УДК 517.942

Про розв'язність задачі без початкових умов сильно параболічних систем в нециліндричній області

А. І. Горшков

1. Запровадимо такі позначення: $\Omega = \Omega\{(x, t);\ x \in \Omega_t,\ -\infty < t < \infty\}$ — нециліндрична область точок $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ в $n+1$-вимірному евклідовому просторі, де Ω_t перерізи Ω гіперплощиною $t = \mathrm{const}$.

$$\Omega_{t_1,t_2} = \Omega_{t_1,t_2}\{(x, t);\ x \in \Omega_\eta,\ t_1 \leqslant \eta \leqslant t_2,\ t_2 - t_1 \leqslant T\}$$

для будь-яких t_1, t_2 і будь-якого $T > 0$.

Позначимо через S межу Ω, а через S_{t_1,t_2} межу $\Omega_{t_1-t_2}$. Щодо Ω_{t_1,t_2} та її межі S_{t_1,t_2} для будь-яких t_1, t_2, $t_2 - t_1 \leqslant T$, $T > 0$ припускатимемо:

1) всі перерізи Ω_η, $t_1 \leqslant \eta \leqslant t_2$ — опуклі, обмежені і міра $\Omega_\eta \neq 0$ ($\mathrm{mes}\,\Omega_\eta \neq 0$):

2) жодна гіперплощина Ω_τ, що одержується при перетині $t = \tau$ не є дотичною до S;

3) для будь-якої точки (x, t), що лежить на S_{t_1,t_2}, існує окіл $S_\alpha \subset S_{t_1,t_2}$ такий, що в деякій системі координат рівняння S_α може бути подано у вигляді $x_n = \omega(x', t)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ з диференційовною функцією $\omega(x', t)$ по $x_1, \ldots, x_{n-1}$, t, при цьому

$$|\omega(x', t) - \omega(x' \tau)| \leqslant C(t - \tau)^{\frac{1}{2b}},$$

$$\left|\frac{\partial\omega(x', t)}{\partial x_i} - \frac{\partial\omega(x', \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant C(t - \tau)^{\alpha},$$

де $\alpha > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \ldots, u_N(x, t))$ — шукана вектор-функція.

$$A(x, t, D) \equiv \sum_{|\mu| = |\nu| \leqslant b} D^\mu (a_{\mu\nu}(x, t) D^\nu)$$

— диференціальний оператор порядку $2b$, в якому $a_{\mu\nu}(x, t)$ — квадратні матриці порядку N з неперервно диференційовними по x елементами, заданими в Ω.

$$B_j(x, t, D) \equiv \sum_{\substack{|\mu|, |\nu| \leqslant b \\ |\mu|+|\nu| \leqslant r}} D^{\mu}(b_{j\mu\nu}(x, t) D^{\nu})$$

— диференціальні оператори порядку r_j, $0 \leqslant r_j \leqslant 2b-1$, $j=1, 2, \ldots, bN$; де $b_{j\mu\nu}(x, t)$ — квадратні матриці, що розглядаються на S. Як звичайно, тут $\nu=(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — цілочисловий індекс диференціювання:

$$D^{\nu}=D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2} \ldots D_n^{\nu_n}; \qquad D_k^{\nu_k} \equiv \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial x_k^{\nu_k}}; \qquad |\nu|=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n.$$

$C^{\beta}(\Omega_{t_1,t_2})$ — множина вектор-функцій $f(x, t)$, визначених в області Ω_{t_1,t_2}, при цьому кожна компонента $f_j(x, t)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ неперервно диференційовна $\left(f_j^{k_0 k} \equiv D^k \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0} f_j\right)$ і задовольняє нерівності:

1) $|f_j^{k_0 k}(x, t)| \leqslant C \; (2bk_0+|k| \leqslant \beta)$,

2) $|f_j^{k_0 k}(x, t)-f_j^{k_0 k}(x_0, t)| \leqslant C\,|x-x_0|^{\beta-[\beta]} \; (2bk_0+|k|=[\beta])$,

3) $|f_j^{k_0 k}(x, t)-f_j(x, t_0)| \leqslant C\,|t-t_0|^{\frac{1}{2b}(\beta-2bk_0-|k|)} \; (\beta-2b<2bk_0+|k| \leqslant \beta)$,

де C не залежить від (x, t).

