УДК 517.944

Аналог n-точкової задачі для лінійного гіперболічного рівняння

Б. Й. Пташник

В цій роботі розглядається задача типу n-точкової задачі Валле-Пуссена для лінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами, однорідного щодо порядку диференціювання, у випадку багатьох просторових змінних. Для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами у випадку однієї просторової змінної ця задача вивчалась в роботах [1, 2].

§ 1. Загальна постановка задачі

Нехай в області $R_m = D_m \times [0 \leqslant t \leqslant T < \infty]$, де $D_m = \{-\infty < x_p < +\infty;\ p = 1, \ldots, m\}$, дано лінійне диференціальне рівняння порядку n гіперболічного типу

$$L[u(t, x_1, \ldots, x_m)] = f(t, x_1, \ldots, x_m). \tag{1}$$

Слід знайти в R_m розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови виду

$$u(t_j, x_1, \ldots, x_m) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \qquad j = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T. \tag{2}$$

Якщо розглядати змінну t як час, то можна сказати, що гіперболічне рівняння (1) описує деякий процес. Тоді розв'язок задачі (1), (2) рівносильний визначенню цього процесу для проміжку часу $0 \leqslant t \leqslant T$ за відомими станами (фотографіями) процесу для n фіксованих моментів часу $t = t_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Виявилось [1, 2], що розв'язок задачі (1), (2), взагалі кажучи, не буде єдиним, якщо не підпорядкувати його додатковим умовам. За такі умови беремо умови періодичності за всіма просторовими змінними, при цьому припускається, що функції f і φ_j $(j = 1, \ldots, n)$ — досить гладкі і 2π-періодичні щодо $x_1, \ldots, x_m$ і що f — неперервна щодо t.

Запровадимо позначення, якими користуватимемось надалі: $x = (x_1, \ldots, x_m)$; $k = (k_1, \ldots, k_m)$; (k, x) — скалярний добуток векторів k і x; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$; $C_{2\pi}^{(p,q)}(R_m)$ — клас функцій $v(t, x_1, \ldots, x_m)$, які визначені в області R_m і p раз неперервно диференційовні по t, q раз неперервно диференційовні і 2π-періодичні щодо $x_1, \ldots, x_m$.

Лінійний клас функцій $C_{2\pi}^{(p,q)}(R_m)$ стане метричним простором, якщо запровадити норму функції $v(t, x_1, \ldots, x_m)$ як суму, що містить максимуми моделей всіх її похідних, в яких допускається диференціювання по t до порядку p, а по x до порядку q.

Зауважимо, що задачу (1), (2) можна звести до аналогічної задачі з однорідними умовами. А саме, покладаючи

$$u(t, x) = v(t, x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \prod_{r=1; r \neq j}^{n} \frac{t - t_r}{(t_j - t_r)},$$

одержуємо для функції $v(t, x)$ таку задачу:

$$L[v] = \Phi(t, x), \quad v(t_j, x) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

де
$$\Phi(t, x) = f(t, x) - L\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \prod_{r=1; r \neq j}^{n} \frac{t - t_r}{t_j - t_r}\right].$$

§ 2. Задача типу Валле-Пуссена для рівняння, однорідного щодо порядку диференціювання

1. Розглянемо в області R_m рівняння виду

$$L[u] = Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) u = f(t, x), \tag{3}$$

де $Q(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ є однорідним многочленом степеня n з сталими дійсними коефіцієнтами щодо своїх аргументів, а $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N)}(R_m)$ (N — деяке досить велике, натуральне число). Потрібно знайти розв'язок рівняння (3), що належить класу $C_{2\pi}^{(n,n)}(R_m)$ і задовольняє умови

$$u(t_j, x) = 0, \; j = 1, \ldots, n; \; 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T < \infty. \tag{4}$$

Припустимо спочатку, що оператор L строго гіперболічний. Це значить, що при будь-якому дійсному $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ всі корені λ рівняння,

$$Q(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0 \tag{5}$$

дійсні і різні і що коефіцієнт $Q(1, 0, \ldots, 0)$ при вищій похідній по t відмінний від нуля [3]. Не обмежуючи загальності, припускатимемо, що $Q(1, 0, \ldots, 0) = 1$.

