1971 УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 4
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.917

# Деякі питання теорії осциляції (неосциляції) розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням

*В. М. Шевело, О. М. Одарич*

**1**. За час, що минув після опублікування класичної роботи Жана Штурма [1], одержано велику кількість результатів з теорії осциляції розв'язків звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Зокрема, встановлено ряд необхідних, достатніх, необхідних і достатніх умов осциляції розв'язків багатьох класів таких рівнянь [2, 3].

Аналіз літератури з якісної теорії диференціальних рівнянь із запізненням (зокрема, оглядових робіт [4—5] та ін.), приводить до висновку, що багато важливих результатів теорії осциляції звичайних (без запізнення) диференціальних рівнянь ще не перенесено на відповідні класи диференціальних рівнянь із запізненням.

В роботах [6—10] викладено критерії осциляції всіх розв'язків деяких класів нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням. В цій статті узагальнюються результати авторів на більш загальні рівняння, а також наводяться нові результати, які стосуються впливу запізнення на осциляторні властивості розв'язків. Зокрема, виділено клас диференціальних рівнянь виду (19), які мають ту властивість, що при $\tau(t) \equiv t$ ($\tau(t)$ — аргумент, що запізнюється) всі розв'язки осцилюють, а при $\tau(t) \not\equiv t$ серед розв'язків будуть і неосцилюючі розв'язки.

**2**. Об'єктом дослідження є рівняння виду

$$y''(t) + F(t, y(\tau_1(t)), y'(\tau_2(t))) = 0, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{1}$$

і деякі його частинні випадки при таких обмеженнях: $F(t, u, v)$ — дійсна, визначена і неперервна в дійсному евклідовому просторі $R^3$ $\{t \geqslant t_0 \geqslant 0, |u| < \infty, |v| < \infty\}$ і така, що $F(t, 0, 0) \equiv 0$, $\tau_i(t) \in C$, $\tau_i(t) \leqslant t$, $i = 1, 2$. Будемо виходити з таких означень.

Означення 1. Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію $y(t)$, що задовольняє рівняння (1) при $t \geqslant t_0$ і початкові умови: $y(t) = \varphi(t)$, $y'(t) = \psi(t)$, $t \in E_{t_0}$, $y(t_0), = \varphi(t_0), y'(t_0) = y_0'$.

Тут $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — початкові функції, визначені і неперервні на початковій множині $E_{t_0}$.

В зв'язку з тим, що прийняте нами означення осцилюючого розв'язку (див. означення 2) не є інваріантним відносно заміни системи відліку, вивчатимемо поведінку розв'язків рівняння (1) відносно системи координат, пов'язаної з тривіальним розв'язком цього рівняння (який відповідає положенню рівноваги системи, описуваної рівнянням, що розглядається).

Позначимо через $W$ множину розв'язків рівняння (1), які визначені на півосі $t \geqslant t_0$ і мають властивість: $y(t) \not\equiv 0$ при $t \geqslant T$, $t_0 \leqslant T < \infty$. Припускається, що функції, які входять у рівняння (1), такі, що множина $W$ не порожня.

Означення 2. Розв'язок $y(t)$ рівняння (1) з множини $W$ називатимемо осцилюючим відносно частинного розв'язку $y(t) \equiv 0$, якщо існує нескінченна множина значень $t = t_i$ таких, що $y(t_i) = 0$, причому $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Означення 3. Якщо розв'язок $y(t)$ рівняння (1), що належить до множини $W$, такий, що $y(t) \neq 0$ при $t \geqslant T \geqslant t_0$, то він є неосцилюючим відносно $y(t) \equiv 0$.

3. У випадку рівняння виду (1), взагалі кажучи, одні початкові умови (початкові функції) визначають осцилюючі розв'язки, а інші — неосцилюючі розв'язки. Характер впливу початкових умов на поведінку розв'язків диференціальних рівнянь вивчався рядом авторів (див., наприклад, [11—13]). Доцільно встановити обмеження на функцію $F(t, u, v)$ і на запізнення $\tau_i(t)$, при яких початкові умови не впливають на осциляторні властивості розв'язків рівнянь виду (1) в тому розумінні, що кожен з них є осцилюючим.

