному рівнянні $\frac{dy}{dt} = By$ оператор B завжди має однократне нульове власне значення. Решту спектра оператора B позначимо $\sigma(B)$. Покладемо далі, що спектр $\sigma(B)$ розщіплюється на критичну частину $\sigma_1(B)$ (скінченної кратності) і некритичну $\sigma_2(B)$, яка не перетинається з уявною віссю і знаходиться зліва від неї. Позначимо через $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ — інваріантні півпростори, що відповідають точці 0 і спектральним множинам $\sigma_1(B)$ і $\sigma_2(B)$.

Як показано в [1], в розглянутому випадку рівняння (9) зображується у вигляді

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + Y_1(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon), \quad \frac{d\zeta}{dt} = A_1\zeta + Y_2(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon), \tag{11}$$

$$\frac{dh}{dt} = A_2 h + Y_3(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon),$$

де ψ — кутова змінна, функції $Y_1(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon)$, $Y_2(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon)$, $Y_3(t, \psi, \zeta, h, \varepsilon)$ визначені на множині $R \times \Psi \times U_{\gamma_0} \times V_{\mu_0} \times \varepsilon_{\varepsilon_0}$, неперервні, періодичні по ψ з періодом 2π, задовольняють умову Ліпшіца по ψ з константою $\lambda(\varepsilon, \mu) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\mu \to 0$.

На гладкому многовиді $\mathfrak{M}_t$ рівнянь (11), поданому співвідношенням

$$\mathfrak{M}_t\,\{(\psi, \zeta, h) : \psi \in \Psi, \, |\zeta| < \gamma_0, \quad h = \varphi(t, \psi, \zeta, \varepsilon)\}. \tag{12}$$

потік описується рівняннями

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega+\overline{Y}_1(t, \psi, \zeta, \varphi(t, \psi, \zeta, \varepsilon), \varepsilon),$$
$$\frac{d\zeta}{dt}=A_1\zeta+\overline{Y}_2(t, \psi, \zeta, \varphi(t, \psi, \zeta, \varepsilon), \varepsilon). \tag{13}$$

Якщо ввести позначення $a=(\omega, 0)$, $A=\operatorname{diag}(0, A_1)$,

$$\xi=(\psi, \zeta),\ h=q,\ X=(Y_1, Y_2), X_2=Y_3,\ \overline{X}_1=(\overline{Y}_1,\ \overline{Y}_2), \tag{14}$$

то рівняння (11) і (14) можна записати у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt}=a+A_1\xi+X_1(t, \xi, q, \varepsilon), \qquad \frac{dq}{dt}=A_2q+X_2(t, \xi, q, \varepsilon) \tag{15}$$

і

$$\frac{d\xi}{dt}=a+A_1\xi+\overline{X}_1(t, \xi, \varphi(t, \xi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{16}$$

Як бачимо, рівняння (15) і (16) є рівняннями того ж типу, що і рівняння (5) і (6).

3. Далі розглядатимемо рівняння

$$\frac{d\xi}{dt}=A_1\xi+X_1(t, \xi, h, \varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt}=A_2h+X_2(t, \xi, h, \varepsilon) \tag{17}$$

в припущенні, що праві частини задовольняють всі умови, які забезпечують існування гладкого інтегрального многовиду S_t рівнянь (17), зображеного співвідношенням $h=\varphi(t, \xi, \varepsilon)$.

Припускаємо також, що рівняння

$$\frac{d\xi}{dt}=A_1\xi+\overline{X}_1(t, \xi, \varphi(t, \xi, \varepsilon), \varepsilon), \tag{18}$$

яке описує потік на многовиді S_t, має скінченну вимірність.

Вводячи в рівняння (17) замість h нову змінну s за допомогою заміни

$$s=h-\varphi(t,\ \xi,\ \varepsilon), \tag{19}$$

одержуємо

$$\frac{d\xi}{dt}=A_1\xi+X_3(t,\ \xi, s, \varepsilon), \frac{ds}{dt}=A_2s+X_4(t, \xi, s, \varepsilon), \tag{20}$$

де вектор-функції $X_3(t, \xi, s, \varepsilon)$, $X_4(t, \xi, s, \varepsilon)$ зі значеннями в півпросторах $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ визначені на множині $R\times U_{\delta_0}\times V_{\nu_0}\times E_{\varepsilon_0}$, неперервні, задовольняють умову Ліпшіца відносно ξ, s з константою $\lambda(\varepsilon, \delta, \nu)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$, $\nu\to 0$, крім того, $X_4(t, \xi, 0, \varepsilon)=0$.

