УДК 517.432.1

Деякі теореми K_v-перетворення Мейєра

П. Сінг

В цій статті доводяться деякі теореми K_v-перетворення Мейєра і узагальнюється перетворення Ганкеля. За допомогою цих теорем одержано декілька нових результатів.

1. Вступ. В 1931 р. Г. Н. Ватсон [1] довів, що функція

$$\tilde{\omega}_{u,v}(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty J_u\left(\frac{x}{t}\right) J_v(t)\, dt/t, \ldots \tag{1.1}$$

$R(u, v) \geqslant -\frac{1}{2}$ відіграє роль перетворення. Bhatnagar [2] докладно дослідив це перетворення і довів, що воно є рядом Фур'є.

Вважаємо, що $g(x)$ є $\tilde{\omega}_{u,v}(x)$-перетворенням функції $f(x)$, якщо вона задовольняє інтегральне рівняння

$$g(x) = \int_0^\infty \tilde{\omega}_{u,v}(xy) f(y)\, dy. \tag{1.2}$$

Якщо $g(x) = f(x)$, то вважають, що $f(x)$ самообернена під дією ядра $\tilde{\omega}_{u,v}(x)$ і позначається через $R_{u,v}$.

Функція $\tilde{\omega}_{u,v}(x)$ має такі властивості:

$$\tilde{\omega}_{u,v}(x) = \tilde{\omega}_{v,u}(x), \tag{1.3}$$

$$\tilde{\omega}_{u,v}(x) = \begin{cases} O\left(x^{u+\frac{1}{2}}, x^{v+\frac{1}{2}}\right) \text{ при малому } x, \\ O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) \text{ при великому } x, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\tilde{\omega}_{u,u-1}(x) = J_{2u-1}(2\sqrt{x}). \tag{1.5}$$

Перетворення Мелліна функції $\tilde{\omega}_{u,v}(x)$ має вигляд

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}-\frac{s}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-\frac{s}{2}+\frac{3}{4}\right)}. \tag{1.6}$$

Mainra [3] визначив

$$\tilde{\omega}^{\lambda}_{u,v}(x) = \int_0^\infty \tilde{\omega}_{u,v}(xy) J_\lambda(y) \sqrt{y}\, dy, \quad R(u, v, \lambda) \geqslant -\frac{1}{2} \tag{1.7}$$

і встановив, що $\tilde{\omega}^{\lambda}_{u,v}(x)$ є ядром Фур'є.

Вважаємо, що $g(y)$ є перетворенням Мейера (або K-перетворенням) порядку v функції $f(x)$, якщо вона задовольняє рівняння

$$g(y)=\int_0^\infty \sqrt{xy}K_v(xy)f(x)\,dx, \tag{1.8}$$

де $K_v(x)$ — модифікована функція Бесселя другого роду, і позначимо її

$$f(x)\frac{K}{v}>g(y). \tag{1.9}$$

Нехай $\varphi(x)$ — K_v-перетворення функції $f(x)$, а $\psi(x)$ — K_v-перетворення функції $g(x)$. Тоді можемо легко довести, що

$$\int_0^\infty \varphi(x)g(x)\,dx=\int_0^\infty \psi(x)f(x)\,dx, \tag{1.10}$$

яка є аналогом теореми Goldstein'a.

2. Теорема 1. *Нехай* $f(x)\frac{K}{v}>g(y)$. *Тоді*

$$x^u\int_0^\infty t^{-u}f(t)\,\tilde{\omega}_{u+v,u-v}(xt)\,dt\,\frac{K}{v}>y^{-2u-1}g\left(\frac{1}{y}\right),$$

при умові, що

$$x^{\frac{1}{2}\pm v}f(x)=O(x^\alpha),\ R(\alpha)>-1 \text{ при малому } x,$$

$$x^{-u}f(x)=O\left(x^{-\frac{3}{4}-\delta}\right),\ \delta>0 \text{ при великому } x$$

і $R(u+v)\geqslant-\frac{1}{2}$, $R(u-v)\geqslant-\frac{1}{2}$.