Наступні теореми містять такого типу умови для рівняння

$$y''(t) + p(t) f(y(\tau(t))) = 0, \tag{2}$$

де $p(t) \geqslant 0$; $f(0) = 0$; $uf(u) > 0$, якщо $u \neq 0$.

Теорема 1. *Для того, щоб всі розв'язки рівняння (2), що належать до множини $W$, були осцилюючими, достатньо виконання умов:*

$$\lim_{u \to \infty} \inf f(u) > 0, \qquad \lim_{u \to -\infty} \sup f(u) < \infty, \qquad \lim_{t \to \infty} \tau(t) = \infty, \tag{3}$$

$$\int^{\infty} p(x)\, dx = \infty. \tag{4}$$

Доведення. Припустимо, що серед розв'язків рівняння (2) є хоч би один неосцилюючий розв'язок $y(t) \in W$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $y(t) > 0$ при $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$. Покажемо, що це припущення приводить до наслідку, який суперечить умові (4).

Проінтегруємо рівняння (2) в інтервалі $(b, t)$:

$$y'(t) = y'(b) - \int_b^t p(x) f(y(\tau))\, dx. \tag{5}$$

На основі аналізу рівняння (2) приходимо до висновку, що $y(t)$ на інтервалі $(b, \infty)$, де $b$ досить велике значення аргументу, є монотонно зростаючою функцією, а $y'(t)$ монотонно спадною функцією, яка прямує до скінченної невід'ємної границі. Переходячи до границі при $t \to \infty$ у співвідношенні (5) і враховуючи сказане вище, робимо висновок, що

$$\int_b^{\infty} p(x) f(y(\tau))\, dx < \infty.$$

В силу обмежень, накладених на функцію $f(y(\tau))$, повинен збігатися і інтеграл $\int^{\infty} p(x)\, dx$. Ця суперечність доводить теорему.

Теорема 1 узагальнює достатні умови осциляції всіх розв'язків відповідного звичайного рівняння, встановлені раніше І. Бігарі [14] і Є. Томастиком [15]. У випадку $f(y(\tau)) \equiv y(\tau)$ твердження теореми 1 збігається з твердженням Г. О. Каменського [12].

Якщо накласти більш жорсткі обмеження на функції $f(u)$ і $\tau(t)$, то умову (4) в теоремі 1 можна істотно послабити.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

$$\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty,$$

а) $\tau(t)$ — *кусково-гладка неспадна функція;*
б) $f(u)$ — *неспадна функція:*

в) $\liminf\limits_{|u|\to\infty} \dfrac{|f(u)|}{|u|^{\beta}} \neq 0$, $\beta$ — *додатне число;*

г) $\displaystyle\int^{\infty} \tau^{\gamma} p(x)\,dx = \infty$, $\gamma = \begin{cases} \beta & \text{при } 0<\beta<1, \\ 1 & \text{при } \beta>1. \end{cases}$

*Тоді всі розв'язки $y(t) \in W$ рівняння (2) будуть осцилюючими.*

Доведемо теорему для випадку $0<\beta<1$. Для випадку $\beta>1$ доведення викладено в роботі [7].

Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що виконання умов теореми не гарантує осциляцію всіх розв'язків рівняння (2), що належить до множини $W$. Припустимо далі, що неосцилюючий розв'язок $y(t)$ рівняння (2) додатний на деякому інтервалі $[t_1, \infty)$. При доведенні теореми 1 показано, що при цих припущеннях інтеграл $\int_b^{\infty} p(x) \times \times f(y(\tau))\,dx$ збігається. Отже, рівняння (2) можна проінтегрувати в межах $(t, \infty)$, $t \geqslant b$. Одержимо

$$y'(\infty) - y'(t) + \int_t^{\infty} p(x) f(y(\tau))\,dx = 0.$$

Оскільки $y'(\infty) = c \geqslant 0$, то

$$y'(t) \geqslant \int_t^{\infty} p(x) f(y(\tau))\,dx.$$

Враховуючи властивості функції $y'(t)$, робимо висновок, що виконання цієї нерівності гарантує виконання нерівності

$$y'(\tau) \geqslant \int_t^{\infty} p(x) f(y(\tau))\,dx. \tag{6}$$

Тут під $y'(\tau)$ слід розуміти похідну від $y(t)$ по $t$, обчислену при значенні $t$, що дорівнює $\tau$.