Згідно з формулами заміни змінних, многовид S_t для рівнянь (17), що визначається за допомогою співвідношення $h=\varphi(t, \xi, \varepsilon)$, для рівнянь (20) визначається за допомогою $s=0$. Отже, для рівнянь (20) потік на многовиді S_t описується рівнянням

$$\frac{d\xi}{dt}=A_1\xi+\overline{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon). \tag{21}$$

Покладаємо далі, що функція $\overline{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon)$ задовольняє умови

$$\|\overline{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon)\|\leqslant N(t),\ \ \|\overline{X}_3(t, \xi', 0, \varepsilon)-\overline{X}_3(t, \xi'', 0, \varepsilon)\|\leqslant g(t)\|\xi'-\xi''\| \tag{22}$$

з інтегрально обмеженими $N(t)$, $g(t)$.

Сформулюємо теорему.

Т е о р е м а. *Нехай функції, що стоять у правих частинах рівнянь* (20), (21), *мають згадані вище властивості і, крім того, спектр оператора* A_1 *є критичним, а оператора* A_2 *не перетинається з уявною віссю і знаходиться зліва від неї. Тоді стійкість положення рівноваги* $\xi=0$, $s=0$ *рівнянь*

(20) *повністю визначається стійкістю положення рівноваги* $\xi = 0$ *рівняння* (21).

Д о в е д е н н я. Візьмемо довільні вектори x, y, що задовольняють умови

$$\|x\| < \delta_1, \quad \|y\| < \nu_1 \quad (\delta_1 \leqslant \delta_0, \nu_1 \leqslant \nu_0) \tag{23}$$

і розглянемо розв'язок рівнянь (20)

$$\xi(t) = \xi(t, x, y); \quad s(t) = s(t, x, y), \tag{24}$$

що задовольняють початкові умови $\xi(0) = x$, $s(0) = y$. Згідно з властивостями правих частин рівнянь (20) такий розв'язок існує для всіх $t \geqslant 0$.

Через $u(t, p)$ позначимо єдиний розв'язок рівняння (22), що задовольняє початкову умову $u(0, p) = p$.

Через $U(t)$ позначимо розв'язний оператор однорідного рівняння $\frac{d\xi}{dt} = A_1\xi$ і припустимо, що він задовольняє оцінки

$$\|U(t)\| \leqslant M_1, \qquad \|U^{-1}(t)\| \leqslant M_1. \tag{25}$$

(В розглядуваному випадку, коли спектр оператора A_1 є критичним, ці нерівності завідомо виконуватимуться, якщо A_1 — оператор скалярного типу).

Нехай нульовий розв'язок рівняння (21) стійкий. Це означає, що для заданого δ_1, можна знайти таке $\delta_2 > 0$, що для всіх $\|p\| \leqslant \delta_2$ виконується нерівність

$$\|u(t, p)\| \leqslant \delta_1. \tag{26}$$

Для розв'язку $u(t, p)$, зображеного у вигляді

$$u(t, p) = U(t)p + \int_0^t U(t)U^{-1}(\alpha)\overline{X}_3(\alpha, u(\alpha, p), 0, \varepsilon)\,d\alpha, \tag{27}$$

приймаючи до уваги умови (25) та скориставшись відомою лемою Беллмана—Гронволла, одержимо нерівність

$$\|u(t, p') - u(t, p'')\| \leqslant M_2\|p' - p''\|, \tag{28}$$

де M_2 — деяка стала.

Теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що (при зроблених припущеннях) розв'язок системи (20) $\xi(t) = \xi(t, x, y)$, $s(t) = s(t, x, y)$ можна зобразити у вигляді

$$\xi(t) = u(t, p) + v(t), \quad s(t) = s(t), \tag{29}$$

де $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Метод доведення теореми, як і в [2, 3], полягає в такому. Спочатку ми виходимо з припущення, що зображення (29) існує, і встановлюємо оцінки для $v(t)$, $s(t)$. Показуємо, що $v(t) \to 0$, $s(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Потім доводимо законність зображення (29).

Ітак, нехай зображення існує. Тоді підставляючи вираз (29) в рівняння (20), беручи до уваги, що $u(t, p)$ — розв'язок рівняння (21), одержуємо*

$$\frac{dv}{dt} = (S + N)v + X_3(t, u + v, s, \varepsilon) - X_3(t, u, 0, \varepsilon). \tag{30}$$

---

* Як відомо, для скінченновимірного лінійного оператора A має місце розклад Данфорда $A = S + N$, де S — оператор скалярного типу $\left(S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I_k,\ \lambda_k \neq \lambda_j,\ k \neq j\right)$, $N = \sum_{k=1}^{n} N_k$, де N_k — нільпотентні оператори, $\|N\| \leqslant \gamma$, $\gamma = \text{const}$, $\|S\| = k$, k—порядок оператора. У розглядуваному випадку, коли спектр оператора A_1 є критичним, $\|e^{St}\| = 1$.