Доведення. Маємо $g(y)=\int_0^\infty \sqrt{xy}K_v(xy)f(x)\,dx$ або

$$g\left(\frac{1}{y}\right)=\int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{y}}K_v\left(\frac{x}{y}\right)f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Крім того,

$$\int_0^\infty z^{u+\frac{1}{2}}K_v(z)\,\tilde{\omega}_{u+v,u-v}\left(z\frac{x}{y}\right)dx=\left(\frac{x}{y}\right)^{u+\frac{1}{2}}K_v\left(\frac{x}{y}\right), \tag{2.2}$$

оскільки $x^{u+\frac{1}{2}}K_v(x)$ є $R_{u+v,u-v}$ [1]. Отже, з (2.1) і (2.2) дістаємо

$$g\left(\frac{1}{y}\right)=\int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^u f(x)\,dx\int_0^\infty z^{u+\frac{1}{2}}K_v(z)\,\tilde{\omega}_{u+v,u-v}\left(x\frac{z}{y}\right)dz.$$

Покладаючи в другому інтегралі $z=yz$ і змінюючи порядок інтегрування, що припустимо при згаданих вище умовах, маємо

$$y^{-2u-1}g\left(\frac{1}{y}\right)=\int_0^\infty \sqrt{yz}K_v(yz)z^u\,dz\int_0^\infty x^{-u}f(x)\,\tilde{\omega}_{u+v,u-v}(xz)\,dx$$

або

$$x^u \int_0^\infty t^{-u} f(t) \widetilde{w}_{u+v,u-v}(xt)\, dt \frac{K}{v} > y^{-2u-1} g\left(\frac{1}{y}\right).$$

Отже, теорему доведено

Теорема 2. *Нехай*: $f(x) \frac{K}{v} > g(y)$, $x^{2\lambda-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{K}{v} > \psi(y)$. *Тоді*

$$\int_0^\infty x^{2\lambda+v+\frac{1}{2}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \alpha+v+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1, \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{2}+v+1; \\ \lambda+v+1, \lambda+1; \end{matrix} x^2\right] \times$$

$$\times \psi(xy)\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+v+1)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-v\right) y^{\alpha+v+2\lambda}}{2^{2(\alpha+v-\lambda)+1}\Gamma(\alpha+v+1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1\right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{\alpha+v} g(t)\, \widetilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\, dt$$

при умові, що $x^{\frac{1}{2}\pm v} f(x)$, $x^{2\lambda\pm v-\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^{\alpha_1})$, $R(\alpha_1) > -1$ *при малому* x *і* $f(x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, *обмежені та інтегровні в* $(0, \infty)$; $x^{\alpha+v+\frac{1}{2}} g(x) = O(x^{\alpha_2})$, $R(\alpha_2) > -1$ *при малому* x *і* $x^{\alpha+v} g(x) = O(x^{-\delta-\frac{3}{4}})$ *при великому* x і $R(\lambda \pm \pm v) > -1$, $R(\lambda) > -1$, $\delta > 0$.

Доведення. Нехай $x^{\alpha+v} w_{\alpha,\beta}(x) \frac{K}{v} > G(y)$, $R(\alpha+v) > -1$, $R(\alpha + \beta + 2v) > -2$, $R(\alpha, \beta) \geqslant -\frac{1}{2}$. Отже, з теореми 1 маємо

$$x^\lambda \int_0^\infty t^{\alpha+v-\lambda} \widetilde{w}_{\alpha,\beta}(t)\, \widetilde{w}_{\lambda+v,\lambda-v}(xt)\, dt \frac{K}{v} > y^{-2\lambda-1} G\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$R(\alpha+v) > -1,\ R(\alpha+\beta) > -2,\ R(\alpha+\beta+2v) > -2,\ R(\lambda-\alpha-v) > \frac{1}{2}.$$

Нехай $\varphi(x) = x^\lambda \int_0^\infty t^{\alpha+v-\lambda} \widetilde{w}_{\alpha,\beta}(t)\, \widetilde{w}_{\lambda+v,\lambda-v}(xt)\, dt$. Обчисливши внутрішній інтеграл за допомогою формули обернення Мелліна, дістаємо

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha+v+1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1\right) x^{2\lambda+v+\frac{1}{2}}}{2^{2(\lambda-v-\alpha)+1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+v+1)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-v\right)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left[\alpha+v+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1, \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+v+1; \lambda+v+1, \lambda+1; x^2\right]. \tag{2.3}$$

