1971 УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 4
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

. . . . . .

УДК 512.831:517.974

Застосування функцій від багатовимірних матриць до розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними вищих порядків

М. П. Соколов

Вказаний раніш автором [1] матричний метод дослідження та розв'язування лінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку розповсюджується в цій статті на системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними вищих порядків, розв'язаних відносно старших похідних, порядки яких вважаються однаковими.

Нехай дана лінійна система диференціальних рівнянь ν-го порядку ($\nu > 1$) від невідомих функцій $x_l = x_l(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($l = 1, 2, \ldots, n$) дійсних аргументів $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$\frac{\partial^\nu x_l}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_\nu}} = \sum_{k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_{\nu-1} = 1}^{m} \sum_{c=1}^{n} p_{li_1 \ldots i_\nu c k_1 \ldots k_{\nu-1}} \frac{\partial^{\nu-1} x_c}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2} \ldots \partial t_{k_{\nu-1}}} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} p_{li_1 \ldots i_\nu c k_1} \frac{\partial x_c}{\partial t_{k_1}} + \sum_{c=1}^{n} p_{li_1 \ldots i_\nu c 0} x_c + f_{li_1 \ldots i_\nu} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n;$$

$$i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

де

$$f_{li_1 \ldots i_\nu} = f_{li_1 \ldots i_\nu}(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad p_{li_1 \ldots i_\nu ck} = p_{li_1 \ldots i_\nu ck}(t_1, t_2, \ldots t_m)$$

$$(k = 0, k_1, \ldots, k_1 \ldots k_{\nu-1})$$

— відомі функції тих же аргументів $t_1, t_2, \ldots, t_m$ диференційовні в деякій обмеженій області G.

Число рівнянь системи (1), очевидно, дорівнює $\frac{m(m+1)\ldots(m+\nu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} n$.

Розглянемо нові невідомі функції y_{ck} ($c = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, k_1, \ldots, k_1 \ldots k_{\nu-1}$), поклавши

$$y_{c0} = x_c, \tag{2}$$

$$y_{ck_1} = \frac{\partial x_c}{\partial t_{k_1}} \qquad (k_1 = 1, 2, \ldots, m),$$

. . . .

$$y_{ck_1 \ldots k_{\nu-1}} = \frac{\partial^{\nu-1} x_c}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2} \ldots \partial t_{k_{\nu-1}}} \qquad (k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_{\nu-1} = 1, 2, \ldots, m).$$

Тоді систему (1) можемо замінити системою рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial y_{l0}}{\partial t_{i_1}} = y_{li_1} \qquad (i_1 = 1, 2, \dots, m),$$

$$\frac{\partial y_{li_1}}{\partial t_{i_2}} = y_{li_1 i_2} \qquad (i_1 \leqslant i_2 = 1, 2, \dots, m), \tag{3}$$

$$\dots\dots\dots \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{\partial y_{li_1\dots i_{\nu-2}}}{\partial t_{i_{\nu-1}}} = y_{li_1\dots i_{\nu-1}} \qquad (i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_{\nu-1} = 1, 2, \dots, m),$$

$$\frac{\partial y_{li_1\dots i_{\nu-1}}}{\partial t_{i_\nu}} = \sum_{k_1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_{\nu-1}=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} p_{li_1\dots i_\nu c k_1\dots k_{\nu-1}} y_{ck_1\dots k_{\nu-1}} + \dots$$

$$\dots + \sum_{k_1=1}^{m}\sum_{c=1}^{n} p_{li_1\dots i_\nu c k_1} y_{ck_1} + \sum_{c=1}^{n} p_{li_1\dots i_\nu c0} y_{c0} + f_{li_1\dots i_\nu}$$

$$(i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_\nu = 1, 2, \dots, m).$$

Введемо для сукупностей індексів позначення $i^{(\alpha)} = i_1 i_2 \dots i_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots, \nu)$ і покладемо $i^{(0)} = 0$. Система (3) набирає тоді вигляду

$$\frac{\partial y_{li^{(\alpha-1)}}}{\partial t_{i_\alpha}} = y_{li^{(\alpha)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu - 1),$$

$$\frac{\partial y_{li^{(\nu-1)}}}{\partial t_{i_\nu}} = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{k_1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_\alpha > 0=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} p_{li^{(\nu)}ck^{(\alpha)}} y_{ck^{(\alpha)}} + f_{li^{(\nu)}},$$

