УДК 621 391.519.27

Функціональні поліноми Лагерра, їх властивості та застосування

О. М. Деменін

Багато задач теорії випадкових процесів пов'язано з дослідженням імовірнісних мір, заданих на функціональних просторах.

При вивченні таких мір часто виникає необхідність в побудові відповідної системи функціональних поліномів і дослідженні їх властивостей. Так, наприклад, дослідження гауссівських мір в функціональних просторах привели до побудови системи функціональних поліномів Ерміта [1], основні властивості яких розглядались в роботі [2].

В цій роботі запроваджуються означення і вивчаються окремі властивості деяких типів функціональних поліномів Лагерра.

Клас функціональних поліномів, що розглядається, по-перше, є узагальненням добре вивченої [3—4] системи ортогональних многочленів Лагерра, по-друге, дозволяє відокремити і вивчити властивості деяких імовірнісних мір, що мають важливе значення при розв'язанні ряду задач теорії випадкових процесів.

Позначимо через $C[0, 1]$ простір неперервних невід'ємних функцій $z(t)$, $t \in [0, 1]$ таких, що

$$\|z\| \doteq \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} z(t) < 1.$$

Нехай A лінійний інтегральний оператор з невід'ємним симетричним ядром $A(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$, що діє з простору $C[0, 1]$ в простір $C[0, 1]$, норма якого задовольняє умову

$$\|A\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 A(t, s)\, ds < 1.$$

Означення 1. Нехай $L_1[0, 1]$ простір невід'ємних вимірних функцій $x(t)$, $t \in [0, 1]$ таких, що

$$\|x\| = \int_0^1 x(t)\, dt < \infty, \tag{1}$$

і $\Delta t_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ — деякий приріст аргументу $t \in [0, 1]$. Позначимо через $D_{x_k}^{(j)}$ оператор похідної j-го порядку за змінною x_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Запровадимо функціональні поліноми Лагерра за допомогою такого граничного співвідношення:

$$L_A^{(\alpha)}(\underbrace{x(u_{j_1}), \ldots, x(u_{j_1})}_{q_1}, \ldots, \underbrace{x(u_{j_p}), \ldots, x(u_{j_p})}_{q_p}) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta t_k \to 0}} \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\Delta t_k)^{-\alpha \Delta t_k + 1} \times$$

$$\times e^{x(t_k)\Delta t_k} \left\{ \prod_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A(u_{j_s}, t_k)\, D^{(1)}_{x(t_k)\Delta t_k} x(t_k)\, \Delta t_k \right)^{q_s} \right\} \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\, \Delta t_k)^{\alpha \Delta t_k - 1} \times$$

$$\times e^{-x(t_k)\Delta t_k}, \; x(u) \in L_1[0, 1], \quad \alpha > 0, \quad q_r = 1, 2, \ldots, \quad r = 1, \ldots, p. \tag{2}$$

Зауважимо, що добуток, який міститься в фігурних дужках правої частини (2), потрібно розуміти як деякий диференціальний вираз.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. *Твірний функціонал $\varphi_A(x, z)$ для системи функціональних поліномів Лагерра першого роду має такий вигляд*:

$$\varphi_A(x, z) = \exp\left\{ - \int_0^1 \frac{x(t) \int_0^1 A(t, s)\, z(s)\, ds}{1 - \int_0^1 A(t, s)\, z(s)\, ds}\, dt - \alpha \int_0^1 \ln\left[1 - \int_0^1 A(t, s) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times z(s)\, ds \right] dt \right\}, \quad x(t) \in L_1[0, 1], \quad z(t) \in C[0, 1]. \tag{3}$$

Доведення. Із означення 1 випливає, що

$$L_A^{(\alpha)}(x(u_{j_1}), \ldots, x(u_{j_p})) = P^{(p)}_{z(u_{j_1}), \ldots, z(u_{j_p}) = 0} \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max_k \Delta t_k \to 0}} \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\, \Delta t_k)^{-\alpha \Delta t_k + 1} \times$$

$$\times e^{x(t_k)\Delta t_k} \exp\left\{ D^{(1)}_{x(t_k)\Delta t_k}(x(t_k)\, \Delta t_k) \int_0^1 A(t_k, s)\, z(s)\, ds \right\} \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\, \Delta t_k)^{\alpha \Delta t_k - 1} e^{-x(t_k)\Delta t_k}. \tag{4}$$

Тут $P^{(p)}_{z(u_{j_1}), \ldots, z(u_{j_p}) = 0}$ оператор варіаційної похідної p-го порядку за функцією $z(u)$, $u \in [0, 1]$ в точках $u_{j_1}, \ldots, u_{j_p}$ з наступною умовою $z = 0$. Означення варіаційної похідної міститься в роботі [2].