Отже

$$\varphi(x)\frac{K}{v} \to y^{-2\lambda-1}G\left(\frac{1}{y}\right),$$

або

$$a[\varphi(ax)]\frac{K}{v} > \left(\frac{y}{a}\right)^{-2\lambda-1}G\left(\frac{a}{y}\right). \tag{2.4}$$

Оскільки $x^{\alpha+v}\tilde{w}_{\alpha,\beta}(x)\frac{K}{v} > G(y)$, то

$$(ax)^{\alpha+v}\tilde{w}_{\alpha,\beta}(ax)\frac{K}{v} > \frac{1}{a}G\left(\frac{y}{a}\right) \tag{2.5}$$

і

$$f(x)\frac{K}{v} > g(y). \tag{2.6}$$

Застосовуючи (1.10) до (2.5) і (2.6), дістаємо

$$a\int\limits_0^\infty (at)^{\alpha+v}\tilde{w}_{\alpha,\beta}(at)\,g(t)\,dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,G\left(\frac{t}{a}\right)dt.$$

Поклавши $a = y$, маємо

$$y^{-2\lambda}\int\limits_0^\infty (yt)^{\alpha+v}\tilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\,g(t)\,dt = y^{-2\lambda-1}\int\limits_0^\infty f(t)\,G\left(\frac{t}{y}\right)dt.$$

Звідси, інтегруючи за допомогою (2.4), маємо

$$y^{\alpha+v-2\lambda}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+v}g(t)\,\tilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\,dt = \int\limits_0^\infty t^{-2\lambda}f(t)\,dt\int\limits_0^\infty \sqrt{xy}K_v(xy)\,\varphi(tx)\,dx$$

або

$$y^{\alpha+v-2\lambda}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+v}\tilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\,g(t)\,dt = \int\limits_0^\infty t^{-2\lambda-1}f(t)\,dt\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{xy}{t}}K_v\left(\frac{xy}{t}\right)\varphi(x)\,dx.$$

Змінивши порядок інтегрування в правій частині, що припустимо при згаданих вище умовах, дістанемо

$$y^{\alpha+v-2\lambda}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+v}g(t)\,\tilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\,dt = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dx\int\limits_0^\infty\left(\sqrt{\frac{xy}{t}}\right)K_v\left(\frac{xy}{t}\right)t^{-2\lambda-1}f(t)\,dt,$$

або

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dx\int\limits_0^\infty \sqrt{xyt}K_v(xyt)\,t^{2\lambda-1}f\left(\frac{1}{t}\right)dt = y^{\alpha+v-2\lambda}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+v}g(t)\,\tilde{w}_{\alpha,\beta}(yt)\,dt,$$

або

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x)\,\psi(xy)\,dx = y^{\alpha+v-2\lambda}\int\limits_0^\infty t^{\alpha+v}g(t)\,w_{\alpha,\beta}(yt)\,dt$$

при умові, що існує інтеграл в правій частині, для якого умови викладено раніше. Підставивши значення $\varphi(x)$, маємо

$$\int_0^\infty x^{2\lambda+v+\frac{1}{2}} {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha+v+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1, \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+v+1; \\ \lambda+v+1, \lambda+1\end{matrix}\quad x^2\right]\psi(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+v+1)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-v\right)y^{\alpha+v-2\lambda}}{2^{2(\alpha+v-\lambda)+1}\Gamma(\alpha+v+1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1\right)}\int_0^\infty t^{\alpha+v}g(t)\,\widetilde{\omega}_{\alpha,\beta}(yt)\,dt.$$

Отже, теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай:* $f(x)\frac{K}{v} > g(y)\; x^{v-1}f(x)\frac{K}{u} > \psi(y)$. *Тоді* $\int_a^\infty \sqrt{y}(y^2-$ $-a^2)^{-\frac{v}{2}}P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right)g(y)\,dy = 2^{-v}\sqrt{a}\psi(a)$ *при умові, що функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні і абсолютно інтегровні в* $(0,\infty)$.