або в більш скороченому записі —

$$\frac{\partial y_{li^{(\beta-1)}}}{\partial t_{i_\beta}} = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{k_1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_\alpha > 0=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} q_{li^{(\beta)}ck^{(\alpha)}} y_{ck^{(\alpha)}} + f_{li^{(\beta)}}$$

$$(l = 1, 2, \dots, n;\ \beta = 1, 2, \dots, \nu;\quad i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_\beta = 1, 2, \dots, m), \tag{4}$$

де $q_{li^{(\beta)}ck^{(\alpha)}} = p_{li^{(\nu)}ck^{(\alpha)}}$ і $f_{li^{(\beta)}} = f_{li^{(\nu)}}$, якщо $\beta = \nu$; якщо ж $\beta < \nu$, то

$$q_{li^{(\beta)}ck^{(\alpha)}} = \begin{cases} 1 \text{ при } c = l,\ \alpha = \beta, \\ 0 \text{ у противному разі} \end{cases}$$

і $f_{li^{(\beta)}} = 0$.

Систему (4) розширимо тепер до системи

$$\frac{\partial y_{li^{(\beta-1)}}}{\partial t_j} = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{k_1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_\alpha > 0=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} q_{li^{(\beta-1)}jck^{(\alpha)}} y_{ck^{(\alpha)}} + f_{li^{(\beta-1)}j} \tag{5}$$

$(l = 1, 2, \dots, n;\ \beta = 1, 2, \dots, \nu;\ i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_{\beta-1} = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots, m)$,

де

$$f_{li^{(\beta-1)}j} = \begin{cases} f_{lj_1\dots j_\nu} \text{ при } \beta = \nu \ (j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_\nu \text{ — впорядкована послідовність індексів } i_1, \dots, i_{\nu-1}, j), \end{cases}$$

Ця система складається з рівнянь системи (4), що частково повторюються з огляду на незалежність результату диференціювання невідомих функцій від порядку диференціювання за різними аргументами. Зіставляючи в системі (5) n значень індекса l, що йдуть у зростаючому порядку, з кожним із значень сукупності індексів $i^{(\beta-1)}$, які розміщені в натуральному порядку, ми одержимо

$$N=\left[1+m+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+\nu-2)}{1\cdot 2\ldots(\nu-1)}\right]n=$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots(\nu-1)}n$$

значень сукупності індексів $li^{(\beta-1)}$, якщо l та β пробігають відповідно значення $1, 2, \ldots, n$ та $1, 2, \ldots, \nu$ при $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{\beta-1} = 1, 2, \ldots, m$.

Введемо, далі, для невідомих функцій позначення

$$z_I = y_{li^{(\beta-1)}} \qquad (l=1, 2, \ldots, n;\ \beta=1, 2, \ldots, \nu;$$
$$i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{\beta-1} = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

де індекс I пробігає значення $1, 2, \ldots, N$, якщо сукупність індексів $li^{(\beta-1)}$ набуває вказаних вище значень, так що

$$z_1 = y_{10},\ z_2 = y_{20}, \ldots, z_n = y_{n0},\ z_{n+1} = y_{11},\ z_{n+2} = y_{21}, \ldots, z_{2n} =$$
$$= y_{n1}, \ldots, z_N = y_{n\underbrace{m\ldots m}_{(\nu-1)}}.$$

Тоді систему (5) можемо представити у вигляді системи Nm рівнянь з частинними похідними першого порядку, розв'язаних відносно цих похідних

$$\frac{\partial z_I}{\partial t_j} = \sum_{K=1}^{N} r_{IjK} z_K + f_{Ij} \qquad (I=1, 2, \ldots, N;\ j=1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

де

$$r_{IjK} = q_{li^{(\beta-1)}jck^{(\alpha)}}, \qquad (l, c = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots \nu;\ i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{\beta-1} =$$
$$f_{Ij} = f_{li^{(\beta-1)}j}. \qquad = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \nu-1;$$
$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_{\alpha>0} = 1, 2, \ldots, m).$$

Вважатимемо аргументи і невідомі функції в системі (7) елементами відповідних стовпцевих матриць

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_m), \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_N).$$