Розвинемо функцію $\exp\left\{D^{(1)}_{x(t_k)\Delta t_k}(x(t_k)\Delta t_k)\int\limits_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right\}$ в правій частині виразу (4) в степеневий ряд. Враховуючи, що

$$(x(t_k)\Delta t_k)^{-\alpha\Delta t_k+1} e^{x(t_k)\Delta t_k} D^{(m)}_{x(t_k)\Delta t_k}(x(t_k)\Delta t_k)^m (x(t_k)\Delta t_k)^{\alpha\Delta t_k-1} e^{-x(t_k)\Delta t_k} =$$
$$= L_m^{(\alpha\Delta t_k-1)}(x(t_k)\Delta t_k),$$

де $L_m^{(\alpha\Delta t_k-1)}(x(t_k)\Delta t_k)$ поліном Лагерра порядку m від аргументу $x(t_k)\Delta t_k$, дістанемо

$$L_A^{(\alpha)}(x(u_{j_1}), \ldots, x(u_{j_p})) = P^{(p)}_{z(u_{j_1}),\ldots,z(u_{j_p})=0},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta t_k\to 0}} \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_m^{(\alpha\Delta t_k-1)}(x(t_k)\Delta t_k)\left[\int\limits_0^t A(t_k, s) z(s) ds\right]^m. \tag{5}$$

Ряд в правій частині (5) є твірною функцією системи ортогональних многочленів Лагерра. У відповідності з [3, 4]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_m^{(\alpha\Delta t_k-1)}(x(t_k)\Delta t_k)\left[\int\limits_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right]^m =$$

$$= \exp\left\{-\frac{x(t_k)\Delta t_k \int\limits_0^1 A(t_k, s) z(s) ds}{1-\int\limits_0^1 A(t_k, s) z(s) ds}\right\} \frac{1}{\left(1-\int\limits_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right)^{\alpha\Delta t_k}}. \tag{6}$$

Здійснюючи граничний перехід при $n\to\infty$ в (5) і враховуючи (6), дістанемо співвідношення (3), що і доводить теорему.

Зауважимо, що твірний функціонал $\varphi_A(x, z)$ може бути розвинений в ряд за функціональними поліномами Легерра першого роду. Це розвинення має вигляд

$$\varphi_A(x, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 L_A^{(\alpha)}(x(t_1), \ldots, x(t_k)) z(t_1) \times$$
$$\times \ldots z(t_k)\, dt_1 \ldots dt_k, \quad x(t) \in L_1[0, 1], \quad z(t) \in C[0, 1]. \tag{7}$$

Сформулюємо теорему про інтегральне зображення функціональних поліномів Лагерра першого роду.

Теорема 2. *Нехай $\Lambda\sigma$ — алгебра всіх борелівських множин простору $L_1[0, 1]$. Позначимо через $\nu_A(x, E)$, $E\in\Lambda$ міру, яка задається твірним функціоналом $\varphi_A(x, z)$.*

Тоді для функціональних поліномів Лагерра першого роду має місце таке зображення:

$$L_A^{(\alpha)}(x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_p})) = \int u(t_{j_1}) \ldots u(t_{j_p})\, \nu_A(x, du). \tag{8}$$

Доведення теореми випливає з інтегрального зображення твірного функціоналу $\varphi_A(x, z)$.

$$\varphi_A(x, z) = \int e^{\int\limits_0^1 z(t) u(t) dt} \nu_A(x, du), \quad z(t)\in C[0, 1], \quad x(t)\in L_1[0, 1]. \tag{9}$$

Зауважимо, що для $\varphi_A(x, z)$ має місце, крім (9), зображення

$$\varphi_A(x, z) = \int e^{\int_0^1 \int_0^1 A(t,s)u(t)z(s)\,dt\,ds} \nu_I(x, du), \tag{10}$$

де I одиничний оператор. З формули (10) випливає

$$L_A^{(\alpha)}(x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_p})) = \int \prod_{r=1}^{p} \int_0^1 A(t_{j_r}, s)\, u(s)\, ds\, \nu_I(x, du). \tag{11}$$

Співвідношення (11) також можна розглядати як інтегральне зображення функціональних поліномів Лагерра першого роду.