Розв'язок задачі (3), (4) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp i \sum_{p=1}^{m} k_p x_p, \tag{6}$$

де $u_k(t)$ є розв'язком відповідної n-точкової задачі

$$Q\left(\frac{d}{dt}, ik_1, \ldots, ik_m\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{7}$$

$$u_k(t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(t, x_1, \ldots, x_m) \exp\left[-i \sum_{p=1}^{m} k_p x_p\right] dx_1 \ldots dx_m.$$

Зазначимо, що для вектора $k = 0$ завжди існує єдиний розв'язок $u_0(t)$ задачі (7), (8) [4].

Позначимо через $\lambda_p(k)$ $(p = 1, \ldots, n)$ корені рівняння

$$Q\left(\lambda, \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}}, \ldots, \frac{k_m}{\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}}\right) = 0. \tag{9}$$

(Вони є рівномірно обмеженими для всіх векторів $k \neq 0$, оскільки в рівнянні (9) коефіцієнт при λ^n дорівнює одиниці, а інші коефіцієнти рівномірно обмежені).

Тоді функції

$$y_{kp}(t) = \exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$Q\left(\frac{d}{dt},\ ik_1, \ldots, ik_m\right) u_k(t) = 0. \tag{7*}$$

При цьому розв'язок задачі (7*), (8) набуває вигляду

$$u_k(t) = \sum_{p=1}^{n} C_{kp} \exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t, \tag{11}$$

де коефіцієнти C_{kp} визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{p=1}^{n} C_{kp} \exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

детермінант якої дорівнює

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \exp i\lambda_1(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_1 \ldots \exp i\lambda_n(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \exp i\lambda_1(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_n \ldots \exp i\lambda_n(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_n \end{vmatrix}. \tag{13}$$

2. При дослідженні питання про єдиність розв'язку рівняння (3), що задовольняє умови (4), потрібним буде також відповідне однорідне рівняння

$$L[u] \equiv Q\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_m}\right) u = 0. \tag{3*}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (3), (4) *в класі* $C_{2\pi}^{(n,n)}(R_m)$ *необхідно, а в класі* $C_{2\pi}^{(n,n+m+1)}(R_m)$ *необхідно і достатньо, щоб для всіх цілочислових векторів* $k \neq 0$ *виконувалась умова*

$$\Delta(k) \neq 0. \tag{14}$$

Доведення необхідності. Якщо для деякого вектора $k_0 = (k_{10}, \ldots, k_{m0})$ $\Delta(k_0) = 0$, то задача (7*), (8) має, принаймні, один нетривіальний розв'язок

$$u_{k_0}(t) = \sum_{p=1}^{n} C_{k_0 p} \exp i\lambda_p(k_0)\sqrt{k_{10}^2 + \ldots + k_{m0}^2}\, t,$$

де $C_{k_0 p}$ $(p = 1, \ldots, n)$ — розв'язок системи

$$\sum_{p=1}^{n} C_{k_0 p} \exp i\lambda_p(k_0)\sqrt{k_{10}^2 + \ldots + k_{m0}^2}\, t_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{12*}$$

Тоді функція

$$u_0(t, x) = \sum_{p=1}^{n} C_{k_0 p} \exp i\left[\lambda_p(k_0)\sqrt{k_{10}^2 + \ldots + k_{m0}^2}\, t + \sum_{r=1}^{n} k_{r0} x_r\right]$$

є розв'язком однорідної задачі (3*), (4), і розв'язок задачі (3), (4) (якщо він існує) не буде єдиним.

Доведення достатності. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t, x)$ і $u_2(t, x)$ задачі (3), (4) із класу $C_{2\pi}^{(n,n+m+1)}(R_m)$. Тоді функція $u = u_1 - u_2$ є розв'язком однорідної задачі (3*), (4) і також належить класу $C_{2\pi}^{(n,n+m+1)}(R_m)$; отже, її можна розвинути в ряд Фур'є

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} b_k(t) \exp i \sum_{p=1}^{m} k_p x_p \tag{15}$$

і застосувати до цього ряду оператор L.

Підставляючи ряд (15) в рівняння (3*) і умови (4), бачимо, що кожна з функцій $b_k(t)$ є розв'язком задачі (7*), (8), і внаслідок умов (14) та зробленого в п. 1 зауваження, одержуємо, що для всіх векторів k $b_k(t) \equiv 0$. Із теореми про єдиність розвинення функції в ряд Фур'є випливає, що $u(t, x) \equiv 0$, тобто $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Теорему доведено.