Відомі ж функції будемо припускати елементами двовимірної $(N \times m)$-матриці

$$F = \| f_{Ij} \| \qquad (I = 1, 2, \ldots, N;\ \ j = 1, 2, \ldots, m),$$

а коефіцієнти при невідомих функціях — елементами тривимірної $(N \times m \times N)$-матриці

$$R = \| r_{IjK} \| \qquad (I, K = 1, 2, \ldots, N;\quad j = 1, 2, \ldots, m).$$

Тоді праві частини рівнянь системи (7) можна розглядати як суму (0, 1)-згорнутого добутку по індексу K тривимірної матриці R на стовпцеву матрицю z, який позначимо через $R_{\{K\}}\, z$, та двовимірної матриці F [2]. Ліві ж частини цих рівнянь утворюють двовимірну $(N \times m)$-матрицю, для якої введемо позначення

$$Dz = \left\| \frac{\partial z_I}{\partial t_j} \right\| \qquad (I = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Систему (7), таким чином, можемо представити у вигляді одного диференціального рівняння

$$Dz = R_{\{K\}}z + F, \tag{8}$$

яке можна розглядати також як сукупність m рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial t_h} = R^{(h)}z + F^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

де $R^{(h)}$, $F^{(h)}$ — h-ві перерізи орієнтації (j) матриць R і F, що є відповідно квадратні і стовпцеві матриці одного і того ж порядку N.

Як відомо [1], необхідною і достатньою умовою повної інтегрованості рівняння (8), отже й системи (1), є виконання рівностей

$$\begin{aligned}&\frac{\partial R^{(h)}}{\partial t_{h'}} - \frac{\partial R^{(h')}}{\partial t_h} + R^{(h)}R^{(h')} - R^{(h')}R^{(h)} = 0,\\ &\frac{\partial F^{(h)}}{\partial t_{h'}} - \frac{\partial F^{(h')}}{\partial t_h} + R^{(h)}F^{(h')} - R^{(h')}F^{(h)} = 0.\end{aligned} \qquad (h, h' = 1, 2, \dots, m;\ h' \neq h) \tag{9}$$

Повний інтеграл рівняння (8) має тоді вигляд

$$z = \Omega_{t^{(0)}}^{t}(R)\, z^{(0)} + \sum_{h=1}^{m} \int\limits_{t_h^{(0)}}^{t_h} \Omega_{t_1^{(0)}}^{t_1}(R^{(1)}(t_1, \dots, t_m)) \dots \Omega_{t_h^{(0)}}^{t_h}(R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots$$

$$\dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m))\,[\Omega_{t_h^{(0)}}^{\tau_h}(R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, \tau_h, t_{h+1}, \dots, t_m))]^{-1} \times$$

$$F^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, \tau_h, t_{h+1}, \dots, t_m)\, d\tau_h, \tag{10}$$

де

$$\Omega_{t_h^{(0)}}^{t_h}(R^h(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m)) = E + \int\limits_{t_h^{(0)}}^{t_h} R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m)\, dt_h +$$

$$+ \int\limits_{t_h^{(0)}}^{t_h} R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m)\, dt_h \int\limits_{t_h^{(0)}}^{t_h} R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m)\, dt_h + \dots$$

$$(h = 1, 2, \dots, m)$$

— абсолютно і рівномірно збіжні ряди в області G,

$$\Omega_{t^{(0)}}^{t}(R) = \prod_{h=1}^{m} \Omega_{t_h^{(0)}}^{t_h}(R^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, t_h, \dots, t_m))$$

і $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_N^{(0)})$ — постійна стовпцева матриця, елементи якої є початкові, довільно вибрані значення функцій $z_1, z_2, \dots, z_N$ при значеннях аргументів, що дорівнюють елементам стовпцевої матриці $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_m^{(0)})$.

У частинному випадку, коли коефіцієнти $p_{li_1 \dots i_\nu ck}$ $(k = 0, k_1, \dots, k_1 \dots \dots k_{\nu-1})$ у системі (1) є постійні, то матриця R також постійна, і рівності (9) мають вигляд

$$\begin{aligned}&R^{(h)}R^{(h')} = R^{(h')}R^{(h)},\\ &\frac{\partial F^{(h)}}{\partial t_{h'}} - \frac{\partial F^{(h')}}{\partial t_h} + R^{(h)}F^{(h')} - R^{(h')}F^{(h)} = 0.\end{aligned} \qquad (h, h' = 1, 2, \dots, m;\ h' \neq h) \tag{9'}$$