Сформулюємо важливу властивість, яка пов'язана з ортогональністю функціональних поліномів Лагерра.

Теорема 3. *Нехай* $L_A^{(\alpha)}(x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_p}))$ *і* $L_B^{(\alpha)}(x(s_{r_1}), x(s_{r_q}))$ *функціональні поліноми Лагерра першого роду, а* μ_I *міра на* Λ *така, що* $\mu_I(E) = \nu_I(0, E)$, $E \in \Lambda$. *Тоді*

$$\int L_A^{(\alpha)}(x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_p}))\, L_B^{(\alpha)}(x(s_{r_1}), \ldots, x(s_{r_q}))\, \mu_I(dx) =$$

$$= \begin{cases} S\left\{\int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{m=1}^{p} A(t_{j_m}, h_m)\, B(h_m, s_{r_m})\, L_I^{(\alpha)}(u(h_1), \ldots \right. \\ \left. \ldots, u(h_p))\big|_{u=0} dh_1 \ldots dh_p\right\}, \quad p = q; \\ 0, \quad p \neq q. \end{cases} \tag{12}$$

Тут S — оператор симетризації. Застосування оператора S до функції, що стоїть у фігурних дужках, зводиться до сумування доданків, одержаних з цієї функції за допомогою всіх можливих перестановок за аргументом s_{r_m}, $m = 1, \ldots, p$. Число таких перестановок дорівнює $p!$.

Доведення. Позначимо

$$T_{pq} = \int L_A^{(\alpha)}(x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_p}))\, L_B^{(\alpha)}(x(s_{r_1}), \ldots, x(s_{r_q}))\, \mu_I(dx).$$

Використовуючи зображення функціональних поліномів Лагерра першого роду через твірні функціонали $\varphi_A(x, z)$ і $\varphi_B(x, v)$, маємо

$$T_{pq} = P^{(p+q)}_{z(t_{j_1}), \ldots, z(t_{j_p})=0,\; v(s_{r_1}), \ldots, v(s_{r_q})=0} \int \varphi_A(x, z)\, \varphi_B(x, v)\, \mu_I(dx).$$

Звідси

$$T_{pq} = P^{(q)}_{v(s_{r_1}), \ldots, v(s_{r_q})=0} \int \prod_{k=1}^{p} \int_0^1 \Phi_x(t_{j_k}, w)\, dw\, \mu_I(dx), \tag{13}$$

де

$$\Phi_x(t, w) = \int_0^1 A(t, u)\, B(u, w)\, x(u)\, du.$$

З (13) випливає, що при $p \neq q$ $T_{pq} = 0$. Розглянемо випадок, коли $p = q$. Легко зрозуміти, що

$$T_{pp} = S\left\{\int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{m=1}^{p} A(t_{j_m}, h_m)\, B(h_m, s_{r_m}) \int x(h_1) \ldots \right. \\ \left. \ldots x(h_p)\, \mu_I(dx)\, dh_1 \ldots dh_p\right\}. \tag{14}$$

З (14) випливає твердження теореми.

Розглянемо деякі приклади розвинень за функціональними поліномами Лагерра першого роду. Для функціоналу $f(x) = e^{-\int_0^1 a(t)x(t)dt}$, $x(t), a(t) \in L_1[0,1]$ маємо

$$f(x) = \exp\left\{-\alpha \int_0^1 \ln[1 + a(t)]\,dt\right\}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 \ldots \int_0^1 L_A^{(\alpha)}(x(t_1), \ldots\right.$$

$$\ldots, x(t_m))\, u(t_1) \ldots u(t_m)\, dt_1 \ldots dt_m, \qquad (15)$$

де $u(t)$ є розв'язок інтегрального рівняння

$$\frac{a(t)}{1 + a(t)} = \int_0^1 A(t, s)\, u(s)\, ds.$$

Розвинення (15) одержано з (7) при умові, що

$$\frac{\int_0^1 A(t, s)\, z(s) ds}{1 - \int_0^1 A(t, s)\, z(s)\, ds} = a(t).$$

Другим прикладом розвинень за функціональними поліномами Лагерра є твірний функціонал $\varphi_A(x, z)$.