Помноживши обидві частини нерівності (6) на $\tau'(t)$ і проінтегрувавши далі в межах від $b$ до $t$, одержимо

$$y(\tau(t)) - y(\tau(b)) \geqslant \int_b^t (\tau(x) - \tau(b))\, p(x) f(y(\tau))\,dx +$$

$$+ (\tau(t) - \tau(b)) \int_t^{\infty} p(x) f(y(\tau))\,dx.$$

Через те, що $y(\tau(b)) > 0$ і перший доданок в правій частині останньої нерівності невід'ємний, то

$$y(\tau(t)) \geqslant (\tau(t) - \tau(b)) \int_t^{\infty} p(x) f(y(\tau))\,dx, \ t \geqslant b. \tag{7}$$

Піднесемо нерівність (7) до степеня β:

$$y^{-\beta}(\tau)\,(\tau(t)-\tau(b))^{\beta}\leqslant\left\{\int_{t}^{\infty}p(x)\,f(y(\tau))\,dx\right\}^{-\beta}.$$

Помноживши обидві частини останньої нерівності на $p(t)\,f(y(\tau))$ і проінтегрувавши в межах від $t_2$ до $t_3$, $b<t_2<t_3$, одержимо:

$$\int_{t_2}^{t_3}y^{-\beta}(\tau)\,(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}\,p(x)\,f(y(\tau))\,dx\leqslant\frac{1}{\beta-1}\left[\left\{\int_{t}^{\infty}p(x)\,f(y(\tau))\,dx\right\}^{1-\beta}\right]_{t_2}^{t_3}.\tag{8}$$

Інтеграл

$$\int_{t_2}^{t_3}y^{-\beta}(\tau)\,(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}p(x)\,f(y(\tau))\,dx\tag{9}$$

збігається при $t_3\to\infty$, оскільки права частина нерівності (8) скінченна.

Із збіжності інтеграла (9) випливає збіжність інтеграла $\int^{\infty}\tau^{\beta}\,p(x)\,dx$. Справді, якщо $y(t)$ прямує до скінченної границі $c$ при $t\to\infty$, то $f(y(\tau))$ також прямує до скінченної границі при $t\to\infty$ і існує таке число $T$, що $f(y(\tau))\geqslant c_1$, $c_1=\lim\limits_{t\to\infty}f(y(\tau))$ при $t\geqslant T$ і $y(\tau)<c$.

Таким чином,

$$\int_{T}^{\infty}\{y(\tau)\}^{-\beta}\,(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}\,p(x)\,f(y(\tau))\,dx\geqslant\frac{c_1h}{c^{\beta}}\int_{T}^{\infty}(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}p(x)\,dx.$$

Якщо ж $y(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, то в силу умов теореми існує число $T_1$ таке, що

$$\frac{|f(y(\tau))|}{|y(\tau)|^{\beta}}\geqslant c_2>0\ \text{ при }\ t\geqslant T_1$$

і, отже,

$$\int_{T_1}^{\infty}\{y(\tau)\}^{-\beta}\,(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}p(x)\,f(y(\tau))\,dx\geqslant c_2\int_{T_1}^{\infty}(\tau(x)-\tau(b))^{\beta}p(x)\,dx.$$

Теорему доведено.

Теорема 2 включає деякі відомі результати, зокрема ознаку Ф. Аткінсона [16] осциляції всіх розв'язків рівняння (2) при $\tau(t)\equiv t$, $f(u)=u^{2n-1}$, $n=2,3,\ldots$; ознаку Ш. Белогореца [17] для випадку $\tau(t)\equiv t$, $f(u)=u^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, $\alpha=\frac{r}{s}$, $r$ і $s$ — непарні натуральні числа; ознаку П. Вальтмана [18] для випадку $\tau(t)\equiv t$, $\beta>1$.

Вона також узагальнює теореми, опубліковані в [6, 7].

