УДК 517.917

До задачі про стійкість аналітичних рухів

А. А. Мартинюк

Нехай система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

описує деякий збурений рух.

Припустимо, що

$$x_s(t) = f_s(t) \tag{1.2}$$

є розв'язком системи рівнянь (1.1), який набуває значення x_s^0 при початковому значенні $t = t_0 \geqslant 0$, тобто

$$x_s(t_0) = x_s^0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Вимагається розв'язати задачу про стійкість розв'язку (1.2) системи (1.1).

В знаменитому творі О. М. Ляпунова [1] запропоновано два методи розв'язку загальної задачі про стійкість руху: перший — при допомозі розвинень розв'язків (1.2) в ряди, використовуючи аналітичність правих частин рівнянь збуреного руху (1.1) і другий метод — метод функцій Ляпунова.

Вказані О. М. Ляпуновим методи одержали дальший всебічний розвиток і узагальнення у відомих працях [2—4] та багатьох роботах інших авторів.

У цьому повідомленні встановлюється алгоритм дослідження загальної задачі про стійкість руху систем з аналітичними правими частинами, не зв'язаний з обчисленням характеристичних чисел чи побудовою функцій Ляпунова і заснований на фактичній побудові аналітичного розв'язку у вигляді рядів, розташованих за незалежною змінною А. Пуанкаре [5] з наступним застосуванням однієї теореми Шура про збіжність.

1. Оцінка радіуса збіжності аналітичного розв'язку системи диференціальних рівнянь. Позитивне вирішення цього питання має практичний інтерес в зв'язку з побудовою [6] ітеративного процесу розв'язку задачі (1.1), (1.3).

Тут же це питання носить допоміжний характер, а одержана оцінка входить до функції, що здійснює конформне відображення областей, в яких міститься розв'язок системи (1.1).

Відзначимо також, що такий підхід в задачі побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь приводить до розширення області збіжності аналітичного розв'язку і фактично дозволяє виконати його аналітичне продовження в область значень незалежної змінної, що цікавить нас. Більш детально про це див. [7]. Такий же підхід можливий і при аналітичному продовженні розв'язку за параметром [8].

Нехай функції $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ задані при $t = \tau + hi$, де $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $h \in (-\varrho, +\varrho)$ $i = \sqrt{-1}$ і при всіх комплексних значеннях величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нехай в E^n існує деяка множина M:

$$M = \{(x, t): |x_s - x_s^0| < r_s, \quad |t - t^0| < \sigma, \quad s = 1, 2, \ldots, n\},$$

в якій функції X_s розвиваються в збіжні ряди

$$X_s = \sum_{m_0 m_1 \ldots m_n = 0}^{\infty} P_s^{(m_1 \ldots m_n)} (t - t_0)^{m_0} (x_1 - x_1^0)^{m_1} (x_2 - x_2^0)^{m_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{m_n}$$

з степенями $t - t_0$ і $x_s - x_s^0$ $s = 1, 2, \ldots, n$ при $|x_s - x_s^0| < r_s$, $|t - t_0| < \sigma$. В цих розвиненнях $P_s^{(m_1 \ldots m_n)}$ є функції t задані і обмежені. Нехай також r_s і σ не залежать від x_s^0 і $t_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Функції X_s, що мають такі властивості, будемо називати рівномірно аналітичними.

Теорема 1. *Якщо функції $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ рівномірно аналітичні в M за всіма змінними, що входять до них, то система* (1.1) *має аналітичний розв'язок $x_s(t)$ в комплексній площині t з оцінкою*

$$|t - t_0| < \sigma^0 = \min\left(\int_0^B \frac{d\beta}{W(\beta)}, \sigma\right), \tag{1.4}$$

де $B = \max(r_1, r_2, \ldots, r_n, \sigma)$,

$$W(\beta) = \max\left(\frac{B}{r_s} |X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)| \text{ при } |x_s^0 - x_s| = \frac{r_s}{B}\beta, \quad |t_0 - t| = \frac{\sigma}{\beta}\beta\right).$$

Відзначимо тепер одну ознаку продовжуваності аналітичного розв'язку системи (1.1). Введемо в E^n норму вектора x за формулою $\|x\| = (\Sigma x_s^2)^{1/2}$.