Для деяких окремих випадків взаємного розміщення точок t_j $(j = 1, \ldots, n)$ на відрізку $[0, T]$ можна одержати більш ефективні умови єдиності розв'язку задачі (3), (4).

Розглянемо один із таких випадків, коли

$$t_{j+1} - t_j = t_0 > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1; \quad t_1 = 0. \tag{16}$$

При цих умовах

$$\Delta(k) = \prod_{n \geqslant p > r \geqslant 1} [\exp i\lambda_p(k) \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_0 - \exp i\lambda_r(k) \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\, t_0]. \tag{17}$$

Із (17) і теореми 1 випливає теорема.

Теорема 2. *Якщо справджуються співвідношення* (16), *то для єдиності розв'язку задачі* (3), (4) *в класі* $C_{2\pi}^{(n,n)}(R_m)$ *необхідно, а в класі* $C_{2\pi}^{(n,n+m+1)} \times (R_m)$ *необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь*

$$[\lambda_p(k) - \lambda_r(k)] \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2} - \frac{2\pi}{t_0} l = 0, \quad p, r = 1, \ldots, n; \quad p \neq r, \tag{18}$$

не мало нетривіальних розв'язків в цілих числах $k_1, \ldots, k_m, l$.

3. А. Очевидно, що розв'язок розглядуваної задачі (3), (4) існує, коли для кожного вектора k з цілочисловими координатами існує розв'язок задачі (7), (8) і коли в області R_m ряд (6) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати n разів.

Якщо для вектора $k_0 = (k_{10}, \ldots, k_{m0})$ $\Delta(k_0) = 0$, то розв'язок $u_{k0}(t)$ відповідної задачі (7), (8), взагалі кажучи, не існує. Для розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоб для кожного розв'язку $\widetilde{C}_{k_0 p}$ $(p = 1, \ldots, n)$ системи

$$\sum_{p=1}^{n} \widetilde{C}_{k_0 p} \exp[-i\lambda_j(k_0) \sqrt{k_{10}^2 + \ldots + k_{m0}^2}\, t_p] = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

спряженої до системи (12*), справджувались рівності

$$\sum_{p=1}^{n} \widetilde{C}_{k_0 p} \int_0^T g_{k_0}(t_p, \tau) f_{k_0}(\tau)\, d\tau = 0,$$

тобто, щоб функція $f(t, x)$ задовольняла умови

$$\int_{\overline{R}_m} \sum_{p=1}^{n} \widetilde{C}_{k_0 p} g_{k_0}(t_p, \tau) f(\tau, x) \exp[-i(k_0, x)]\, d\tau dx = 0,$$

де $\overline{R}_m = \{0 \leqslant t \leqslant T;\ 0 \leqslant x_p \leqslant 2\pi,\ p = 1, \ldots, m\}$, а $g_k(t, \tau)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (7*), який визначається формулою (23) (див. нижче).

Припустимо тепер, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх цілочислових векторів $k \neq 0$. Тоді для кожного вектора k існує функція Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі (7*), (8) (див. [5]), з допомогою якої розв'язок задачі (7), (8) зображується так:

$$U_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{19}$$

В квадраті $K = \{0 \leqslant t, \tau \leqslant T\}$ (крім прямих $\tau = t_j$, $j = 1, \ldots, n$; $\tau = 0$, $\tau = T$) функція $G_k(t, \tau)$ визначається формулою

$$G_k(t, \tau) = \frac{Z_k(t, \tau)}{\Delta(k)}, \tag{20}$$

де

$$Z_k(t, \tau) = \begin{vmatrix} g_k(t, \tau) & y_{k1}(t) \ldots y_{kn}(t) \\ g_k(t_1, \tau) & y_{k1}(t_1) \ldots y_{kn}(t_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_k(t_n, \tau) & y_{k1}(t_n) \ldots y_{kn}(t_n) \end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$g_k(t, \tau) = \frac{\operatorname{sign}(t - \tau)}{2W_k(\tau)} \begin{vmatrix} y_{k1}(\tau) \ldots y_{kn}(\tau) \\ y'_{k1}(\tau) \ldots y'_{kn}(\tau) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{k1}^{(n-2)}(\tau) \ldots y_{kn}^{(n-2)}(\tau) \\ y_{k1}(t) \ldots y_{kn}(t) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$y_{k1}(t), \ldots, y_{kn}(t)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (7*), а $W_k(t)$ — вронскіан цієї системи функцій.