Нехай H — множина нескінченно диференційовних вектор-функцій по x для будь-якого фіксованого $t \in (-\infty, \infty)$.

Нехай

$$(u, v)_k \equiv \int_{\Omega_t} \sum_{|\nu|=k} D^{\nu}u D^{\nu}\bar{v}\,dx,$$

де $\xi\bar{\eta}=\sum_{i=1}^{N} \xi_i\bar{\eta}_i$, $|u|_k^2=(u, u)_k$, $\|u\|_k^2=\sum_{i=0}^{k}|u|_i^2$, $(u, v)=(u, v)_0$, $u, v \in H$. Позначимо через $H_k(\Omega_t)$ поповнення H за нормою $\|\cdot\|_k$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t}-A(x, t, D)\,u=f(x, t) \tag{1}$$

і розглянемо для рівняння (1) задачу без початкових умов, тобто задачу знаходження вектор-функції $u(x, t)$, яка задовольняє в Ω рівняння (1), а на поверхні S крайові умови

$$B_j(x, t, D)\,u|_S=0; \qquad j=1, 2, \ldots, bN. \tag{2}$$

В статті встановлюється теорема існування та єдиності розв'язку задачі в просторах як швидко зростаючих, так і спадних по t вектор-функцій, при цьому умови розв'язності описуються властивостями перетинів області Ω, коефіцієнтів рівняння і крайових умов при $t \to -\infty$.

Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності зустрічається при дослідженні закономірності розподілу тепла в земній корі [1]. І. І. Шмулев [2], Kono Mitsuhiko, Takaši Kusano [3] розглядали періодичні розв'язки задачі у випадку параболічного рівняння 2-го порядку (як лінійного, так і нелінійного) в циліндричній області, використовуючи апріорні оцінки. М. П. Куликов [4] встановив умови розв'язності і єдиності згаданої задачі для параболічних систем з коефіцієнтами, що не залежать від t, опираючись на асимптотичний метод. Ю. А. Дубинський [5] розв'язує аналогічну задачу для запроваджених ним еліптико-параболічних систем рівнянь в циліндричній області, розв'язки знаходяться методом Гальоркіна.

При дослідженні поставленої задачі застосовується видозмінений на випадок зростаючих функцій метод P. Fife [7], який примикає до ідеї M. Krzyzanski [8], запропонований без доведення і обгрунтований М. П. Куликовим [4] в класі зростаючих вектор-функцій для прямолінійної смуги.

2. Йдучи за P. Fife, розглянемо мішану задачу для рівняння (1) в області Ω_{t_1,t_2} і на поверхні S_{t_1,t_2}, задовольнимо крайові умови (2), початкові умови

$$u(x, t_1) = \varphi(x). \tag{3}$$

Нехай система (1) сильно параболічна для будь-яких $t \in (-\infty, \infty)$, тобто справджуються нерівності

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|\nu|=b} a_{\mu\nu}(x, t)\, \xi^{\mu} \bar{\xi}^{\nu} \leqslant \delta(t) \sum_{|\mu|=b} |\xi^{\mu}|^2 \tag{4}$$

при всіх $\xi_k^{\mu_k} \in C^1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\xi^{\mu} = \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ і будь-яких $x \in \Omega_t$; $\delta(t) > 0$.

Відомо, що сильно параболічна система є параболічною і в смислі Петровського.