Вводячи в рівняння (30) замість v нову змінну f за допомогою заміни

$$f = e^{-St}v, \qquad \| e^{-St} \| = 1, \qquad \| f \| = \| v \|, \tag{31}$$

одержуємо

$$\frac{df}{dt} = Nf + e^{St}\{X_3(t, u + e^{St}f, s, \varepsilon) - X_3(t, u, 0, \varepsilon)\}. \tag{32}$$

Знайдемо функції $f(t)$, $s(t)$, розв'язуючи методом послідовних наближень таку систему інтегральних рівнянь:

$$f(t) = \int_{\infty}^{t} \{Nf(\tau) + e^{-S\tau}[X_3(\tau, u(\tau, p) + e^{S\tau}f(\tau), s(\tau), \varepsilon) - X_3(\tau, u(\tau, p), 0, \varepsilon)]\} d\tau, \tag{33}$$

$$s(t) = e^{A_2 t}\left\{y + \int_0^t e^{-A_2\tau}[X_4(\tau, u(\tau, p) + e^{S\tau}f(\tau), s(\tau), \varepsilon)] d\tau\right\}. \tag{34}$$

Покладемо $f^0 \equiv 0$, $s^0 = e^{A_2 t}y$ і визначимо

$$f^k(t) = \int_{\infty}^{t} \{Nf^{k-1}(\tau) + e^{-S\tau}[X_3(\tau, u(\tau, p) + e^{S\tau}f^{k-1}(\tau), s^{k-1}(\tau), \varepsilon) - X_3(\tau, u(\tau, p), 0, \varepsilon)]\} d\tau, \tag{35}$$

$$s^k(t) = e^{A_2 t}y + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)}X_4(\tau, u(\tau, p) + e^{S\tau}f^{k-1}(\tau), s^{k-1}(\tau), \varepsilon) d\tau \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Зауважимо, що оскільки $u = u(\tau, p)$, то, очевидно, $f(t) = f(t, p, y)$, $s(t) = g(t, p, y)$.

Крім того, з властивостей функцій, що стоять у правій частині рівнянь (20), маємо $X_1(t, \xi, s, \varepsilon) \in \mathrm{Lip}\{\xi, s; \lambda(\varepsilon, \mu)\}$, а згідно з (27) $u(t, p) \in \mathrm{Lip}\{p; M_2\}$, де M_2 — деяка стала.

Тому із (33), беручи до уваги (31), одержуємо

$$\| f(t, p', y) - f(t, p'', y) \| \leqslant \frac{\lambda(\varepsilon, \mu)}{k} M_2 \| p' - p'' \|, \tag{36}$$

де $k = \| S \|$.

Взявши $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ та $\mu_1 \leqslant \mu_0$ достатньо малими, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\mu < \mu_1$ було $\frac{\lambda(\varepsilon, \mu)}{k} M_2 < 1$, одержимо, що функція $f(t, p, y)$ задовольняє умову Ліпшіца відносно p:

$$\| f(t, p', y) - f(t, p'', y) \| \leqslant q \| p' - p'' \| \tag{37}$$

з константою $q < 1$.

Оскільки спектр оператора A_2 знаходиться зліва від уявної осі, то існують такі $\beta > 0$ і $D > 0$, що при $t \geqslant 0$

$$\| e^{A_2 t} \| \leqslant De^{-\beta t}.$$

Беручи до уваги властивості функцій, що стоять у правій частині рівнянь (35), неважко показати, що всі послідовні наближення $f^k(t, p, y)$, $s^k(t, p, y)$ задовольняють нерівності

$$\| f^k(t, p, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \| y \| e^{-\beta t}, \qquad \| s^k(t, p, y) \| \leqslant D_k \| y \| e^{-\beta t}, \tag{39}$$

де $D_k = D(1 + D_{k-1}), \ldots, D_2 = D(1 + \lambda D_1)$, $D_1 = D(1 + \lambda)$, $\lambda \ll \beta$, $\lambda = \lambda(\varepsilon, \mu)$.

Із одержаних нерівностей випливає рівномірна збіжність інтегралів в (35) при $t \geqslant 0$ і достатньо малому значенні $\|y\|$. Звідси випливає, що функції $f^k(t, p, y)$, $s^k(t, p, y)$ визначені і неперервні при достатньо малому значенні $\|y\|$.