Доведення. Маємо

$$f(x)\frac{K}{v} > g(y). \tag{2.7}$$

Визначимо функцію $f_1(x)$ так:

$$f_1(x) = 0 \text{ при } 0 < x < a,$$

$$f_1(x) = \sqrt{x}(x^2-a^2)^{-\frac{v}{2}}P_{u-1}^v\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right) \text{ при } a < x < \infty.$$

Тоді маємо

$$f_1(x)\frac{K}{v} > 2^{-v}ay^{\frac{v-1}{2}}K_u(ay), \quad R(v) < 1. \tag{2,8}$$

Застосувавши (1.10) до (2.7) і (2.8), дістанемо

$$\int_0^\infty f_1(y)g(y)\,dy = 2^{-v}a\int_0^\infty y^{\frac{v-1}{2}}K_u(ay)f(y)\,dy,$$

$$R(v+u) < -\frac{1}{2},\; R(u-v) < \frac{1}{2},\; R(v-2u) > -\frac{3}{2},\; R(v+2u) > \frac{1}{2}.$$

Підставивши значення $f_1(y)$, одержимо

$$\int_a^\infty \sqrt{y}(y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}}P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right)g(y)\,dy = 2^{-v}\sqrt{a}\int_0^\infty \sqrt{ay}K_u(ay)\,y^{v-1}f(y)\,dy$$

або

$$\int_a^\infty \sqrt{y}(y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}}P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right)g(y)\,dy = 2^{-v}\sqrt{a}\psi(a).$$

Отже, теорему доведено.

3. Приклади до теореми 1. 2. 1. Нехай $f(x) = x^{u+\frac{1}{2}} J_\lambda(x)$, тоді згідно з теоремою 1 маємо

$$\int_0^\infty \sqrt{xy} K_v(xy)\, x^u \tilde{\omega}^\lambda_{u+v,u-v}(x)\, dx =$$

$$= \frac{2^u \Gamma\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{2}+\frac{\lambda}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}+\frac{\lambda}{2}+1\right)}{y^{u-\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+1)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{2}+\frac{\lambda}{2}+1,\ \frac{u}{2}-\frac{v}{2}+\frac{\lambda}{2}+1;\ \lambda+1;\ -y^2\right), \qquad (3.1)$$

$$R(u+v,\ u-v) \geqslant -\frac{1}{2},\ R(\lambda) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

2. Нехай $f(x) = x^{u-\frac{1}{2}} e^{-x}$, тоді згідно з теоремою 1 маємо

$$\int_0^\infty \sqrt{xy} K_v(xy)\, x^u dx \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \tilde{\omega}_{u+v,u-v}(tx)\, dt =$$

$$= \frac{2^v \sqrt{\pi}\Gamma(v+u+1)\Gamma(u-v+1)\, y^{-u-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(u+\frac{3}{2}\right)(1+y)^{u+v+1}}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} v+u+1,\ v+\frac{1}{2} \\ u+\frac{3}{2}, \end{matrix}\ \frac{y-1}{y+1}\right], \qquad (3.2)$$

$$R(u+v,\ u-v) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Поклавши $y=1$ і обчисливши внутрішній інтеграл за допомогою результату, що належить Singh'у [4], а саме:

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_{u+v,u-v}(t\rho)\, dt = \sqrt{\rho} I_u\left(\frac{\rho}{2}\right) K_v\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

дістанемо

$$\int_0^\infty x^{u+1} K_v(x)\, I_u\left(\frac{x}{2}\right) K_{-v}\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(u+v+1)\Gamma(u-v+1)}{2^{u+1}\Gamma\left(u+\frac{3}{2}\right)}. \qquad (3.3)$$

3. Доведено [4], що

$$x^u \int_0^\infty t^{v+\frac{1}{2}} J_{\frac{u}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) Y_{\frac{u}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \tilde{\omega}_{u+v,u-v}(xt)\, dt =$$

$$= -\frac{\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+1\right) x^{v+2u+\frac{1}{2}}}{2^u \sqrt{\pi}\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma(u+1)}\, {}_1F_2\left(v-\frac{u}{2}+1;\right.$$

$$\left. v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2};\ u+1;\ -\frac{x^2}{4}\right).$$

Нехай

$$-\frac{\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+1\right)x^{v+2u+\frac{1}{2}}}{2^u\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma(u+1)}\,{}_1F_2\left[\begin{matrix}v-\frac{u}{2}+1; \\ v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2},\ u+1;\end{matrix}\ -\frac{x^2}{4}\right]\frac{K}{v}>$$

$$>y^{-2u-1}g\left(\frac{1}{y}\right),$$

тоді

$$y^{-2u-1}g\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{2^{v+u}\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+1\right)\Gamma(v+u+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2}\right)y^{v+2u+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(v-\frac{u}{2}+1,\ v+u+1;\ v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2};\ -\frac{1}{y^2},\ R(u\pm v)>-1.\right.$$