$G_k(t, 0)$ довизначається за неперервністю по τ справа, а $G_k(t, T)$ — зліва. На прямих $\tau = t_j$, де t_j — внутрішня точка відрізка $[0, T]$, спосіб довизначення функції $G_k(t, \tau)$ можна вибрати довільно, оскільки це не істотно при обчисленні інтеграла в формулі (19).

Підставляючи в (22) значення функцій $y_{kp}(t)$, $p = 1, \ldots, n$, одержуємо

$$g_k(t, \tau) = \frac{\operatorname{sign}(t - \tau)}{2\left(i\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\right)^{n-1}} \sum_{p=1}^{n} \frac{\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}\,(t - \tau)}{\prod\limits_{r=1;\, r\neq p} [\lambda_p(k) - \lambda_r(k)]}. \tag{23}$$

На основі формул (6), (19) і (20) для розв'язку задачі (3), (4) одержуємо вираз

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty}{}' \exp i \sum_{p=1}^{m} k_p x_p \int_0^T \frac{Z_k(t, \tau)}{\Delta(k)} f_k(\tau)\, d\tau, \tag{24}$$

де (′) означає, що пропущено сумування за нульовим вектором $k = (0, \ldots, 0)$.

Слід зауважити, що ряд (24), взагалі кажучи, є розбіжним, оскільки визначник $\Delta(k)$ або $[\lambda_p(k) - \lambda_r(k)]$ $(p, r = 1, \ldots, n;\ p \neq r)$, будучи відмінними від нуля, можуть стати як завгодно малими для нескінченної множини векторів k з цілочисловими координатами. Таким чином, питання про існування розв'язку задачі (3), (4) зводиться до проблеми малих знаменників.

Проте, якщо функція $f(t, x)$ щодо змінних $x_1, \ldots, x_m$ є тригонометричним многочленом виду

$$f(t, x) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \ldots \sum_{k_m=-N_m}^{N_m} f_k(t) \exp i(k, x), \tag{25}$$

то задача (3), (4) завжди має розв'язок.

В загальному випадку має місце теорема.

Теорема 3. *Нехай існують такі додатні константи M_1 і M_2 та натуральні числа s_1 і s_2, що для всіх (за виключенням кінцевого числа) векторів k з цілочисловими координатами справджуються нерівності*

$$|\lambda_p(k) - \lambda_r(k)| \geqslant M_1(|k_1| + \ldots + |k_m|)^{1-s_1}, \quad p, r = 1, \ldots, n; \ p \neq r, \tag{26}$$

$$\left| \frac{\Delta_{jp}(k)}{\Delta(k)} \right| \leqslant M_2(|k_1| + \ldots + |k_m|)^{s_2-\alpha}, \ j, p = 1, \ldots, n; \ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{27}$$

де $\Delta_{jp}(k)$ — *алгебраїчне доповнення елемента* $\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}t_j$ *визначника* $\Delta(k)$ *і нехай* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{[0,(n-1)(s_1-2)+s_2+m+p]}(R_m)$ $(p \geqslant n)$. *Тоді задача* (3), (4) *має розв'язок, який належить класу* $C_{2\pi}^{(p,p)}(R_m)$ *і зображується рядом* (24).

Доведення. Із (24), (21), (23), (26) і (27) випливає, що мажорантою ряду (24) і рядів, одержаних з нього почленним диференціюванням до p-го порядку включно, є такий числовий ряд

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_0(t)| + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty}{}' A \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |f_k(t)| \, |k|^{(n-1)(s_1-2)+s_2+p-\alpha}, \tag{28}$$

де $A > 0$ — деяка константа, що не залежить від k. Далі, якщо $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N)}(R_m)$, то

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |f_k(t)| = O(|k|^{-N}). \tag{29}$$

Отже, загальний член ряду (28) має оцінку $O(|k|^{-(m+\alpha)})$. Тому ряд (28) збігається. Тоді ряд (24) і ряди, одержані з нього почленним диференціюванням до p-го порядку включно збігаються абсолютно і рівномірно в області R_m.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (3) оператор L має вигляд

$$L \equiv \prod_{p=1}^{n} \left(\Delta - \frac{1}{a_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \tag{30}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$, то нерівності (26) справджуються при $s_1 = 1$ і $M_1 = \min_{1 \leqslant p, r \leqslant n} \{|a_p - a_r|\}, \ p \neq r$.