Оскільки ж в цьому випадку

$$\Omega_{t_h^{(0)}}^{t_h}(R^{(h)}) = e^{R^{(h)}(t_h - t_h^{(0)})}$$

і $$(h = 1, 2, \dots, m)$$

$$\Omega_{t^{(0)}}^{t}(R) = e^{R\{j\}(t - t^{(0)})},$$

то формула (10) набирає вигляду

$$z = e^{R\{j\}(t - t^{(0)})} z^{(0)} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m} \int_{t_h^{(0)}}^{t_h} e^{R^{(1)}(t_1 - t_1^{(0)}) + \dots + R^{(h-1)}(t_{h-1} - t_{h-1}^{(0)}) + R^{(h)}(t_h - \tau_h)} \times$$

$$\times F^{(h)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{h-1}^{(0)}, \tau_h, t_{h+1}, \dots, t_m)\, d\tau_h. \qquad (10')$$

Визначені з формули (10) або (10′) значення перших n функцій $z_1, z_2, \dots, z_n$ дають згідно з позначеннями (2) і (6) повний інтеграл системи (1), який зображено стовпцевою матрицею $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і який залежить від початкових, довільно вибраних значень функцій $x_1, x_2, \dots, x_n$ та їх частинних похідних від 1-го до $(\nu - 1)$-го порядку включно при значеннях аргументів, що дорівнюють $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_m^{(0)}$.

Приклад. Знайдемо повний інтеграл системи диференціальних рівнянь 2-го порядку з постійними коефіцієнтами при невідомих функціях x_1, x_2 від аргументів t_1, t_2 та їх частинних похідних 1-го порядку:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} = 2\frac{\partial x_1}{\partial t_2} - 2\frac{\partial x_2}{\partial t_2}, \qquad \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1^2} = 2x_1 - 2x_2 - 2t_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + 1, \qquad \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_2^2} = x_1, \qquad \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} = x_2 + t_1.$$

Введемо позначення

$$x_1 = y_{10} = z_1, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial t_1} = y_{11} = z_3, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial t_2} = y_{12} = z_5,$$

$$x_2 = y_{20} = z_2, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_1} = y_{21} = z_4, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_2} = y_{22} = z_6$$

і утворимо з наведених рівнянь розширену систему диференціальних рівнянь з частинними похідними 1-го порядку від невідомих функцій z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t_1} = z_3, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial t_2} = z_5, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial t_1} = z_4, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial t_2} = z_6,$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t_1} = 2z_5 - 2z_6, \qquad \frac{\partial z_3}{\partial t_2} = z_4 + 1, \qquad \frac{\partial z_4}{\partial t_1} = 2z_1 - 2z_2 - 2t_1,$$

$$\frac{\partial z_4}{\partial t_2} = z_3, \qquad \frac{\partial z_5}{\partial t_1} = z_4 + 1, \qquad \frac{\partial z_5}{\partial t_2} = z_1, \qquad \frac{\partial z_6}{\partial t_1} = z_3, \qquad \frac{\partial z_6}{\partial t_2} = z_2 + t_1.$$

з тривимірною $(6 \times 2 \times 6)$-матрицею коефіцієнтів при невідомих функціях

$$R = \| R^{(1)} \mid R^{(2)} \| \overset{\to (j)}{\longrightarrow} (K) \downarrow (I) \qquad (I, K = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ j = 1, 2),$$

де

$$R^{(1)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad R^{(2)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

і двовимірною (6×2) матрицею відомих функцій

$$F = \| F^{(1)} \mid F^{(2)} \|_{\downarrow (I)}^{\rightarrow (j)} \qquad (I = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\; j = 1, 2),$$

де

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2t_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix}.$$

Необхідна і достатня умова повної інтегрованості розглядуваної системи, яка виражається рівностями (9′), що мають у даному випадку вигляд

$$\begin{cases} R^{(1)}R^{(2)} = R^{(2)}R^{(1)}, \\ \dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial t_2} - \dfrac{\partial F^{(2)}}{\partial t_1} + R^{(1)}F^{(2)} - R^{(2)}F^{(1)} = 0, \end{cases}$$

задовольняється, оскільки матричні добутки $R^{(1)} R^{(2)}$, $R^{(2)} R^{(1)}$ дорівнюють одній і тій же матриці