Так що згідно з теоремою 1 маємо

$$f(x)=x^{v+u+\frac{1}{2}}J_{\frac{u}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)Y_{\frac{u}{2}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Звідси

$$x^{v+u+\frac{1}{2}}J_{\frac{u}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)Y_{\frac{u}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{K}{v}>-\frac{2^{v+u}\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2}\right)}\times$$

$$\times\Gamma(u+v+1)\,y^{v+\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(v-\frac{u}{2}+1,\ v+u+1;\ v-\frac{u}{2}+\frac{3}{2};\ -y^2\right),$$

$$R(u)>-1,\ R(v+u)>-1. \tag{3.4}$$

4. Нехай $f(x)=x^{2v}J_{v+\frac{1}{2}}(ax)$, тоді, обчисливши інтеграл в правій частині, згідно з теоремою 2, дістанемо

$$\int_0^\infty x^{2v}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha+v+1,\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1,\ \frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+v+1; \\ \lambda+v+1,\ \lambda+1,\end{matrix}\ x^2\right]\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\lambda+\frac{1}{2},\ \lambda-v+\frac{1}{2};\ v+\frac{3}{2};\ \frac{-a^2}{x^2}y^2\right)dx=$$

$$=\frac{y\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+v+1)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}-v\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)}{2a\Gamma(\alpha+v+1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+v+1\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-v+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times G_{33}^{22}\left(\frac{a^2}{y^2}\left|\begin{matrix}1-\alpha, & 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}, & 1+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2}, & v+1, & -v\end{matrix}\right.\right). \tag{3.5}$$

Поклавши $\alpha = v + 1$, одержимо

$$\int_0^\infty x^{2v} {}_2F_1\left(\lambda + \frac{1}{2},\ \lambda - v + \frac{1}{2};\ v + \frac{3}{2};\ \frac{-a^2}{x^2} y^2\right) \times$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2v + 2,\ \frac{\beta}{2} + \frac{3v}{2} + \frac{3}{2},\ \frac{3v}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2};\ x^2 \\ \lambda + v + 1,\ \lambda + 1; \end{matrix}\right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda + v + 1)\,\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \frac{3v}{2} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{\beta}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2} + \frac{3v}{2} + \frac{3}{2}\right)}{2^{2(v+1)} a^{v+\beta+2}\,\Gamma(v + 1)\,\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta + 1)\,\Gamma\left(\frac{3v}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\lambda + 1)\, y^{v+\beta+2}}{\Gamma\left(\lambda - v + \frac{1}{2}\right)} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{v}{2} + \frac{\beta}{2} + 1,\ \frac{3v}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2};\ -\frac{y^2}{a^2} \\ \beta + 1, \end{matrix}\right], \tag{3.6}$$

$$R(\lambda + 1) > 0,\ R(\lambda + v) > -1,\ R(v) > -\frac{3}{2},\ R(v \pm \beta) > -2.$$

4. Приклади до теореми 3.1. Нехай $f(x) = x^{\sigma - \frac{1}{2}} I_m(bx)$, тоді

$$\int_a^\infty y^{-m-\sigma}(y^2 - a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^{v}\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right) \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1 + \sigma + v + m}{2},\ \frac{1 + \sigma - v + m}{2};\ \frac{b^2}{y^2} \\ m + 1; \end{matrix}\right] dy =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} + \frac{u}{2} + \frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{m}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} + \frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2} - \frac{v}{2} + \frac{m}{2}\right)} \times \tag{4.1}$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} + \frac{u}{2} + \frac{m}{2},\ \frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{m}{2};\ m + 1;\ \frac{b^2}{a^2}\right),$$

$$R(v) < 1,\ R(m + \sigma + v + 2u) > -1,\ R(m + \sigma + v + 2u) > 1,\ R(a) > R(b).$$