Теорема 1 [9]. *Нехай система* (1) *параболічна за Петровським, виконується умова розв'язності мішаної задачі* (1) — (3) [9] *в області* $\Omega_{\tau,t}$. *Нехай коефіцієнти оператора* $A(x, t, D)$ *належать простору* $C^{2b+\gamma}$, *коефіцієнти операторів* $B_j \in C^{2b-1+\gamma}$, $f \in C^{\gamma}$ $(0 < \gamma < 1)$, $\varphi \in C^0$, *а поверхня* $S_{\tau,t}$ *області* $\Omega_{\tau,t}$ *задовольняє зазначені вище умови. Тоді розв'язок задачі* (1) — (3) *можна подати у вигляді*

$$u(x, t) = U_{t,\tau}\varphi + U_{t,\tau} f, \tag{5}$$

де

$$U_{t,\tau}\varphi \equiv \int_{\Omega_\tau} G(t, x; \tau, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

$$U_{t,\tau} f \equiv \int_{\tau}^{t} d\eta \int_{\Omega_\eta} G(t, x; \eta, \xi)\, f(\xi, \eta)\, d\xi,$$

$G(t, x, \tau, \xi)$ — *матриця Гріна крайової задачі* (1) — (3).

При цьому оператори $U_{t,\tau}$, $V_{t,\tau}$ *мають такі властивості:*

A. $U_{t,t}\varphi = \varphi;\quad V_{t,t} f = 0;$

$$U_{t,\tau}\varphi = U_{t,\sigma} U_{\sigma,\tau}\varphi; \quad V_{t,\tau} f = V_{t,\sigma} f + U_{t,\sigma} V_{\sigma,\tau} f$$

для будь-яких $\tau \leqslant \sigma \leqslant t$.

Далі, для будь-якого фіксованого $t \in (-\infty, \infty)$ розглянемо інтегро-диференціальну квадратичну форму

$$a(u, u, t) \equiv \int_{\Omega_t} \sum_{|\mu|=|\nu|=b} a_{\mu\nu}(x, t)\, D^{\mu} u D^{\nu} \bar{u}\, dx + \int_{S_t} \sum_{|\alpha|,|\beta|} C_{\alpha\beta}(x, t)\, D^{\alpha} u D^{\beta} \bar{u}\, ds +$$

$$+ \int_{\Omega_t} \sum_{\substack{|\mu|,|\nu| \leqslant b \\ |\mu|+|\nu| < 2b}} b_{\mu\nu}(x, t)\, D^{\mu} u D^{\nu} \bar{u}\, dx,$$

де $|\beta|$, $|\alpha| < b - \dfrac{1}{2}$.

Форма $a(u, u, t)$ одержується після множення скалярно диференціального виразу $A(x, t, D)\, u$ на вектор-функцію $u(x, t)$ (інтегрування ведеться по перерізу Ω_t), останній вираз перетворюється інтегруванням частинами b разів, а потім від відповідних членів віднімаються члени, які утворюються при скалярному множенні виразу (2) на вектор-функцію

$u(x, t)$ (і знову інтегрування ведеться по перерізу Ω_t). Зрозуміло, припускається, що коефіцієнти у виразі (2) продовжені в середину області Ω_t, для цього слід вимагати, щоб $S \in H_b$ $(t \in (-\infty, \infty))$.

Лема 1. *Для будь-яких вектор-функцій* $u \in H_b$ *і поверхні* S_t, *що задовольняє згадані вище умови, справджуються нерівності для будь-яких фіксованих* t

1) $\operatorname{Re} \int\limits_{\Omega_t} \sum b_{\mu\nu}(x, t) D^{\mu} u D^{\nu} \bar{u} dx \leqslant \alpha(t) \| u \|_b^2$;

2) $\operatorname{Re} \int\limits_{S_t} \sum C_{\alpha\beta}(x, t) D^{\alpha} u D^{\beta} \bar{u} ds \leqslant \beta(t) \| u \|_b^2$,

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *не залежать від* x.

Доведення леми засновано на застосуванні нерівностей Ерлінга [6].