Функціональні поліноми Лагерра першого роду тісно пов'язані з деякими імовірнісними мірами, які мають важливе значення в теорії випадкових процесів.

Нехай $\mu_A(E)$, $E \in \Lambda$ імовірнісна міра на Λ, впроваджена за допомогою характеристичного функціоналу

$$\varphi_A(z) = \int e^{i\int_0^1 z(t)x(t)dt}\, \mu_A(dx),$$

який має вигляд

$$\varphi_A(z) = \exp\left\{-\alpha \int_0^1 \ln\left[1 - i\int_0^1 A(t, s)\, z(s)\, ds\right] dt\right\}. \qquad (16)$$

Легко показати [5], що міра μ_A відповідає випадковому процесу $\xi(t) = \int_0^1 A(t, s)\, d\eta(s)$, $t \in [0, 1]$ де $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$ однорідний процес з незалежними приростами, що задовольняє умову $\eta(0) = 0$, характеристична функція якого має вигляд

$$M \exp\{i\gamma\eta(t)\} = (1 - i\gamma)^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0,$$

де M — символ математичного сподівання. Тобто, міра μ_A є функціональним аналогом гамма-розподілу. Зауважимо, що характеристичний функціонал $\varphi_A(z)$ допускає інтегральне зображення, аналогічне (10).

Розглянемо деякі задачі, що стосуються статистики випадкових процесів $\xi(t)$. Нехай $\mu_A^{(1)}$ і $\mu_A^{(2)}$ імовірнісні міри на Λ, запроваджені за допомогою характеристичних функціоналів $\varphi_A^{(1)}(z)$ у вигляді (16) і

$$\varphi_A^{(2)}(z) = \exp\left\{-\alpha\int_0^1 \ln\left[1 - i\,\frac{\int_0^1 A(t, s)\, z(s) ds}{1 - a(t)}\right] dt\right\}, \qquad (17)$$

де $a(t) \in C[0, 1]$ деяка відома функція.

Знайдемо умови, при яких міра $\mu_A^{(2)}$ абсолютно неперервна щодо міри $\mu_A^{(1)}$. Нехай інтегральне рівняння $a(t) = \int_0^1 A(t, s)\, b(s)\, ds$, $t \in [0, 1]$ має єдиний розв'язок $b(t)$ такий, що існує функціонал $\int_0^1 x(t)\, b(t)\, d(t), x(t) \in L_1[0,1]$. Тоді характеристичний функціонал міри $\mu_A^{(2)}$ може бути зображений у вигляді

$$\varphi_A^{(2)}(z) = \exp\left\{\alpha\int_0^1 \ln[1 - a(t)]\, dt\right\} \int e^{i\int_0^1 z(t)x(t)dt}\, e^{\int_0^1 b(t)x(t)dt}\, \mu_A^{(1)}(dx). \qquad (18)$$

З рівняння (18) легко одержати вираз для густини міри $\mu_A^{(2)}$ відносно $\mu_A^{(1)}$

$$\frac{d\mu_A^{(2)}}{d\mu_A^{(1)}}(x) = \exp\left\{\int_0^1 x(t)\, b(t)\, dt + \alpha\int_0^1 \ln[1 - a(t)]\, dt\right\}. \qquad (19)$$

Розглянемо тепер задачу впровадження імовірнісних мір за допомогою абсолютно неперервних перетворень міри μ_A. Позначимо через $L_1^*[0, 1]$ простір неперервних комплексних функцій $x^*(t)$, $t \in [0, 1]$, які мають невід'ємні дійсні і уявні частини, інтегровні на інтервалі $[0, 1]$. Легко зрозуміти, що $L_1[0, 1]$ є підпростором дійсних функцій на $L_1^*[0, 1]$.