2. Нехай $f(x) = x^{\sigma - \frac{3}{2}} K_n(bx)$, тоді

$$\int_a^\infty y^{v+1}(y^2 - a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^{v}\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right) {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\sigma}{2} \mp \frac{n}{2} + \frac{v}{2};\ 1 - \frac{y^2}{b^2} \\ \sigma; \end{matrix}\right] dy =$$

$$= \frac{b^{1-u} a^{u+1}\,\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} \pm \frac{n}{2} \pm \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(\sigma + v - 1)\,\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} \pm \frac{n}{2} \pm \frac{v}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\sigma + v + u \pm n - 1}{2};\ 1 - \frac{a^2}{b^2} \\ \sigma + v - 1, \end{matrix}\right], \tag{4.2}$$

$$R(\sigma \pm n + v) > R(2u),\ R(v) < 1,\ R(\sigma \pm n + v + 2u) > 2,\ a > |b|.$$

Поклавши $b = a$ і $y = a \cos h\theta$, дістанемо

$$\int_0^\infty \cos h^{v+1}\theta \sin h^{1-v}\theta P_{u-1}^v(\cos h2\theta)\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{\sigma}{2} \pm \frac{n}{2} + \frac{v}{2};\\ \sigma;\end{matrix}\ 1 - \cos h^2\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} \pm \frac{n}{2} + \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{v}{2} \pm \frac{n}{2} - \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\right)\Gamma(\sigma)}{2\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} \pm \frac{n}{2} + \frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} \pm \frac{n}{2} - \frac{v}{2}\right)\Gamma(\sigma + v + 1)}, \quad (4.3)$$

$$R(\sigma \pm n + v + 2u) > 2, \quad R(\sigma \pm n + v - 2u) > 0.$$

3. Нехай $f(x) = x^{2v-2} J_{v+\frac{1}{2}}(bx)$, тоді

$$\int_a^\infty y^{1-v} P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right)(y^2 - a^2)^{-\frac{v}{2}} J_{2v}(\sqrt{2by}) K_{2v}(\sqrt{2by})\, dy =$$

$$= \frac{2^{3-4v} b^{2v-\frac{5}{2}}}{\sqrt{a\pi}} S_3\left(\frac{5}{4} - v,\ \frac{1}{4} \pm \frac{u}{2},\ \frac{3}{4} - 2v;\ \frac{ab}{4}\right),\ R(v) < 1. \quad (4.4)$$

4. Нехай $f(x) = x^{q-1} e^{-bx}$, тоді

$$\int_a^\infty y^{v+1}(y^2 - a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right)(b + y)^{-q-v-\frac{1}{2}}\, {}_2F_1\left(q + v + 1,\ v + \frac{1}{2};\right.$$

$$\left. q + 1;\ \frac{b - y}{b + y}\right) dy = \frac{2^{u-2v} a^{u+1} \Gamma(q+1)\Gamma\left(q+v+u - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+v-u - \frac{1}{2}\right)}{(a+b)^{q+v+u-\frac{1}{2}}\Gamma(q + v)\Gamma\left(q + v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q - v + \frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(q + v + u - \frac{1}{2},\ q + v - u - \frac{1}{2};\ q + v;\ \frac{b - a}{b + a}\right),\ R(v) < 1,$$

$$R(q + v - 2u) > -\frac{1}{2}, \quad R(q + v + 2u) > \frac{3}{2}. \quad (4.5)$$

Поклавши $a = b = 1$, $y = \sqrt{y}$, дістанемо

$$\int_1^\infty y^{\frac{v}{2}}(y - 1)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^v(2u - 1)(1 + \sqrt{y})^{-q-v-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}q + v + \frac{1}{2},\ v + \frac{1}{2};\\ q + 1;\end{matrix}\ \frac{1 - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}\right] dy = \quad (4.6)$$

$$= \frac{\Gamma\left(q + v + u - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q + v - u - \frac{1}{2}\right)\Gamma(q + 1)}{\Gamma(q + v)\Gamma\left(q + v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q - v + \frac{1}{2}\right) 2^{3v+q-\frac{3}{2}}},\ R(v) < 1,$$

$$R(q+v+2u) > \frac{3}{2}, \; R(q+v-2u) > -\frac{1}{2}.$$

5. Нехай $f(x) = x^{n-\frac{3}{2}} E\left(a_1, a_2, \ldots, a_p;\; b_1, b_2, \ldots, b_q;\; \frac{1}{x^2}\right)$, тоді

$$\int_a^\infty y(y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) E\left(a_1, a_2, \ldots, a_p, \frac{n}{2} \pm \frac{v}{2};\; b_1, \ldots, b_q; \frac{y^2}{4}\right) dy =$$

