УДК 517.919.2

До однієї гіпотези Коулмена

М. М. Ладіс

Коулман [1] висловив таке припущення.

Припущення. Нехай дано дві системи

$$(1')\ x' = f(x), \qquad (1'')\ y' = g(y), \tag{1}$$

$$x' = f(x) + F(x, y), \qquad y' = g(y) + G(x, y), \tag{2}$$

де $x \in R^k$, $y \in R^l$, f і g — однорідні поліноми степеня m, система $(1')$ асимптотично стійка, а $(1'')$ асимптотично нестійка, F і G класу C^1 і $F, G = O(|x|^m + |y|^m)$ при $x, y \to 0$. Тоді системи (1) і (2) локально топологічно еквівалентні, тобто існує гомеоморфізм двох околів початку координат, що переводить траєкторії однієї системи в траєкторії іншої.

Побудуємо приклад, який показує несправедливість цього припущення. Визначимо дійсну функцію $H(x, y)$ дійсних змінних непарну по x і y так. Для $x, y \geqslant 0$ покладемо

$$H(x, y) = \begin{cases} -3y^2 & \text{при } y \leqslant x^2, \\ -6x^4 + 3(2x^2 - y^2) & \text{при } x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2, \\ -6x^4 & \text{при } 2x^2 \leqslant y. \end{cases}$$

Неважко зауважити, що H неперервно диференційовна $H = O(|x|^3 + |y|^3)$.

Розглянемо систему

$$x' = -x^3, \qquad y' = y^3 \tag{3}$$

і збурену систему

$$x' = -x^3, \qquad y' = y^3 + H(x, y). \tag{4}$$

При $x, y > 0$ на кривій $L = \{(x, y),\ y = x^2\}$ в силу системи (4)

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y^3 - 3y^2}{-x^3} = \frac{x^6 - 3x^4}{-x^3} = -x^3 + 3x.$$

Звідси видно, що при $x < 1$ траєкторії системи (4) трансверсальні до L і напрямлені всередину криволінійного сектора, що міститься між L і віссю Ox, тим самим є нескінченна множина траєкторій додатно асимптотичних до початку координат. Отже, системи (3) і (4) не є топологічно еквівалентними.

Зауваження. Невірність припущення Коулмена заставляє шукати більш вузький клас збурень F, G, що не руйнують систему (1). Можливо, що вони повинні задовольняти умову $|F'(z)|$, $|G'(z)| \leqslant L|z|^{m-1}$, де $z = (x, y)$, а $L > 0$ досить мале, причому не обов'язково навіть вимагати єдиного порядку малості.

ЛІТЕРАТУРА

1. C. Coleman, Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press, New York • London, 1967, 495—496.

Надійшла 13.X 1970 р.

Інститут математики АН БРСР