Позначимо через W клас неперервних аналітичних функціоналів $\varrho(x^*(t))$, $x^*(t) \in L_1^*[0, 1]$, які мають такі властивості:

а) $\varrho(x(t)), x(t) \in L_1[0, 1]$ є вимірний невід'ємний функціонал, що задовольняє умову

$$\int \varrho(x(t))\, \mu_A(dx) = c < \infty;$$

б) $\varrho(x(t) + ib(t))$ інтегровний по $x(t) \in L_1[0, 1]$ за мірою μ_I при кожному фіксованому $b(t) \in C[0, 1]$. Тут I — одиничний оператор.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай μ_A імовірнісна міра на Λ, впроваджена за допомогою характеристичного функціоналу $\varphi_A(z)$ (16). Нехай $\varrho(x(t)), x(t) \in L_1[0, 1]$ деякий функціонал, що належить до класу W з параметром $c = 1$.*

Тоді міра ν —

$$\nu(E) = \int_E \varrho(x(t))\, \mu_A(dx), \quad E \in \Lambda,$$

може бути запроваджена за допомогою характеристичного функціоналу

$$\psi(z) = \varphi_A(z) \int \varrho\left(\int_0^1 \frac{A(t, s)\, x(s)\, ds}{1 - i\int_0^1 A(s,u) z(u)\, du}\right) \mu_I(dx). \qquad (20)$$

Доведення теореми випливає з зображення функціоналу $\varrho(x(t))$ у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|\varrho(x(t))-\sum_{kj}^{n}c_k^{(n)}\bar{c}_j^{(n)}e^{i\int_0^1\alpha_k^{(n)}(t)x(t)dt}e^{-i\int_0^1\alpha_j^{(n)}(t)x(t)dt}\right|\mu_A(dx)=0, \tag{21}$$

де $c_k^{(n)}$ деякі сталі, причому, $\bar{c}_k^{(n)}$ комплексно спряжені до $c_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)}(t)$, $t\in\in[0,1]$ — деякі дійсні функції, $k=1,\ldots,n$. З рівняння (21) випливає, що

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{kj}^{n}c_k^{(n)}\bar{c}_j^{(n)}\varphi_A(z+\alpha_k^{(n)}-\alpha_j^{(n)}). \tag{22}$$

Підставивши у (22) вираз для характеристичного функціоналу $\varphi_A(z)$ (16), після нескладних перетворень одержимо (20). Теорему доведено.

Розглянемо такий приклад. Нехай

$$\varrho(x(t))=\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\ldots\int_0^1 B_k(t_1,\ldots,t_k)\,x(t_1)\ldots x(t_k)\,dt_1\ldots dt_k. \tag{23}$$

Тоді, у відповідності з (20), характеристичний функціонал міри ν має таке зображення:

$$\begin{aligned}\psi(z)=\varphi_A(z)\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\ldots\int_0^1 B_k(t_1,\ldots,t_k)\,L_I^{(\alpha)}(u(s_1),\ldots,u(s_k))\,|_{u=0}\times\\ \times\prod_{j=1}^{k}\frac{A(t_j,s_j)}{1-i\int_0^1 A(s_j,v)\,z(v)\,dv}\,dt_1\ldots dt_k ds_1\ldots ds_k.\end{aligned} \tag{24}$$

За допомогою теореми 4 можна одержати багато цікавих властивостей міри μ_A.

Теорема 5. *Позначимо через $M_n(t_1,\ldots,t_n)$ момент n-го порядку міри μ_A*

$$M_n(t_1,\ldots,t_n)=\int x(t_1)\ldots x(t_n)\,\mu_A(dx). \tag{25}$$

Тоді, для моменту $(n+1)$-го порядку має місце таке рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned}M_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})-M_n(t_1,\ldots,t_n)\,\alpha\int_0^1 A(t_{n+1},s)\,ds=\\ =\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\ldots\int_0^1 A(t_1,s_1)\ldots A(t_n,s_n)\,A(t_{n+1},s_k)\,L_I^{(\alpha)}(u(s_1),\ldots\\ \ldots,u(s_n))\,|_{u=0}ds_1\ldots ds_n.\end{aligned} \tag{26}$$

Доведення теореми випливає з рівняння

$$\begin{aligned}\int e^{i\int_0^1 z(t)x(t)dt}\,x(t_1)\ldots x(t_n)\,\mu_A(dx)=\\ =\varphi_A(z)\int_0^1\ldots\int_0^1\prod_{j=1}^{n}\frac{A(t_j,s_j)}{1-i\int_0^1 A(s_j,v)\,z(v)\,dv}\,L_I^{(\alpha)}(u(s_1),\ldots,u(s_n))\,|_{u=0}ds_1\ldots ds_n,\end{aligned} \tag{27}$$

яке є окремим випадком (24). Застосовуючи до обох частин рівняння (27) оператор варіаційної похідної $P^{(1)}_{z(t_{n+1})=0}$, після нескладних перетворень одержимо

$$M_{n+1}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = M_1(t_{n+1}) \cdot M_n(t_1, \ldots, t_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{j=1}^{n} A(t_j, s_j) A(s_k, t_{n+1}) L_I^{(\alpha)}(u(s_1), \ldots, u(s_n))|_{u=0} ds_1 \ldots ds_n,$$

звідки випливає (26). Теорему доведено.