Теорема 2. *Нехай в E^n означена множина*

$$M = \{(x, t): \|x - x^0\| \leqslant r < \infty, \quad |t - t_0| \leqslant \sigma < \infty\},$$

в якій функції X рівномірно аналітичні за $t-t_0$ та $x-x^0$. Якщо при $\|x-x^0\|<\infty$, $t\geqslant t_0$ виконується умова $\int\limits_0^{B_1}\frac{d\beta}{W_1(\beta)}\to\infty$ при $B_1\to\infty$, то аналітичний розв'язок $x(t)$ системи (1.1) може бути продовжений на безмежний інтервал часу $t_0\leqslant t<\infty$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи, що

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|\geqslant\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right|, \tag{1.5}$$

з нерівності

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|=\|X(x,t)\|$$

знаходимо

$$\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right\|\leqslant\|X(x,t)\|. \tag{1.6}$$

Далі з оцінки (1.6) випливає

$$\left|\frac{d\beta}{dt}\right|\leqslant W_1(\beta), \tag{1.7}$$

де

$$B_1=\max(r,\sigma),$$

$$W_1(\beta)=\max\left(\frac{B_1}{r}\|X(x,t)\|\ \text{при}\ \|x-x^0\|=\frac{r}{B_1}\beta,\ |t-t_0|=\frac{\sigma}{B_1}\beta\right).$$

Беручи інтеграл в нерівності (1.7) від точки 0 до B_1 и в бік зростання t, одержуємо

$$t-t_0\geqslant\int\limits_0^{B_1}\frac{d\beta}{W_1(\beta)}.$$

Таким чином, якщо при $B_1\to\infty$ виконується умова теореми 2, то $t\to\infty$, що і означає продовжуваність розв'язку. Теорема доведена.

З а у в а ж е н н я. Для автономних систем

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad s=1,2,\ldots,n, \tag{1.8}$$

з аналітичними правими частинами, оцінка (1.4) в площині t приймає вигляд

$$|t-t_0|\leqslant\sigma=\int\limits_0^{B_2}\frac{d\beta}{W_2(\beta)}, \tag{1.9}$$

де $B_2=\max\limits_s(r_s)$,

$$W_2(\beta)=\max\left(\frac{B_2}{r_s}|X_s|\ \text{при}\ |x_s^0-x_s|=\frac{r_s}{B_2}\beta\right).$$

Ознака продовжуваності аналітичного розв'язку автономної системи (1.8) одержується, як і для системи (1.1).

З означення B_2 і $W_2(\beta)$ випливає, що, якщо $B_2\leqslant\alpha$ ($\alpha>0$—const), то

$$\int\limits_0^{B}W_2^{-1}(\beta)\,d\beta\leqslant\int\limits_0^{\alpha}W_2^{-1}(\beta)\,d\beta$$

і, таким чином, оцінка (1.9) є функцією верхньої межі розглядуваного інтеграла.

Приймемо, що $\alpha = \alpha(t_0)$ і означимо $W^*(\beta)$ так, щоб на інтервалі $[t_1, t_2]$ виконувались умови $\alpha(t) \geqslant \delta$ $W_2(\beta) \leqslant W^*(\beta)$, де $\delta > 0$ — const і функція $1/W^*(\beta)$ інтегровна. При цьому з теореми 1 випливає, що в області

$$I = \left\{ t : t_1 \leqslant \operatorname{Re} t \leqslant t_2, \; |\operatorname{Im} t| < \bar{\sigma} = \int\limits_0^{\delta} \frac{d\beta}{W^*(\beta)} \right\}$$

аналітичний розв'язок $x_s(t)$ не має особливих точок.

2. Алгоритм рекурентної побудови аналітичних рухів. Означимо тепер величину $\bar{\varrho} \leqslant \sigma^0$, покладемо $w = \varphi(t)$, де $|t - t_0| \leqslant \bar{\varrho}$ і здійснимо в системі (1.1) заміну незалежної змінної t за формулою $t = \varphi^{-1}(w) = L(w)$.