Лема 2. *Якщо* $\operatorname{Re} a(u, u, t) < 0$, *то існує функція* $\lambda(t) > 0$ *така, що справджується нерівність*

$$\operatorname{Re} a(u, u, t) \leqslant -\lambda(t) \| u \|_b^2 \qquad (6)$$

для всіх $u \in H_b$ [6].

Лема 3. *Має місце вкладення*

$$\| u \|_0^2 \leqslant \frac{CM}{\operatorname{mes} \Omega_t} \| u \|_b^2, \qquad (7)$$

де

$$M = \max\{1, (\operatorname{diam} \Omega_t)^{2b}\},$$

$\operatorname{diam} \Omega_t$ — *діаметр перерізу* Ω_t; C — const.

3. Позначимо $\| u \| = u \|_b$.

Запровадимо банахів простір B нормою

$$||| u ||| = \sup_t \exp\{-p(t)\} \| u \| < \infty,$$

де

$$p(t) = -\int\limits_0^t \lambda(\tau) \frac{\operatorname{mes} \Omega_\tau}{CM} d\tau + \frac{\operatorname{diam} \Omega_t}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\gamma\right) t > 0.$$

Означимо підпростори $M \subset H_b$ і $N \subset B$ так, щоб в них для будь-якої підобласті $\Omega_{t_1, t_2} \subset \Omega$ справджувалась теорема 1.

Лема 4. *Нехай система* (1) *сильно параболічна. Тоді оператри* $U_{t,\tau}$ $V_{t,\tau}$ *мають, крім властивості А, ще й такі:*

Б. *Якщо* $\varphi \in M$, *то* $\overline{U_{t,\tau}\varphi} \in M_j$ ($\bar{U}_{t,\tau}$ — *замикання оператора* $U_{t,\tau}$), *а з* $f \in N$ *випливає, що* $V_{t,\tau} f \in M$.

В. *Для будь-якого* $T > 0$ *існує число* $M(T)$ *таке, що* $\|U_{t,\tau}\|$, $\|V_{t,\tau}\| \leqslant M(T)$ *для всіх* t, τ, $t - \tau \leqslant T$.

Г. *Для будь-якої послідовності чисел* $\{t_i\}$, i — *цілі числа* $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = \infty$, $\lim\limits_{i \to -\infty} t_i = -\infty$, *при* $t_{i+1} - t_i \leqslant T$ *знайдеться таке число* $\chi < 1$, *що* $\| U_{t_{i+1}, t_i} \| < \chi$.

Доведення. Опираючись на теорему 1, покажемо вірність лише властивостей В і Г. Помножимо рівняння (1) скалярно на вектор-функцію $\exp\{-2p(t)\} u(x, t)$ (інтегрування ведеться по Ω_t) для будь-якого $t \in (-\infty, \infty)$, одержимо

$$\exp\{-2p(t)\} \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx = \exp\{-2p(t)\} \left(a(u, u, t) + \int\limits_{\Omega_t} F \bar{u} dx \right). \qquad (8)$$

Оскільки всі перерізи опуклі і рівняння межі S_t — диференційовна по t функція, то, переходячи до полярної системи координат, маємо

$$\frac{d}{dt}\{\exp\{-2p(t)\}\|u\|_0^2\} = -2p'(t)\exp\{-2p(t)\}\|u\|_0^2 +$$

$$+ 2\exp\{-2p(t)\}\int\limits_{\Omega_t}\frac{\partial u}{\partial t}\bar{u}dx + \int\limits_{\omega}\exp\{-2p(t)\}u\bar{u}\,|_{S_t}\,d\omega Z'(t), \qquad (9)$$

де ω — поверхня одиничної сфери з центром всередині Ω_t, $\varrho = Z(t)$ — рівняння межі в полярній системі координат.