Зауваження 2. Легко показати, що якщо послідовність функцій $f_q(t, x) \in C_{2\pi}^{[0,p+(n-1)(s_1-2)+s_2+m]}(R_m)$ при $q \to \infty$ прямує за метрикою простору $C_{2\pi}^{[0,p+(n-1)(s_1-2)+s_2+m]}(R_m)$ до функції $f(t, x)$, то при виконанні умов (26) і (27) послідовність розв'язків $u_q(t, x)$ рівнянь $L[u(t, x)] = f_q(t, x)$, що задовольняють умови (4), прямує за метрикою простору $C_{2\pi}^{(p,p)}(R_m)$ до розв'язку $u(t, x)$ задачі (3), (4).

Отже, розв'язок задачі (3), (4) при виконанні умов теореми 3 коректний за типом $(p, \ p + (n-1)(s_1 - 2) + s_2 + m)$ [6].

Б. Розглянемо тепер питання про існування розв'язку задачі (3), (4), коли мають місце співвідношення (16), тобто коли в умовах (4) значення функції фіксуються через однакові проміжки часу.

В цьому випадку, для функції Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі (7*), (8) одержуємо вираз (31), де $S_{n-q}^{(p)}$ — сума найрізноманітніших добутків елементів

$$y_{k1}(t_0), \ldots, y_{kp-1}(t_0), \quad y_{kp+1}(t_0), \ldots, y_{kn}(t_0),$$

взятих по $n-q$ в кожному добутку (при цьому вважаємо, що $S_0^{(p)} = 1$):

$$G_k(t, \tau) = \frac{Z_k(t, \tau)}{\Delta(k)} = \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{2\left(i\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\right)^{n-1}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s=1}^{n} \frac{\exp i\lambda_s(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,(t-\tau)}{\prod\limits_{p=1;\,p\neq s}[\lambda_s(k)-\lambda_p(k)]} - \right.$$

$$-\sum_{q=1}^{j}\sum_{s,p=1}^{n} \frac{(-1)^{n+q+1}\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t\exp i\lambda_s(k)\times \sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,(t_q-\tau)\,S_{n-q}^{(p)}}{\prod\limits_{l=1;\,l\neq s}[\lambda_s(k)-\lambda_l(k)]\prod\limits_{r=1;\,r\neq p}\left[\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0 - \exp i\lambda_r(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0\right]} +$$

$$\left. + \sum_{q=j+1}^{n}\sum_{s,p=1}^{n} \frac{(-1)^{n+q+1}\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t\exp i\lambda_s(k)\times \sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,(t_q-\tau)\,S_{n-q}^{(p)}}{\prod\limits_{l=1;\,l\neq s}[\lambda_s(k)-\lambda_l(k)]\prod\limits_{r=1;\,r\neq p}\left[\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0 - \exp i\lambda_2(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0\right]} \right\}, \quad (31)$$

$$t_j < \tau < t_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots, n;\ t_{j+1} - t_j = t_0\ (j = 1, \ldots, n-1),\ t_1 = 0,$$
$$t_{n+1} = T.$$

Зауважимо, що для будь-якого вектора $k \neq 0$ справджується нерівність

$$\left|\exp i\lambda_p(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0 - \exp i\lambda_r(k)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,t_0\right| >$$
$$> \frac{t_0}{2\pi}\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\left|\,|\lambda_p(k)-\lambda_r(k)| - \frac{l}{\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}}\frac{2\pi}{t_0}\right|, \qquad (32)$$