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

а

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t_2} = 0, \qquad \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R^{(1)}F^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R^{(2)}F^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поклавши в формулі (10′)

$$t = (t_1, t_2), \qquad t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) = 0,$$

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6), \qquad z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, z_3^{(0)}, z_4^{(0)}, z_5^{(0)}, z_6^{(0)}),$$

де $z_1^{(0)} = x_1 \big|_{t=0}$, $z_2^{(0)} = x_2 \big|_{t=0}$, $z_3^{(0)} = \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}\Big|_{t=0}$, $z_4^{(0)} = \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1}\Big|_{t=0}$, $z_5^{(0)} = \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2}\Big|_{t=0}$, $z_6^{(0)} = \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2}\Big|_{t=0}$, одержуємо повний інтеграл розширеної системи

$$z = e^{R_{\{j\}}t} z^{(0)} + e^{R^{(1)}t_1} \int\limits_0^{t_1} e^{-R^{(1)}\tau_1} F^{(1)}(\tau_1, t_2)\, d\tau_1 + e^{R^{(1)}t_1 + R^{(2)}t_2} \int\limits_0^{t_2} e^{-R^{(2)}\tau_2} F^{(2)}(0, \tau_2)\, d\tau_2,$$

де $e^{R_{\{j\}}t} = e^{R^{(1)}t_1 + R^{(2)}t_2}$.

Матрицю $e^{R^{(1)}t_1}$, а потім і $e^{R^{(2)}t_2}$ визначаємо згідно з указаним в [1 способом. Знаходимо мінімальний поліном матриці $R^{(1)}$

$$\psi^{(1)}(\xi) = \xi^3(\xi^2+4),$$

що має трикратний корінь $\xi_1 = 0$ та прості корені $\xi_2 = 2i$, $\xi_3 = -2$

Складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} e^{R^{(1)}t_1} & e^{\xi t_1}\big|_{\xi=0} & (e^{\xi t_1})'\big|_{\xi=0} & (e^{\xi t_1})''\big|_{\xi=0} & e^{\xi t_1}\big|_{\xi=2i} & e^{\xi t_1}\big|_{\xi=-2i} \\ g_0(R^{(1)}) & g_0(0) & g_0'(0) & g_0''(0) & g_0(2i) & g_0(-2i) \\ g_1(R^{(1)}) & g_1(0) & g_1'(0) & g_1''(0) & g_1(2i) & g_1(-2i) \\ g_2(R^{(1)}) & g_2(0) & g_2'(0) & g_2''(0) & g_2(2i) & g_2(-2i) \\ g_3(R^{(1)}) & g_3(0) & g_3'(0) & g_3''(0) & g_3(2i) & g_3(-2i) \\ g_4(R^{(1)}) & g_4(0) & g_4'(0) & g_4''(0) & g_4(2i) & g_4(-2i) \end{vmatrix} = 0,$$

$$g_0(\xi) = 1, \quad g_1(\xi) = \xi, \quad g_2(\xi) = \xi^2, \quad g_3(\xi) = \xi^3, \quad g_4(\xi) = \xi^3(\xi - 2i,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} e^{R^{(1)}t_1} & 1 & t_1 & t_1^2 & e^{2it_1} & e^{-2it_1} \\ E & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R^{(1)} & 0 & 1 & 0 & 2i & -2i \\ [R^{(1)}]^2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ [R^{(1)}]^3 & 0 & 0 & 0 & -8i & 8i \\ [R^{(1)}]^3(R^{(1)} - 2iE) & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси одержуємо

$$e^{R^{(1)}t_1} = E + R^{(1)}t_1 + \frac{1}{2}[R^{(1)}]^2 t_1^2 - \frac{i}{8}[R^{(1)}]^3(1 + 2it_1 - 2t_1^2 - e^{2it_1}) +$$

$$+ \frac{1}{32}[R^{(1)}]^3(R^{(1)} - 2iE)(-2 + 4t_1^2 + e^{2it_1} + e^{-2it_1})$$

або

$$e^{R^{(1)}t_1} = \| a_{ij} \| \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