$$= \frac{a}{2} E\left(a_1, \ldots, a_p, \frac{n}{2} \pm \frac{u}{2} + \frac{v}{2} - \frac{1}{2};\; b_1, \ldots, b_q;\; \frac{a^2}{4}\right), \tag{4.7}$$

$$R(n) > |R(v)|, \; R(n+v) > 1 + |R(u)|, \; R(y) > 0.$$

6. Візьмемо $f(x) = x^{\sigma+\frac{1}{2}} J_m(bx) J_n(bx)$, маємо

$$\int_a^\infty y^{-m-\sigma-n-1}(y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) \times$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, & \frac{m}{2}+\frac{n}{2}+1, & \frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{\sigma}{2} \pm \frac{v}{2}+1; & -\frac{4b^2}{y^2} \\ 1+m, & 1+n, & 1+n+m; & \end{matrix}\right] dy =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n \pm u+v+\sigma+1}{2}\right) a^{-m-n-\sigma-v}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} \pm \frac{v}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{n}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{m+n+1}{2}, & \frac{m+n+2}{2}, & \frac{m+\sigma+v \mp u+n+1}{2}; & -\frac{4b^2}{a^2} \\ m+1, & n+1, & m+n+1; & \end{matrix}\right], \tag{4.8}$$

$$R(v) < 1, \; R(m+\sigma+n+v-2u) > -2, \; R(m+\sigma+n+v+2u) > 0.$$

Частинні випадки. 1. Взявши $\sigma = 0$ і $n = m+1$ в (4.8), дістанемо

$$\int_a^\infty \frac{1}{y}\left(1+\frac{4b^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} (y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^v\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) P_{\frac{v-1}{2}}^{-m}\left[\sqrt{\left(1+\frac{4b^2}{y^2}\right)}\right] \times$$

$$\times P_{\frac{v-1}{2}}^{-m-1}\left[\sqrt{\left(1+\frac{4b^2}{y^2}\right)}\right] dy =$$

$$= \frac{b^{2m+1}\Gamma\left(m+\frac{u}{2}+\frac{v}{2}+1\right)\Gamma\left(m-\frac{u}{2}+\frac{v}{2}+1\right)}{2a^{2m+v+1}\Gamma(1+m)\Gamma(2+m)\Gamma\left(m \pm \frac{v}{2}+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix} m+\frac{3}{2}, & m \mp \frac{u}{2}+\frac{v}{2}+1; & -\frac{4b^2}{a^2} \\ m+2, & 2m+2; & \end{matrix}\right], \tag{4.9}$$

$$R(v \pm 2u + 2m), \quad R(v) < 1, \quad R(a) > 2|b|.$$

2. З другого боку, взявши $\sigma = -1$ і $n = -m$ в (4.8), маємо

$$\int_a^\infty (y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^{v}\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) P_{\frac{v-1}{2}}^{m}\left(\sqrt{1+\frac{4b^2}{y^2}}\right) P_{\frac{v-1}{2}}^{-m}\left(\sqrt{1+\frac{4b^2}{y^2}}\right) dy =$$

$$= \frac{a^{1-v}\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-u}{2}\right)}{2\pi\Gamma(1+m)\Gamma(1-m)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\ \frac{v}{2}+\frac{u}{2},\ \frac{v}{2}-\frac{u}{2}; & \\ 1+m,\ 1-m; & -\frac{4b^2}{a^2}\end{matrix}\right], \tag{4.10}$$

$$R(v) < 1, \quad R(v+2u) > 1, \quad R(v-2u) > -1.$$

Поклавши $a = 2b = 1$ і $m = u = \frac{1}{2}$ в (4.10), одержимо

$$\int_a^\infty (y^2-1)^{-\frac{v}{2}} P_{-\frac{1}{2}}^{v}(2y^2-1) P_{\frac{v-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\right) P_{\frac{v-1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\right) dy =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\right)}{2^{\frac{v}{2}+\frac{5}{4}}\pi\Gamma\left(\frac{11}{8}-\frac{v}{4}\right)\Gamma\left(\frac{v}{4}+\frac{5}{8}\right)}, \quad 0 < R(v) < 1. \tag{4.11}$$