Якщо $f(y(\tau))=y(\tau)$, а $\beta=1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, то з твердження теореми 2 одержимо такий аналог відомої теореми Ю. Мікусінського [10], встановленої ним для звичайного лінійного диференціального рівняння:

Виконання умов (3) і умови а) теореми 2 і

$$\int^{\infty}\tau^{1-\varepsilon}p(x)\,dx=\infty,\ 0<\varepsilon\leqslant1\tag{10}$$

гарантує осциляцію всіх розв'язків рівняння

$$y''(t)+p(t)\,y(\tau(t))=0.\tag{11}$$

Зауважимо, що необхідна умова осциляції розв'язків рівняння (11) має вигляд:

$$\int^{\infty} xp(x)\,dx = \infty. \tag{12}$$

Якщо

$$\lim_{t\to\infty} \tau'(t) = c, \quad c - \text{const} > 0, \tag{13}$$

то відповідним вибором значення ε можна встановити достатню умову осциляції розв'язків рівняння (11), як завгодно близьку до необхідної.

При обмеженнях (3) та а) — в) теореми 2 умова г) є достатньою умовою осциляції всіх розв'язків рівняння (2). Необхідна умова (при $\beta > 1$) має вигляд (12). Встановимо необхідну і достатню умову осциляції всіх розв'язків рівняння (2), що належить до множини $W$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* а), б) *теореми* 2 *та* (13):

$$\lim_{|u|\to\infty} \inf \frac{|f(u)|}{|u|^{\beta}} \neq 0,\ \beta > 1, \qquad \frac{f(u)}{u} \text{ — неспадна функція при } 0 < u \leqslant 1.$$

Всі розв'язки рівняння (2) з множини $W$ осцилюють тоді і тільки тоді, коли виконується умова (12).

Доведення. Достатність умови (12) доведено в роботі [7].

Покажемо, що ця умова є і необхідною, тобто, що збіжність інтеграла $\int^{\infty} xp(x)\,dx$ гарантує існування у рівняння (2) неосцилюючого розв'язку.

З цією метою розглянемо систему функцій

$$y_0(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{2}, & t \geqslant t_0, \\ \dfrac{c}{2}, & t \in E_{t_0}, \end{cases} \tag{14}$$

$$y_{m+1}(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{2} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (x - t_0)\,p(x)\,f(y_m(\tau))\,dx + (t - t_0)\int_{t}^{\infty} p(x)\,f(y_m(\tau))\,dx, & t \geqslant t_0, \\ \dfrac{c}{2}, & t \in E_{t_0}, \end{cases}$$

де число $c > 0$ таке, що

$$f(c)\left(\int_{t_0}^{t} (x - t_0)\,p(x)\,dx + (t - t_0)\int_{t}^{\infty} p(x)\,dx\right) \leqslant \frac{c}{2}.$$

Очевидно, що функції $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ неперервні при $t \geqslant t_0$.

Користуючись методом математичної індукції, покажемо, що ці функції рівномірно обмежені. Для $m = 1$ справджується

$$y_1(t) = \frac{c}{2} + \int_{t_0}^{t} (x - t_0)\,p(x)\,f\left(\frac{c}{2}\right)dx + (t - t_0)\int_{t}^{\infty} p(x)\,f\left(\frac{c}{2}\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c,$$

тобто $\dfrac{c}{2} \leqslant y_1(t) \leqslant c$.

Нехай $\frac{c}{2} \leqslant y_k(t) \leqslant c$. Тоді для $y_{k+1}(t)$ одержимо:

$$y_{k+1}(t) = \frac{c}{2} + \int_{t_0}^{t} (x - t_0)\, p(x)\, f(y_k(\tau))\, dx + (t - t_0) \int_{t_0}^{\infty} p(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2} + f(c)\left(\int_{t_0}^{t} (x - t_0)\, p(x)\, dx + (t - t_0) \int_{t}^{\infty} p(x)\, dx\right) \leqslant \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Отже, $\frac{c}{2} \leqslant y_m(t) \leqslant c$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажемо далі, що функції $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ — монотонно зростаючі. Так, для $m = 1$ маємо:

$$y_1(t) - y_0(t) = \int_{t_0}^{t} (x - t_0)\, p(x)\, f\left(\frac{c}{2}\right) dx + (t - t_0) \int_{t}^{\infty} p(x)\, f\left(\frac{c}{2}\right) dx \geqslant 0,$$