де

$$a_{11} = \frac{1}{2}(1 + t_1^2 + \cos^2 t_1), \qquad a_{12} = \frac{1}{2}(-t_1^2 + \sin^2 t_1),$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}(t_1 + \sin t_1 \cos t_1),$$

$$a_{14} = \frac{1}{2}(t_1 - \sin t_1 \cos t_1), \qquad a_{15} = \frac{1}{2}(t_1^2 + \sin^2 t_1), \qquad a_{16} = -\frac{1}{2}(t_1^2 + \sin^2 t_1)$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(t_1^2 + \sin^2 t_1), \qquad a_{22} = \frac{1}{2}(1 - t_1^2 + \cos^2 t_1),$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}(t_1 - \sin t_1 \cos t_1),$$

$$a_{24}=\frac{1}{2}(t_1+\sin t_1\cos t_1),\qquad a_{25}=\frac{1}{2}(t_1^2-\sin^2 t_1),$$

$$a_{26}=\frac{1}{2}(-t_1^2+\sin^2 t_1),$$

$$a_{31}=t_1-\sin t_1\cos t_1,\qquad a_{32}=-t_1+\sin t_1\cos t_1,\qquad a_{33}=\cos^2 t_1,$$
$$a_{34}=\sin^2 t_1,\qquad a_{35}=t_1+\sin t_1\cos t_1,\qquad a_{36}=-(t_1+\sin t_1\cos t_1),$$
$$a_{41}=t_1+\sin t_1\cos t_1,\qquad a_{42}=-(t_1+\sin t_1\cos t_1),\qquad a_{43}=\sin^2 t_1,$$
$$a_{44}=\cos^2 t_1,\qquad a_{45}=t_1-\sin t_1\cos t_1,\qquad a_{46}=-t_1+\sin t_1\cos t_1,$$

$$a_{51}=\frac{1}{2}(t_1^2+\sin^2 t_1),\qquad a_{52}=-\frac{1}{2}(t_1^2+\sin^2 t_1),$$

$$a_{53}=\frac{1}{2}(t_1-\sin t_1\cos t_1),$$

$$a_{54}=\frac{1}{2}(t_1+\sin t_1\cos t_1),\qquad a_{55}=\frac{1}{2}(1+t_1^2+\cos^2 t_1),$$

$$a_{56}=\frac{1}{2}(-t_1^2+\sin^2 t_1),$$

$$a_{61}=\frac{1}{2}(t_1^2-\sin^2 t_1),\qquad a_{62}=\frac{1}{2}(-t_1^2+\sin^2 t_1),\qquad a_{63}=\frac{1}{2}(t_1+\sin t_1\cos t$$

$$a_{64}=\frac{1}{2}(t_1-\sin t_1\cos t_1),,\qquad a_{65}=\frac{1}{2}(t_1^2+\sin^2 t_1)$$

$$a_{66}=\frac{1}{2}(1-t_1^2+\cos^2 t_1).$$

Аналогічно знаходимо

$$e^{R^{(2)}t_2}=\begin{Vmatrix} \operatorname{ch} t_2 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh} t_2 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t_2 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh} t_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} t_2 & \operatorname{sh} t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} t_2 & \operatorname{ch} t_2 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} t_2 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch} t_2 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t_2 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch} t_2 \end{Vmatrix}$$

Потім одержуємо

$$e^{R^{(1)}t_1+R^{(2)}t_2}=\| b_{ij}\|\qquad (i,j=1,2,3,4,5,6),$$

де

$$b_{11}=\frac{1}{2}[(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{12}=\frac{1}{2}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{13}=\frac{1}{2}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{14}=\frac{1}{2}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{15} = \frac{1}{2}\left[(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (1 + t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{16} = \frac{1}{2}\left[-(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}\left[(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 - \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}\left[(1 - t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{23} = \frac{1}{2}\left[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{24} = \frac{1}{2}\left[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{25} = \frac{1}{2}\left[(t_1^2 - \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{26} = \frac{1}{2}\left[(-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (1 - t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{31} = (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{32} = (-t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 - (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{33} = \cos^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \sin^2 t_1 \operatorname{sh} t_2, \qquad b_{34} = \sin^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh} t_2$$

$$b_{35} = (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{36} = -(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{41} = (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{42} = -(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{43} = \sin^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh} t_2, \qquad b_{44} = \cos^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \sin^2 t_1 \operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{45} = (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{46} = (-t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 - (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2,$$

$$b_{51} = \frac{1}{2}\left[(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (1 + t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{52} = \frac{1}{2}\left[-(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{53} = \frac{1}{2}\left[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{54} = \frac{1}{2}\left[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{55} = \frac{1}{2}\left[(1 + t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right].$$

$$b_{56} = \frac{1}{2}\left[(-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 - (t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2\right],$$

$$b_{61}=\frac{1}{2}[(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{62}=\frac{1}{2}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{63}=\frac{1}{2}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{64}=\frac{1}{2}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{65}=\frac{1}{2}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$b_{66}=\frac{1}{2}[(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2].$$