Система (1.1) приймає вигляд

$$\frac{dx_s}{dw} = \Phi_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, w), \tag{2.1}$$

де

$$\Phi_s = \dot{L}(w) X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, L(w)),$$

і її розв'язок буде однозначною аналітичною функцією в крузі $|w| < 1$.

Для фактичної побудови розв'язку $x_s(w)$ системи (2.1) функції $\varphi(t)$ і $L(w)$ вибираються у вигляді [9]

$$\varphi(t) = [e^{\frac{\pi}{2\bar{\varrho}}(t - t_0)} - 1][e^{\frac{\pi}{2\bar{\varrho}}(t - t_0)} + 1]^{-1},$$

$$L(w) = t_0 + \frac{2\bar{\varrho}}{\pi} \ln \frac{1 - w}{1 + w}.$$

Означивши похідні і степені рядів

$$x_s(w) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{sr}(x_s^0) w^r, \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2}$$

у відповідності з деякими результатами статті [10], після простих перетворень одержимо рекурентні співвідношення для обчислення коефіцієнтів $a_{sr}(x_s^0)$ у вигляді

$$a_{s0} = x_s^0, \quad (r + 1) a_{sr+1} = W_{sr}(a_{s\mu}, \Phi) \begin{pmatrix} r = 0, 1, 2, \ldots \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

де W_{sr} — є поліноми відносно всіх своїх аргументів $\mu < r + 1$.

Доведемо збіжність рядів (2.2). Враховуючи властивості функцій X_s і $L(w)$, можна знайти функцію $\Phi^*(x_1, \ldots, x_n, w)$, що має абсолютно збіжне розвинення і таку, що розв'язок системи

$$\frac{d\bar{x}_s}{dw} = w\Phi^*(x_1, \ldots, x_n, w)$$

зображується збіжними рядами

$$\bar{x}_s(w) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x_s^0) w^r, \qquad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Тут

$$A_{r+1} = W^* (A_{s\mu}, \Phi^*), \tag{2.5}$$

де W^* — поліноми такої ж структури, що і W_{rs} в формулах (2.3).

Із співвідношень (2.3) і (2.5) знаходимо:

$$|a_{sr+1}| \leqslant \frac{1}{r+1} |W_{sr}(a_{s\mu}, \Phi)| \leqslant W_{sr}(|a_{s\mu}|, |\Phi|) \leqslant W^* (A_{s\mu}, \Phi^*) = A_{r+1}. \tag{2.6}$$

Тепер, враховуючи, що ряди (2.4) збігаються з (2.6), бачимо, що ряд (2.4) є мажоруючим для рядів (2.2) і, таким чином, ряди (2.2) збігаються.

Формули (2.3) повністю розв'язують питання про інтегрування рівнянь збуреного руху в розглядуваному випадку, бо дають можливість обчислити послідовно коефіцієнти рядів (2.2), що зображують розв'язок системи (1.4), який проходить через точку $x_s^0 (s = 1, 2, \ldots, n)$ в момент $w=0$.

3. Теореми про стійкість аналітичних рухів. Сформулюємо попередньо необхідні надалі означення. Виділимо деякий рух $x_s = q_s(w)$ системи (2.1) і назвемо його незбуреним.

Незбурений рух $q_s(w)$ системи (2.1) чи (1.1) будемо називати аналітичним рухом, якщо він означується степеневим рядом (2.2), область збіжності якого $|w| < 1$ чи $(-\infty < t < +\infty)$.

Якщо ряди (1.4) збігаються при всіх $t \in [0, \infty)$, то відповідний рух будемо називати аналітичним вправо.

Означення 1. Незбурений аналітичний вправо рух стійкий за Ляпуновим, якщо для будь-яких $\varrho > 0$ і $|w_0| < 1$ можна вказати додатну функцію $\delta = \delta(|w_0|, \varrho)$, неперервну по $|w_0|$ таку, що при всякому $\varrho > 0$

$$|x_s - q_s(w)| < \varrho, \quad |w| < 1 \tag{3.1}$$

як тільки

$$|x_s^0 - q_s(w_0)| < \delta. \tag{3.2}$$

Означення 2. Незбурений аналітичний вправо рух стійкий за Ляпуновим відносно частини змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k < n)$, якщо для всякого $\varrho > 0$ і $|w_0| < 1$ всякий розв'язок $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, що задовольняє при $|w_0| < 1$ нерівності