тобто

$$y_1(t) \geqslant y_0(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Припустимо, що $y_k(t) \geqslant y_{k-1}(t)$, $t \geqslant t_0$. Тоді, враховуючи що функція $f(u)$ монотонно зростаюча, одержимо:

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_{t_0}^{t} (x - t_0)\, p(x)\, \{f(y_k(\tau)) - f(y_{k-1}(\tau))\}\, dx +$$

$$+ (t - t_0) \int_{t}^{\infty} p(x)\, \{f(y_k(\tau)) - f(y_{k-1}(\tau)\}\, dx \geqslant 0.$$

Таким чином, показано, що послідовність неперервних функцій $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, є монотонно зростаючою і рівномірно обмеженою. Отже, вона рівномірно збігається, тобто існує

$$y(t) = \lim_{m \to \infty} y_m(t).$$

Очевидно, що $y(t)$ має властивість $\frac{c}{2} \leqslant y(t) \leqslant c$ і є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \begin{cases} \frac{c}{2} + \int_{t_0}^{t} (x - t_0)\, p(x)\, f(y(\tau))\, dx + (t - t_0) \int_{t}^{\infty} p(x)\, f(y(\tau))\, dx, & t \geqslant t_0, \\ \frac{c}{2}, & t \in E_{t_0}, \end{cases}$$

а, значить, і диференціального рівняння (2).

Цим завершується доведення теореми.

**4**. Теореми 1 і 2 вдається узагальнити на рівняння виду (1), припускаючи, що виконується така умова:

$$\begin{aligned} F(t, u, v) &\leqslant p_1(t)\, f_1(u)\, g_1(v) \text{ при } u \leqslant 0, \\ F(t, u, v) &\geqslant p_2(t)\, f_2(u)\, g_2(v) \text{ при } u \geqslant 0, \end{aligned} \tag{15}$$

при всіх $(t, u, v) \in R^3$. Функції $p_i(t)$ і $f_i(u)$, $i = 1, 2$, задовольняють ті ж умови, що й функції $p(t)$ і $f(u)$, які входять в рівняння (2), а функції $g_i(v)$ неперервні і

$$\inf_{-\infty \leqslant v \leqslant \infty} g_i(v) = h_i > 0, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

Теорема 4. *Якщо виконуються умови:*

$$\lim_{t\to\infty} \tau_i(t) = \infty, \ i = 1, 2, \qquad \lim_{u\to\infty} \inf f_2(u) > 0, \qquad \lim_{u\to-\infty} \sup f_1(u) < 0, \tag{17}$$

$$\int^{\infty} p_1(x)\, dx = \int^{\infty} p_2(x)\, dx = \infty, \tag{18}$$

*то всі розвязки рівняння* (1), *що належать до множини* $W$, *осцилюють.*

Доведення. Проінтегруємо рівняння (1) в межах від $b$ до $t$, $t > b$:

$$y'(t) = y'(b) - \int_b^t F(x, y(\tau_1), y'(\tau_2))\, dx.$$

Припустимо, що рівняння (1) допускає неосцилюючий розв'язок. Припустимо далі, що $y(t)$ додатна, починаючи з деякого значення $t = t_1 \geqslant t_0$. З допомогою міркувань, подібних до тих, які використовувались при доведенні теореми 1, прихсдимо до висновку:

$$\int^{\infty} F(x, y(\tau_1), y'(\tau_2))\, dx < \infty.$$

Беручи до уваги (15), (16) і враховуючи, що $\lim\limits_{u\to\infty} \inf f_2(u) > 0$, робимо висновок:

$$\infty > \int_b^{\infty} F(x, y(\tau_1)\, y'(\tau_2))\, dx \geqslant \int_b^{\infty} p_2(x) f_2(y(\tau_1))\, g_2(y'(\tau_2))\, dx \geqslant c_1 h \int_b^{\infty} p_2(x)\, dx.$$

Останнє співвідношення суперечить умові (18).