Отже,

$$e^{R\{j\}}z^{(0)}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6),$$

елементи стовпцевої матриці $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6)$ визначаються форму.

$$\zeta_1=\frac{1}{2}\{z_1^{(0)}[(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_2^{(0)}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t^2]+$$

$$+z_3^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_4^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_5^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_6^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]\},$$

$$\zeta_2=\frac{1}{2}\{z_1^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_2^{(0)}[(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_3^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_4^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_5^{(0)}[(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_6^{(0)}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2[\},$$

$$\zeta_3=z_1^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_2^{(0)}[(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_3^{(0)}(\cos^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\sin^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+z_4^{(0)}(\sin^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\cos^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+$$

$$+z_5^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_6^{(0)}[-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$\zeta_4=z_1^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+z_2^{(0)}[-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$

$$+ z_3^{(0)} (\sin^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh} t_2) + z_4^{(0)} (\cos^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \sin^2 t_1 \operatorname{sh} t_2) +$$

$$+ z_5^{(0)} [(t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_6^{(0)} [(-t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 - (t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2],$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{2} \{ z_1^{(0)} [(t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (1 + t_1^2 + \cos^2 t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_2^{(0)} [-(t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_3^{(0)} [(t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_4^{(0)} [(t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_5^{(0)} [(1 + t_1^2 + \cos^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_6^{(0)} [(-t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 - (t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{sh} t_2]\},$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{2} \{ z_1^{(0)} [(t_1^2 - \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 + \sin^2 i_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_2^{(0)} [(-t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (1 - t_1^2 + \cos^2 t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_3^{(0)} [(t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_4^{(0)} [(t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_5^{(0)} [(t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 - \sin^2 t_1) \operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_6^{(0)} [(1 - t_1^2 + \cos^2 t_1) \operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1) \operatorname{sh} t_2]\}.$$

Далі, утворюємо стовпцеві матриці

$$e^{-R^{(1)}\tau_1} F^{(1)}(\tau_1, t_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\tau_1^2 - \tau_1 \sin \tau_1 \cos \tau_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \tau_1 \\ \frac{3}{2}\tau_1^2 + \tau_1 \sin \tau_1 \cos \tau_1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau_1 \\ -\tau_1 - \sin \tau_1 \cos \tau_1 - 2\tau_1 \sin^2 \tau_1 \\ -3\tau_1 + \sin \tau_1 \cos \tau_1 + 2\tau_1 \sin^2 \tau_1 \\ 1 + \frac{3}{2}\tau_1^2 + \tau_1 \sin \tau_1 \cos \tau_1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau_1 \\ \frac{3}{2}\tau_1^2 - \tau_1 \sin \tau_1 \cos \tau_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \tau_1 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^{t_1} e^{-R^{(1)}\tau_1} F^{(1)}(\tau_1, t_2)\, d\tau_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_1^3 + t_1 - \sin t_1 \cos t_1 - t_1 \sin^2 t_1) \\ \frac{1}{2}(t_1^3 - t_1 + \sin t_1 \cos t_1 + t_1 \sin^2 t_1) \\ -t_1^2 + t_1 \sin t_1 \cos t_1 - \sin^2 t_1 \\ -t_1^2 - t_1 \sin t_1 \cos t_1 + \sin^2 t_1 \\ \frac{1}{2}(t_1^3 + t_1 + \sin t_1 \cos t_1 + t_1 \sin^2 t_1) \\ \frac{1}{2}(t_1^3 + t_1 - \sin t_1 \cos t_1 - t_1 \sin^2 t_1) \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$e^{R^{(1)}t_1}\int_0^{t_1} e^{-R^{(1)}\tau_1}F^{(1)}(\tau_1, t_2)\,d\tau_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \\ \frac{1}{2}(-t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \\ \sin^2 t_1 \\ -\sin^2 t_1 \\ \frac{1}{2}(t_1 + \sin t_1 \cos t_1) \\ \frac{1}{2}(t_1 - \sin t_1 \cos t_1) \end{pmatrix},$$