3. Поклавши $\sigma = -1$ і $n = m = \lambda$ в (4.8), дістанемо

$$\int_a^\infty (y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} \left[P_{\frac{v-1}{2}}^{-\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{4b^2}{y^2}}\right)\right]^2 P_{u-1}^{v}\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) dy =$$

$$= \frac{b^{2\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{v}{2}-\frac{u}{2}\right)a^{2\lambda+v-1}}{2\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+\frac{v}{2}+\frac{u}{2},\ \lambda+\frac{v}{2}-\frac{u}{2};\ 1+\lambda,\ \ 1+2\lambda;\ -\frac{4b^2}{a^2}\right),$$

$$R(v) < 1,\ R(v-2u+2\lambda) > -1,\ R(v+2u+2\lambda) > 1. \tag{4.12}$$

7. Нехай $f(x) = x^{\sigma-\frac{3}{2}}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_p; & \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; & -\lambda x^2\end{matrix}\right]$, тоді

$$\int_a^\infty y^{1-\sigma}(y^2-a^2)^{-\frac{v}{2}} P_{u-1}^{v}\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right) {}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots a_p;\ \frac{\sigma}{2}\pm\frac{v}{2}; & \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; & -\frac{4\lambda}{y^2}\end{matrix}\right] dy =$$

$$= \frac{a^{2-\sigma-v}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{v}{2}+\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{v}{2}-\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{v}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \ \dfrac{\sigma}{2}+\dfrac{v}{2}\mp\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2}; \\ b_1, \ldots, b_q; \end{matrix} \ -\frac{4\lambda}{a^2}\right], \tag{4.13}$$

$$R(\sigma) > |R(v)|, \quad R(\sigma+v) > |R(u)|+1.$$

Поклавши $p=2$, $q=3$, $\lambda=-\lambda$, $\sigma=p+q$, $v=p-q$, $a_1=\dfrac{m+n+1}{2}$, $a_2=\dfrac{m+n}{2}+1$, $b_1=n+\dfrac{3}{2}$, $b_2=p$ і $b_3=q$, дістанемо

$$\int_a^\infty y^{m+n-p-q-2}(y^2-a^2)^{\frac{q-p}{2}}(y^2-4\lambda)^{-\frac{m}{2}}P_{u-1}^{p-q}\left(\frac{2y^2}{a^2}-1\right)Q_n^m\left(\frac{y}{2\sqrt{\lambda}}\right)dy=$$

$$=\frac{e^{m\pi i}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+n+1)\,\Gamma\left(p+\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(p-\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\lambda^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}a^{2(1-p)}}{2\Gamma\left(n+\dfrac{3}{2}\right)\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\times$$

$$\times {}_4F_3\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n+2}{2}, \frac{2p+u-1}{2}, \frac{2p-u-1}{2}; \ n+\frac{3}{2}, \ p, \ q; \ \frac{4\lambda}{a^2}\right), \ R(p-u)>0, \ R(p+u)>1, \ R(q-p)>-1. \tag{4.14}$$

Взявши $p=\dfrac{m+n}{2}+1$, $q=\dfrac{m+n+1}{2}$, одержимо

$$\int_1^\infty \sqrt{y}\,(y^2-1)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}P_{u-1}^{\frac{1}{2}}(2y^2-1)\,Q_n^m(y)\,dy=$$

$$=\frac{2^{m-2}e^{m\pi i}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{u}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}-\dfrac{u}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{u}{2}-\dfrac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{u}{2}-\dfrac{m}{2}+1\right)},$$

$$R\left(\frac{m+n}{2}-u+1\right), \ R\left(\frac{m+n}{2}+u\right)>0. \tag{4.15}$$

На закінчення висловлюю глибоку подяку S. C. Mitra за корисні поради.

ЛІТЕРАТУРА

1. G. N. Watson, A treatise on the theary of Bessel functions, 1945.
2. G. N. Watson, The Quarterly Jour. of. Math., 1931, 298.
3. K. P. Bhatnagar, Bull. de l'Academic royale de Belgique Se'ance du 10 janvier 1953, 42.
4. V. P. Mainra, Bull. Cal. math. Soc., Vol. 50, No. 3, 1958, 123.
5. B. Singh, Proc. Raj. Acad. Sci., Vol. IX, 1962, 9—22.
6. B. Singh, Bull. de l'Association des actuaires suisses, Volume 65 — fascicle 1, 1965.
7. Erde'lyi et al., Tables of Integral Transforms, Vol., 1, 2.

Надійшла 25.IX 1970 р.
Індія