де l — ціле невід'ємне число, що задовольняє нерівність

$$\left|\,|\lambda_p(k)-\lambda_r(k)|\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}\,\frac{t_0}{2\pi} - l\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. *Якщо для всіх (за виключенням скінченного числа) сукупностей цілих чисел $k_1, \ldots, k_m$ і $l \geqslant 0$ справджуються нерівності (26) і нерівності*

$$\left|\,|\lambda_p(k)-\lambda_r(k)| - \frac{l}{\sqrt{k_1^2+\ldots+k_m^2}}\frac{2\pi}{t_0}\right| \geqslant M_3|k|^{\frac{\alpha}{n-1}-s_3}\begin{pmatrix} p, r = 1, \ldots, n \\ p \neq r, \\ 0 < \alpha \leqslant 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

де M_1 і M_3 — додатні константи, а s_1 і s_3 — деякі натуральні числа, і якщо $f(t, x) \in C_{2\pi}^{[0,(n-1)(s_1+s_3-3)+m+p]}(R_m)$, $p \geqslant n$, то існує розв'язок задачі (3), (4) із класу $C_{2\pi}^{(p,p)}(R_m)$.

Доведення. Із (31), (32), (33) і (26) одержуємо такі оцінки для $G_k(t, \tau)$ та її похідних по t:

$$\left| \frac{\partial^q G_k(t, \tau)}{\partial t^q} \right| \leqslant B\,|k|^{(n-1)(s_1+s_3-3)+q-\alpha}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

де $B > 0$ деяка константа, що не залежить від k. Далі доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 3.

Лема 1. *Нехай $\Phi(k_1, \ldots, k_m)$ — обмежена послідовність додатних чисел. Тоді нерівність*

$$\left| \Phi(k) - \frac{la}{\sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}} \right| < \frac{1}{(|k_1| + \ldots + |k_m|)^{m+2+\alpha}}, \tag{35}$$

де $0 < \alpha < 1$, для майже всіх $a > 0$ має не більше скінченного числа розв'язків в цілих числах $k_1, k_2, \ldots, k_m$ і $l > 0$.

Доведення. Фіксуємо деякий вектор $\bar{k} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m)$. Тоді відповідні йому значення l, для яких справджується нерівність (35), містяться в межах

$$1 \leqslant l < \left[\frac{\Phi(\bar{k})}{a} + \frac{1}{a|\bar{k}|^{m+2+\alpha}} \right] |\bar{k}| \text{ або } 1 \leqslant l < c_1 |\bar{k}|.$$

Тепер фіксуємо деяке значення $l = \bar{l}$ із проміжку $[1, c_1|\bar{k}|]$. Тоді множина чисел a, для яких справджується нерівність (35) при $k = \bar{k}$ і $l = \bar{l}$, міститься в інтервалі

$$\left[\Phi(\bar{k}) - \frac{1}{|\bar{k}|^{m+2+\alpha}} \frac{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \ldots + \bar{k}_m^2}}{\bar{l}} \right] < a < \left[\Phi(\bar{k}) + \frac{1}{|\bar{k}|^{m+2+\alpha}} \frac{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \ldots + \bar{k}_m^2}}{\bar{l}} \right],$$

міра якого така: $\dfrac{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \ldots + \bar{k}_m^2}}{\bar{l}} \cdot \dfrac{2}{|\bar{k}|^{m+2+\alpha}} < \dfrac{2}{|\bar{k}|^{m+1+\alpha}}$.

При фіксованому $\bar{k}$ міра множини чисел a, для яких нерівність (35) має розв'язок в цілих числах $l > 0$, не перевищує величини $\displaystyle\sum_{l=1}^{[c_1|\bar{k}|]+1} \frac{2}{|\bar{k}|^{m+2+\alpha}} \leqslant$ $\leqslant \dfrac{c_2}{|\bar{k}|^{m+\alpha}}$. Тоді міра множини всіх чисел, для яких нерівність (35) має розв'язки в цілих числах $k_1, \ldots, k_m$ і $l > 0$, не перевищує суми ряду

$$\sum_{|k|>0}^{\infty} \frac{c_2}{|k|^{m+\alpha}}. \tag{36}$$

Оскільки ряд (36) збігається, то сума ряду $\displaystyle\sum_{|k|>K_0}^{\infty} \frac{c_2}{|k|^{m+\alpha}}$ при досить великих K_0 може стати як завгодно малою, тобто міра множини чисел a, для яких нерівність (35) має нескінченне число розв'язків в цілих числах $k_1, \ldots$ $\ldots, k_m$ і $l > 0$, дорівнює нулю. Лему доведено.