Деякі цікаві властивості можна одержати з аналізу міри $\nu_I(x, E)$, $E \in \in \Lambda$, що запроваджена твірним функціоналом

$$\varphi_I(x, z) = \exp\left\{-\int_0^1 \frac{x(t)\, z(t)}{1 - z(t)}\, dt - \alpha \int_0^1 \ln[1 - z(t)]\, dt\right\}, \tag{28}$$

$$x(t) \in L_1[0, 1], \qquad z(t) \in C[0, 1].$$

Зокрема, поклавши в (28) $z(t) = z$, можна показати, що

$$\int \left[\int_0^1 u(t)\, dt\right]^p \nu_I(x, du) = L_p^{(\alpha-1)}\left(\int_0^1 x(t)\, dt\right),$$

де $L_p^{(\alpha-1)}\left(\int_0^1 x(t)\, dt\right)$ поліном Лагерра порядку p від аргументу $\int_0^1 x(t)\, dt$.

На закінчення розглянемо функціональні поліноми Лагерра другого роду.

Означення 2. Запровадимо функціональні поліноми Лагерра другого роду за допомогою такого граничного співвідношення

$$L_A^{(\alpha)}(\underbrace{x(u_{j_1}), \ldots, x(u_{j_1})}_{q_1}, \ldots, \underbrace{x(u_{j_p}), \ldots, x(u_{j_p})}_{q_p}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta t_k \to 0}} \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\Delta t_k)^{-\Delta t_k(\alpha-1)} \times$$

$$\times e^{x(t_k)\Delta t_k} \left\{\prod_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A(u_{j_s}, t_k)\, x(t_k)\, \Delta t_k D^{(1)}_{x(t_k)\Delta t_k}\right)^{q_s}\right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} (x(t_k)\, \Delta t_k)^{\Delta t_k(\alpha-1)} e^{-x(t_k)\Delta t_k}, \qquad x(u) \in L_1[0, 1], \quad \alpha > 0,$$

$$q_r = 1, 2, \ldots, r = 1, \ldots, p, \tag{29}$$

де $\Delta t_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, деякий приріст аргументу $t \in [0, 1]$.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 6. *Твірний фунціонал $\psi_A(x, z)$ для системи функціональних поліномів Лагерра другого роду має такий вигляд*:

$$\psi_A(x, z) = \exp\left\{-\int_0^1 \int_0^1 A(t, s)\, x(t)\, z(s)\, dt ds + (\alpha - 1) \int_0^1 \ln\left[1 + \int_0^1 A(t, s)\, z(s)\, ds\right] dt\right\}, \quad x(t) \in L_1[0, 1], \quad z(t) \in C[0, 1]. \tag{30}$$

Доведення теореми цілком аналогічне доведенню теореми 1 і грунтується на використанні співвідношення

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_m^{(\Delta t_k(\alpha-1)-m)} (x(t_k)\Delta t_k) \left[\int_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right]^m =$$

$$= \exp\left\{-x(t_k)\Delta t_k \int_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right\} \left[1 + \int_0^1 A(t_k, s) z(s) ds\right]^{\Delta t_k(\alpha-1)}.$$

Зауважимо, що твірний функціонал $\psi_A(x, z)$ може бути розвинений в ряд за функціональними поліномами Лагерра другого роду. Це розвинення має вигляд, аналогічний (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
2. О. М. Деменін, Про деякі властивості функціональних поліномів Ерміта, УМЖ, т. 21, № 3, 1969.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, «Наука», М., 1966.
4. Д. С. Кузнецов, Специальные функции, «Высшая школа», М., 1965.
5. А. Н. Деменин, Б. Г. Марченко, Методы задания случайных полей, Труды Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 1, Новосибирск, 1969.

Надійшла 10.XII 1970 р.

Інститут математики АН УРСР