Якщо ж припустити, що $y(t) < 0$, $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$, і прийняти до уваги, що $\lim\limits_{u\to-\infty} \sup f_1(u) < 0$, знову прийдемо до суперечності.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* (17),

а) $\tau_1(t)$ — *кусково-гладка неспадна функція,*

б) $f_i(u)$, $i = 1, 2$ — *неспадні функції,*

в) *існує дійсне додатне число* $\beta \neq 1$ *таке, що*

$$\lim_{u\to\infty} \inf \frac{|f_i(u)|}{|u|^{\beta}} \neq 0, \ i = 1, 2,$$

г) $\int^{\infty} \tau_1^{\gamma} p_1(x)\, dx = \int^{\infty} \tau_1^{\gamma} p_2(x)\, dx = \infty$

$$\gamma = \begin{cases} \beta & \text{при } 0 < \beta < 1, \\ 1 & \text{при } \beta > 1. \end{cases}$$

*Тоді всі розв'язки рівняння* (1), *що належать до множини* $W$, *будуть осцилюючими.*

Теорема доводиться методом від супротивного з використанням тих же міркувань, що і при доведенні теорем 2 і 4.

Зауважимо, що у випадку $F(t, y(\tau_1(t)), y'(\tau_2(t))) \equiv F(t, y(t))$ і $\beta > 1$ твердження теореми 5 збігається з аналогічним твердженням Дж. Макі і Дж. Вонга [20].

5. Становить інтерес встановлення умов, при виконанні яких запізнення не впливає на осциляторні властивості розв'язків рівнянь в тому

розумінні, що з осциляції всіх розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь випливає осциляція всіх розв'язків рівнянь із запізненням, що розглядаються, і навпаки. Встановимо тут такого роду умови для рівнянь спеціального виду:

$$y''(t) + p(t)\, y^{\alpha}(\tau(t)) = 0, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{19}$$

$p(t) > 0$, $\alpha = \dfrac{r}{s}$, $r$ і $s$ — непарні натуральні числа.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови*: а) *теореми* 2 *і* (13). *Тоді з осциляції всіх розв'язків звичайного рівняння*

$$y''(t) + p(t)\, y^{\alpha}(t) = 0, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{20}$$

*випливає осциляція всіх розв'язків, що належать множині $W$, рівняння з запізненням* (19).

Доведення. Припустимо, що висновок теореми не має місця, тобто всі розв'язки рівняння (20) осцилюють, а серед розв'язків рівняння з запізненням (21) є хоч би один неосцилюючий розв'язок.

З припущення про осциляцію всіх розв'язків звичайного рівняння випливає [16, 17]

$$\int^{\infty} x^{\gamma} p(x)\, dx = \infty, \qquad \gamma = \begin{cases} \alpha \text{ при } 0 < \alpha < 1, \\ 1 \text{ при } \alpha > 1. \end{cases} \tag{21}$$

Необхідна умова наявності серед розв'язків рівняння (19) неосцилюючого розв'язку має вигляд [7]

$$\int^{\infty} \tau^{\gamma} p(x)\, dx < \infty, \qquad \gamma = \begin{cases} \alpha \text{ при } 0 < \alpha < 1, \\ 1 \text{ при } \alpha > 1. \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, що при обмеженні (13) умови (21) і (22) суперечливі. Це доводить теорему.

Примітка. Осциляція всіх розв'язків звичайного рівняння (20) випливає з осциляції всіх розв'язків відповідного рівняння з запізненням (19) при менш обмежувальних умовах на запізнення, а саме, при умові (3) і умові а) теореми 2. Доведення аналогічне.

Особливий інтерес становить встановлення умов, при виконанні яких запізнення надає якісно нових особливостей поведінці розв'язків диференціальних рівнянь із запізненням.

Теорема 7. *Якщо виконуються умови*: (3), (21), *а також* а) *теореми* 2 *і*

$$\int^{\infty} \tau^{\alpha} p(x)\, dx < \infty, \tag{23}$$

*то всі розв'язки звичайного рівняння* (20) *є осцилюючими, а серед розв'язків рівняння з запізненням* (19) *є неосцилюючі розв'язки.*

Доведення. Осциляція всіх розв'язків рівняння (20) при виконанні умови (21) доведена в [16, 17]. Умова (23), як показано в роботах [8, 9], є достатньою умовою наявності серед розв'язків рівняння (19) неосцилюючого розв'язку.