$$|x_j^0 - q_j(w_0| < \delta(|w_0|, \varrho), \tag{3.3}$$

задовольняє при $|w| < 1$ нерівності

$$|x_j - q_j(w)| < \varrho, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Нехай початкові значення x_s^0, вибрані з області (3.2). Обчислимо коефіцієнти $a_{sr}(x_s^0)$ рядів (2.2) за формулами (2.3), і побудуємо визначники

$$\Lambda_{s1} = \begin{vmatrix} \varrho & a_{s0} \\ a_{s0} & \varrho \end{vmatrix}, \qquad \Lambda_{s2} = \begin{vmatrix} \varrho & 0 & a_{s0} & a_{s1} \\ 0 & \varrho & 0 & a_{s0} \\ a_{s0} & 0 & \varrho & 0 \\ a_{s1} & a_{s0} & 0 & \varrho \end{vmatrix}, \ldots \tag{3.4}$$

Визначники (3.4) будемо називати визначниками Шура

Теорема 3. *Аналітичний рух (незбурений) системи* (1.1) *буде стійким тоді і лише тоді, коли*

$$\Lambda_{s1}, \ \Lambda_{s2}, \ \Lambda_{s3}, \ \ldots$$

або всі додатні або при деяких числах p_s мають місце нерівності

$$\Lambda_{s1} > 0, \quad \Lambda_{s2} > 0, \ldots, \Lambda_{sp_s} > 0, \quad \Lambda_{sp_{s+1}} = \Lambda_{sp_{s+2}} = \ldots = 0. \tag{3.5}$$

Побудуємо коефіцієнти a_{sj} рядів (2.2) при початкових значеннях x_j^0 $(j = 1, 2, \ldots, k)$ з області (3.3) і $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in D$.

Теорема 4. *Аналітичний рух (незбурений) системи (1.1) стійкий відносно частини змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$ $(k < n)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\Lambda_{j1}, \Lambda_{j2}, \Lambda_{j3}, \dots \qquad (j = 1, 2, \dots, k)$$

всі додатні або при деяких числах p_j мають місце нерівності

$$\Lambda_{j1} > 0, \quad \Lambda_{j2} > 0, \dots, \Lambda_{jp_j} > 0, \quad \Lambda_{jp_{j+1}} = \Lambda_{jp_{j+2}} = \dots = 0.$$

Твердження теорем 3 і 4 випливає безпосередньо з теореми Шура [11] про збіжність.

Зауваження. Критерій стійкості, сформульований в теоремі 3, аналогічний критерію, застосованому К. Персидським в роботі [12], де побудова коефіцієнтів $a_{sr}(x_s^0)$ здійснювалась за методом Тейлора [13], який має принципову відмінність від алгоритму, викладеного в п. 2.

4. Оцінка області початкових значень, що породжують стійкі аналітичні рухи. Нехай виконуються умови (3.5) і $x_s^0 \in G^0$, $s = 1, 2, \dots, n$, де G^0 — деяка замкнена область в E^n.

Внаслідок того, що $a_{sr} = a_{sr}(x_s^0, t_0)$, залежність $\Lambda_{sr} = \Lambda_{sr}(x_s^0, t_0)$ можна розглядати як параметричну, де x_s^0 і t_0 параметри. Нагадаємо, що саме такий підхід (розгляд параметричної залежності від x_s^0 і t_0) застосував Н. Н. Красовський в [4, стор. 91] при дослідженні асимптотичної стійкості.