Використовуючи той же мажораційний прийом, що і при одержанні оцінок (39), неважко встановити нерівності

$$\| f^n(t, p, y) - f^{n-1}(t, p, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \| y \| e^{-\beta t}, \tag{40}$$

$$\| g^n(t, p, y) - g^{n-1}(t, p, y) \| \leqslant D\lambda_n \| y \| e^{-\beta t} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{41}$$

з яких випливає, що послідовності $f^k(t, p, y)$, $s^k(t, p, y)$, рівномірно збігаються при достатньо малому значенні $\|y\|$.

Покладемо

$$\lim_{k\to\infty} f^k(t, p, y) = f(t, p, y), \quad \lim_{k\to\infty} s^k(t, p, y) = s(t, p, y). \tag{42}$$

Оскільки послідовності $f^k(t)$, $s^k(t)$ збігаються рівномірно, то функції $f(t, p, y)$, $s(t, p, y)$ визначені і неперервні при $t \geqslant 0$, $\|y\| < \nu_1$. Переходячи до границі в оцінках (39), одержуємо

$$\| f(t, p, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \| y \| e^{-\beta t}, \quad \| s(t, p, y) \| \leqslant D \| y \| e^{-\beta t}. \tag{43}$$

Беручи до уваги (31), одержуємо остаточно

$$\| v(t, p, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \| y \| e^{-\beta t}, \quad \| s(t, p, y) \| \leqslant D \| y \| e^{-\beta t}. \tag{44}$$

Отже, при $t \to \infty$: $v(t, p, y) \to 0$, $s(t, p, y) \to 0$. Із (44), зокрема, випливає

$$\| v(0, p, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \| y \|. \tag{45}$$

Перехід до границі при $n \to \infty$ в (35) показує, що функції $f(t, p, y)$, $s(t, p, y)$ задовольняють систему інтегральних рівнянь (33) — (34).

Диференціюючи систему (33) — (34), одержуємо, що функції $f(t, p, y)$, $s(t, p, y)$ являють собою розв'язки диференціальних рівнянь (20). Щоб завершити доведення теореми, треба довести вірність зображення

$$\xi(t, x, y) = u(t, p) + v(t, p, y), \quad s(t, x, y) = g(t, p, y). \tag{46}$$

Тут $\xi(0, x, y) = x$, $s(0, x, y) = y$, $u(0, p) = p$, $g(0, p, y) = y$.

Згідно з теоремою про єдиність розв'язку для виконання рівностей (46) необхідно і достатньо їх виконання при $t = 0$:

$$x = p + v(0, p, y) = w(p, y), \quad y = y, \tag{47}$$

причому, $\|p\| < \delta_2$, $\|x\| < \delta_1$, $\|y\| < \nu_1$.

Відображення (47) визначено на добутку $U_{\delta_2} \times V_{\nu_1}$ (U_{δ_2} — відкрита куля в $\mathfrak{L}_1$ радіуса δ_2 з центром у точці $\xi = 0$; V_{ν_1} — відкрита куля в $\mathfrak{L}_2$ радіуса ν_1 з центром у точці $y = 0$) і діє в добуток просторів $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$.

Згідно з (36), для будь-яких двох точок p', p'' із кулі U_{δ_2} виконується нерівність

$$\| v(0, p', y) - v(0, p'', y) \| \leqslant q \| p' - p'' \|, \tag{48}$$

де $q < 1$ для всіх $y \in V_{\nu_2}$.

Крім того, згідно з (45)

$$\| v(0, 0, y) \| \leqslant \frac{1}{2} \nu_2. \tag{49}$$

Отже (див., наприклад, [6, стор. 306]), існує відкритий окіл $U_{\delta_3} \times V_{\nu_2}$ точки $p=0$, $y=0$ такий, що при достатньо малому значенні ν_2 звуження на $U_{\delta_3} \times V_{\nu_2}$ $(\delta_3 < \delta_2)$ відображення (47) є гомоморфізмом $U_{\delta_3} \times V_{\nu_2}$ на деякий окіл точки $x=0$, $y=0$ в добутку просторів $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$.

Звідси випливає вірність зображення (47), а отже, і (46), що завершує доведення теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, изд. Ин-та матем. АН УССР, К., 1968.
2. В. А. Плисс, Принцип сведения в теории устойчивости движения, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 6, 1964.
3. Ae Kelley, Stability of the Center—Stable Manifold, Journ. of Mathem. Analysis and Applic., v. 18, № 2, 1967.
4. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
5. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.
6. Ж. Дьедоне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.
7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Труды V-й международной конференции по нелинейным колебаниям, т. I, изд. Ин-та матем. АН УССР, К., 1970.
8. И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный анализ, «Наука», М., 1969.

Надійшла 24.XII 1970 р.

Інститут математики АН УРСР