Із леми і теореми 4 випливає така теорема.

Теорема 5. *Якщо для деяких $M_1 > 0$ і $s_1 > 0$ справджуються нерівності* (26) *для всіх (крім скінченного числа) цілочислових векторів k і якщо $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N)}(R_m)$, де N — досить велике натуральне число, то майже для всіх (в смислі міри Лебега) чисел $\dfrac{\pi}{t_0}$ існує розв'язок задачі* (3), (4), *який належить класу $C_{2\pi}^{(p,p)}(R_m)$, $p \geqslant n$.*

4. Припустимо тепер, що оператор L не є строго гіперболічним. Це значить, що для деяких векторів k рівняння (9) може мати кратні корені.

Нехай для вектора $k = \overline{k}$ рівняння (9) має q різних коренів $\lambda_1(\overline{k}), \ldots, \lambda_q(\overline{k})$ з кратностями відповідно $m_1, \ldots, m_q$ $(m_1 + \ldots + m_q = n)$. Тоді фундаментальна система розв'язків відповідного рівняння (7*) набирає вигляду

$$t^{s_p - 1} \exp i\lambda_p(\overline{k}) \sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}, \quad s_p = 1, \ldots, m_p; \quad p = 1, \ldots, q. \tag{37}$$

Розв'язок $u_{\overline{k}}(t)$ задачі (7*), (8) виражається формулою

$$u_{\overline{k}}(t) = \sum_{p=1}^{q} \sum_{s_p=1}^{m_p} C_{\overline{k}ps_p} t^{s_p - 1} \exp i\lambda_p(\overline{k}) \sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}\, t,$$

де коефіцієнти $C_{\overline{k}ps_p}$ визначаються системою рівнянь

$$\sum_{p=1}^{q} \sum_{s_p=1}^{m_p} C_{\overline{k}ps_p} t_j^{s_p - 1} \exp i\lambda_p(\overline{k}) \sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}\, t_j = 0, \tag{38}$$

детермінант якої позначимо через $\Delta^*(\overline{k})$. Функція Гріна $G^*_{\overline{k}}(t, \tau)$ відповідної задачі (7*), (8) визначається формулами (20)—(22), де $\Delta(k)$ слід замінити на $\Delta^*(\overline{k})$, а на місце функцій $y_{k1}(t), \ldots, y_{kn}(t)$ слід поставити функції (37).

Із сказаного вище випливає, що у випадку довільного розміщення точок $t_j (j = 1, \ldots, n)$ на відрізку $0 \leqslant t \leqslant T$ теореми існування та єдиності розв'язку задачі (3), (4) (коли оператор L не є строго гіперболічним) формулюються і доводяться аналогічно до теорем 1 і 3. Якщо ж числа $t_j (j = 1, \ldots, n)$ задовольняють умови (16), то (як і у випадку строгої гіперболічності оператора L) одержуємо більш ефективні ознаки існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі, які формулюються в термінах діофантових властивостей чисел. Це випливає з того, що при виконанні умов (16) визначник $\Delta^*(\overline{k})$ системи (37) подається у вигляді такого добутку:

$$\Delta^*(\overline{k}) = C(\overline{k}) \prod_{q \geqslant p > r \geqslant 1} [\exp i\lambda_p(\overline{k}) \sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}\, t_0 - \\ - \exp i\lambda_r(\overline{k}) \sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}\, t_0]^{m_p m_r}, \tag{39}$$

де

$$C(\overline{k}) + \prod_{p=1}^{q} (m_p - 1)!\, t^{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{q} m_p(m_p - 1)} \exp\left[\frac{i\sqrt{\overline{k}_1^2 + \ldots + \overline{k}_m^2}\, t_0}{2} \sum_{p=1}^{q} m_p(m_p - 1)\lambda_p(\overline{k})\right].$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. Й. Пташник, Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами, ДАН УРСР, № 10, 1966.
2. Б. Й. Пташник, Деякі питання теорії диференціальних рівнянь та алгебри, Вісник Львівського політехнічного інституту, № 9, 1967.
3. Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, М., 1958.
4. В. Я. Скоробогатько, Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители. I, УМЖ, т. 15, № 2, 1963.
5. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917.
6. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1954.

Надійшла 26.XII 1969 р.

Фізико-механічний інститут АН УРСР