Виходячи з загального поняття R-функції [14], побудуємо такі функції від визначників Шура у вигляді:

$$R[\Lambda_{sr_s}(x_s^0, t_0)] = \bigwedge_{s=1}^{n} \Lambda_{sr_s} = (\dots((\Lambda_{1r_1} \wedge_1 \Lambda_{2r_2}) \wedge_1 \Lambda_{3r_3}) \wedge_1 \dots) \wedge_1 \Lambda_{sr_s}, \tag{4.1}$$

де

$$f_s \wedge_1 f_n = f_s + f_n - \sqrt{f_s^2 + f_n^2}.$$

Відзначимо, що зручним правилом врахування всіх визначників Шура при побудові R-функції (4.1) є вказане стрілками в такій таблиці:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{11} \arrow[r] & \Lambda_{12} \arrow[dl] & \Lambda_{13} \arrow[r] & \Lambda_{14} \arrow[dl] & \dots & \Lambda_{1p_1} \\
\Lambda_{21} \arrow[d] & \Lambda_{22} \arrow[ur] & \Lambda_{23} \arrow[dl] & \Lambda_{24} & \dots & \Lambda_{2p_2} \\
\Lambda_{31} \arrow[ur] & \Lambda_{32} \arrow[dl] & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} & \dots & \Lambda_{3p_3} \\
\Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} & \dots & \Lambda_{4p_4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \Lambda_{n3} & \Lambda_{n4} & \dots & \Lambda_{np_n}
\end{tikzcd}$$

Наведемо деякі співвідношення, що мають місце для R-функцій:

$$\begin{aligned}
&\{(x_s^0, t_0) : R[\Lambda_{sr_s}] > 0\} \sim \bigcap_{s=1}^{n} \{(x_s^0, t_0) : \Lambda_{sr_s} > 0\}, \\
&\{(x_s^0, t_0) : R[\Lambda_{sr_s}] < 0\} \sim \bigcup_{s=1}^{n} \{(x_s^0, t_0) : \Lambda_{sr_s} < 0\}, \qquad (4.2) \\
&\{(x_s^0, t_0) : R[\Lambda_{sr_s}] = 0\} \sim \bigcup_{s=1}^{n} \{(x_s^0, t_0) : \Lambda_{sr_s} = 0\}.
\end{aligned}$$

Перше співвідношення з системи (4.2) дозволяє сформулювати таке твердження.

Теорема 5. *Якщо в області $G_0^* \subset G_0$ виконується нерівність*

$$R[\Lambda_{sr_s}(x_s^0, t_0)] > \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 - \text{const}), \tag{4.3}$$

то G_0^* є областю початкових значень (x_s^0, t_0), що породжують стійкі аналітичні рухи системи (1.1).

Таким чином, задача оцінки області G^* початкових значень (x_s^0, t_0), $s = 1, 2, \ldots, n$, зведена до відшукання максимуму функції (4.3) на допустимій множині $G^0 \subset E^n$ і може бути розв'язана чисельно за допомогою методів Гауса — Зейделя, Монте — Карло чи найскорішого спуску.

Зауваження. В тих випадках, коли відшукання максимуму (мінімуму) R-функції не вимагає наявності часткових похідних по Λ_{sr_s}, а також по x_s^0, то у виразі (4.1) операцію $\wedge_1$ можна замінити $\wedge$ операцією, що означається формулою

$$f_s \wedge f_n = \frac{1}{2}(f_s + f_n - |f_s - f_n|).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч. т. II, Изд-во АН СССР, М.— Л., 1956.
2. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, М.— Л., 1952.
3. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, «Наука», М., 1965.
4. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
5. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М., 1947.
6. А. А. Мартынюк, Об одной реализации быстросходящегося итерационного процесса решения дифференциальных уравнений и некоторых применениях, УМЖ, т. 22, № 6, 1970.
7. В. Н. Кублановская, Применение асимптотического продолжения посредством замены переменных в численном анализе, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 53, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1959.
8. Р. Беллман, Метод возмущений в приложении к нелинейной динамике, Механика (сб. переводов), 2(12), 1957.
9. В. И. Зубов, Аналитическая динамика гироскопических систем, «Судостроение» Л., 1970.
10. А. А. Мартынюк, О построении решений систем дифференциальных уравнений в области асимптотической устойчивости, УМЖ, т. 22, № 3, 1970.
11. J. Shur, Über Potenzreihen, die im Jnnern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und anqewandte Mathem., № 147, 1917, 205—232.
12. К. Персидский, К устойчивости движений, Матем. сб., т. 42, № 1, 1935.
13. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
14. В. Л. Рвачев, Геометрические приложения алгебры логики, «Техніка», К., 1967.

Надійшла 21.IV 1969 р., після переробки — 24.III 1971 р.

Інститут математики АН УРСР