Попередню теорему доповнимо твердженням, вірним для $\alpha > 1$.

Нехай виконуються умови: (3), (12), а) теореми 2 і

$$\int^{\infty} \tau p(x)\, dx < \infty.$$

Тоді кожний розв'язок звичайного рівняння (20) осцилює, а серед розв'язків з множини $W$ рівняння з запізненням (19) можуть бути неосцилюючі розв'язки.

Вірність першої частини сформульованого твердження доведено Ф. Аткінсоном [16]. Збіжність інтеграла $\int^{\infty} \tau p(x)\, dx$ є необхідною умовою наявності у рівняння (19) неосцилюючого розв'язку [8].

Приклад. Рівняння

$$y''(t) + \frac{1}{4a^4t^2} y^5(\tau(t)) = 0, \ t \geqslant t_0 = 1, \ a - \text{const},$$

у випадку $\tau(t) \equiv t$ має тільки осцилюючі розв'язки, а при $\tau(t) = t^{\frac{1}{5}}$ серед його розв'язків з множини $W$ є неосцилюючий розв'язок $y(t) = at^{\frac{1}{2}}$, що задовольняє початкові умови: $y(1) = a, y'(1) = \frac{a}{2}$.

## ЛІТЕРАТУРА


1. C. Sturm, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journ. de math. pur. et appl., 1, 1836, 106—186.
2. M. Rab, Kriterion für die Oszillation der Lözungen der Differentialgleichungen $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, Časop. pěstov. mat., 84, 1959, 335—368.
3. В. Н. Шевело, Задачи, методы и основные результаты теории осцилляции решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 2, «Наука», М., 1965.
4. А. Халанай, Системы с запаздыванием. Результаты и проблемы, Математика (периодический сборник переводов иностранных статей), 10 : 5, 1966.
5. А. Д. Мышкис и Л. Э. Эльсгольц, Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, УМН, т. 22, вып. 2 (134), 1967.
6. О. М. Одарич, В. М. Шевело, Про умови осциляції розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням, ДАН УРСР, сер. А, № 11, 1967.
7. О. Н. Одарич, В. Н. Шевело, Об осциляторных свойствах решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, Математическая физика, вып. 4, «Наукова думка», К., 1968.
8. В. Н. Шевело, О. Н. Одарич, О неосцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, Труды семинара по математической физике, вып. 2, «Наукова думка», К., 1968.
9. О. Н. Одарич, Об асимптотическом поведении решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Труды семинара по математической физике, вып. 2, «Наукова думка», К., 1968.
10. О. Н. Одарич, В. Н. Шевело, О необходимых и достаточных условиях осцилляции решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, Вторая Всесоюзная межвузовская конференция по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Тезисы докладов, Черновцы, 1968.
11. И. М. Соболь, Положительные решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, Уч. зап. МГУ, вып. 181, Математика, 8, 1956.
12. Г. А. Каменский, Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, Уч. зап. МГУ, вып. 165, Математика, 7, 1954.
13. С. Б. Норкин, Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, «Наука», М., 1965.
14. J. Bihari, An oscillation theorem conserning the halflinear differential equation of second order, Magyar tud. acad. Mat. kutato int. közl., 8, c. A, 1963, 275—280.
15. E. C. Tomastik, Oscillation of a nonlinear second order differential equation, SIAM J. Appl. Math., 15, 1967, 1275—1277.
16. F. V. Atkinson, On second order nonlinear oscillations, Pacific J. Math., 5, 1965, 643—647.
17. S. Belohorec, Oscilatorické riešenia istej nelineárnej diferenciálnej rownice dvuhého radu, mat. — fyz. časop., 11, 1961, 250—255.
18. P. Waltman, Oscillation of solutions of a nonlinear equation, SIAM Rev., 5, 1963, 128—130.
19. J. G. Mikusinski, On Fite's oscillation theorems, Colloq. Math., 11, 1949, 34—39.
20. J. W. Macki and J. S. W. Wong, Oscillation of solutions to second order nonlinear differential equations, Pacific J. Math., 24, 1968, 111—118.


Надійшла 16.II 1971 р.

Інститут математики АН УРСР,
Інститут кібернетики АН УРСР