Запровадимо позначення

$$v(t) = \exp\{-2p(t)\}\|u\|_0^2.$$

Оцінимо дійсну частину рівності (8), для цього скористаємося нерівностями (6), (7), (9), а також нерівністю Коші

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

одержимо

$$\frac{d}{dt}v(t) \leqslant 2\gamma v(t) + \frac{1}{2\varepsilon}\exp\{-2p(t)\}\|f\|_0^2, \qquad (10)$$

де

$$2\gamma = \lambda(t)\frac{\operatorname{mes}\Omega_t}{CM} + p'(t) + \frac{(\operatorname{diam}\Omega_t)'_t}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Інтегруючи нерівність (10) по t, маємо

$$v(t) \leqslant v(\tau)e^{-2\gamma(t-\tau)} + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}e^{-2\gamma(t-s)}e^{-2p(s)}\|f\|_0^2\,ds.$$

Звідси випливають потрібні оцінки

$$\|U_{t,\tau}\|\, e^{-\gamma(t-\tau)}, \qquad \|V_{t,\tau}\| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}(t-\tau).$$

Теорема 2. *Нехай оператори* $U_{t,\tau}$, $V_{t,\tau}$ *мають властивості* А — Г *і нехай* $f \in N$.

Тоді існує єдиний розв'язок $u(x, t)$ *задачі* (1) — (2) *і при цьому справджується оцінка*

$$\|u(x, t)\| \leqslant M(T)\left(\frac{M(T)}{1-\chi} + 1\right)|||f|||. \qquad (11)$$

Доведення. Нехай

$$\varphi_j = V_{t_j,t_{j-1}}f + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{\nu}U_{t_{j-k+1},t_{j-k}}\right)V_{t_{j-k},t_{j-k-1}}f. \qquad (12)$$

Ряд (12) збігається, оскільки на основі властивостей А — Г і оцінки $\|V_{t_j,t_{j-1}}f\| \leqslant M(T)|||f|||$ одержимо $\|\varphi_j\| \leqslant \frac{M(T)|||f|||}{1-\chi}$, тобто

$$\varphi_j = \lim_{m\to\infty}V_{t_j,t_{j-m+1}}f \text{ при } f \in N.$$

З формули (12) випливає, що значення функції $u(x, t)$ при $t = t_j$ цілком визначається через коефіцієнти рівняння, крайових умов та функцію f. Такий же факт спостерігається і при дослідженні періодичних розв'язків.

Нехай

$$u(x, t) = U_{t,t_j} \varphi_j + V_{t,t_j} f \tag{13}$$

для будь-якого j, де $t_j \leqslant t$.

Неважко бачити, що функція $u(x, t)$ в формулі(13) не залежить від j. Підставимо значення φ_j в формулу (13) і, враховуючи властивості $A - \Gamma$, одержимо

$$u(x, t) = \lim_{m \to \infty} V_{t,t_{j-m+1}} f.$$

З формули (13) випливає оцінка (11). Єдиність розв'язку довοдиться методом від супротивного.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1966.
2. И. И. Шмулев, Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений, Матем. сб., т. 66, № 3, 1965.
3. Kono Mitsuhiko, Takasi Kusano, A boundary value problem for nonlinear parabolic equations of the second, «Comm. math. Univ. Saucti Pouli», XIV, 2, 1966, 85—96.
4. Н. П. Куликов, Теорема существования задачи без начальных условий для параболических систем, Волж. матем. сб., вып. 4, 1966.
5. Ю. А. Дубинский, Краевые задачи для эллиптико-параболических уравнений, Изв. АН АрмянССР, сер. матем., т. 4, № 3, 1969.
6. К. Морен, Методы гильбертова пространства, «Мир», М., 1967.
7. P. Fife, Solutions of parabolic boundary problems existing for on time, «Arch Ration Mech. and Anolysis», 16, 3, 1964, 155—186.
8. M. Krzyzanski, Ozagadnieniu Fourira w Warstwie nieogramezonej, «Arch. mechstosowanei», 5, 4, 1953, 584—588.
9. Reiko Arima, On general boundary Value problem for parabolic equations, J. Math Kyoto Uriv», 4, 1, 1964, 207—243.

Надійшла 13.XI 1970 р.

Краснодарський політехнічний інститут