Потім одержуемо

$$e^{-R^{(2)}\tau_2}F^{(2)}(0, \tau_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{ch}\tau_2 \\ -\operatorname{sh}\tau_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \int_0^{t_2} e^{-R^{(2)}\tau_2}F^{(2)}(0, \tau_2)\,d\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sh} t_2 \\ 1 - \operatorname{ch} t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{R^{(1)}t_1 + R^{(2)}t_2}\int_0^{t_2} e^{-R^{(2)}\tau_2}F^{(2)}(0, \tau_2)\,d\tau_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2 - t_1 + \sin t_1 \cos t_1] \\ \frac{1}{2}[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2 - t_1 - \sin t_1 \cos t_1] \\ \sin^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh} t_2 - \sin^2 t_1 \\ \cos^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \sin^2 t_1 \operatorname{sh} t_2 - \cos^2 t_1 \\ \frac{1}{2}[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2 - t_1 - \sin t_1 \cos t_1] \\ \frac{1}{2}[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2 - t_1 + \sin t_1 \cos t_1] \end{pmatrix},$$

$$e^{R^{(1)}t_1}\int_0^{t_1} e^{-R^{(1)}\tau_1}F^{(1)}(\tau_1, t_2)\,d\tau_1 + e^{R^{(1)}t_1 + R^{(2)}t_2}\int_0^{t_2} e^{-R^{(2)}\tau_2}F^{(2)}(0, \tau_2)\,d\tau_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] \\ \frac{1}{2}[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] - t_1 \\ \sin^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh} t_2 \\ \cos^2 t_1 \operatorname{ch} t_2 + \sin^2 t_1 \operatorname{sh} t_2 - 1 \\ \frac{1}{2}[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] \\ \frac{1}{2}[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] \end{pmatrix}.$$

Отже, для повного інтеграла $z=(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ розширеної систем
маємо

$$z_1=\{z_1^{(0)}[(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_2^{(0)}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_3^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+(z_4^{(0)}+1)[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_5^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_6^{(0)}[-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]\},$$

$$z_2=\frac{1}{2}\{z_1^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_2^{(0)}[(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_3^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+(z_4^{(0)}+1)[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_5^{(0)}[(t_1^2-\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_6^{(0)}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1-t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]\}-t_1,$$

$$z_3=z_1^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_2^{(0)}[(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_3^{(0)}(\cos^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\sin^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+(z_4^{(0)}+1)(\sin^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\cos^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+$$
$$+z_5^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_6^{(0)}[-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2],$$

$$z_4=z_1^{(0)}[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_2^{(0)}[-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_3^{(0)}(\sin^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\cos^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+(z_4^{(0)}+1)(\cos^2 t_1\operatorname{ch} t_2+\sin^2 t_1\operatorname{sh} t_2)+$$
$$+z_5^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_6^{(0)}[(-t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]-1,$$

$$z_5=\frac{1}{2}\{z_1^{(0)}[(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_2^{(0)}[-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_3^{(0)}[(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+(z_4^{(0)}+1)[(t_1+\sin t_1\cos t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1-\sin t_1\cos t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_5^{(0)}[(1+t_1^2+\cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2+(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]+$$
$$+z_6^{(0)}[(-t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2-(t_1^2+\sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]\},$$

$$z_6 = \frac{1}{2}\{z_1^{(0)}[(t_1^2 - \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_2^{(0)}[(-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (1 - t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_3^{(0)}[(t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ (z_4^{(0)} + 1)[(t_1 - \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1 + \sin t_1 \cos t_1)\operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_5^{(0)}[(t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (t_1^2 - \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2] +$$

$$+ z_6^{(0)}[(1 - t_1^2 + \cos^2 t_1)\operatorname{ch} t_2 + (-t_1^2 + \sin^2 t_1)\operatorname{sh} t_2]\}.$$

Повний інтеграл $x = (x_1, x_2)$ даної системи знайдемо, поклавши $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, де значення функцій z_1, z_2 вказано вище.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Соколов, Про функції від багатовимірних матриць і застосування їх до розв'язування лінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, УМЖ, т. 22, № 6, 1970.
2. Н. П. Соколов, Операции над пространственными матрицами, УМЖ, т. 17, № 5, 1965.

Надійшла 10.XII 1970 р.
Київ