УДК 517.544.3:517.947.43:517.947.3

Про асимптотичне інтегрування нелінійної змішаної крайової задачі в частинних похідних

Ю. О. Митропольський, В. Л. Кульчицький

Робота присвячена одержанню асимптотичної (за малим параметром ε) формули для розв'язання нелінійної змішаної крайової задачі в частинних похідних з нестаціонарними граничними умовами на частині границі області. Формула носить рівномірний щодо t характер на інтервалі $[0, T]$.

Розвинення одержано шляхом зведення зазначеної задачі до задачі Коші, яка розглядається в гільбертовому просторі, для звичайного диференціального рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами; при цьому використовуються деякі результати роботи [1], в якій анонсовано застосування до абстрактного еволюційного рівняння, розглянутого в банаховому просторі, методів, розроблених в роботах [2, 3] для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Завдяки розгляду конкретної задачі вдалося звільнитися від ряду припущень, наведених в роботі [1]. Крім того, одержані раніше результати [4] про регулярні властивості розв'язку за просторовими змінними, дозволили одержати теореми, аналогічні теоремам 1.3 [1], але вірні в гільбертовому просторі.

На закінчення вказуються умови, при яких одержане асимптотичне представлення розв'язку абстрактної задачі Коші, буде класичним розв'язком початкової задачі.

Нехай G однозв'язна, обмежена область тривимірного простору з гладкою границею S, що складається з двох поверхонь Γ_1 і Γ_2. Точки області G з координатами (x, y, z) будемо позначати через x_0, а точки поверхні Γ_1 через x_1. Нехай Δ — оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n}$ — похідна по зовнішній нормалі.

Розглянемо в області G рівняння

$$\varepsilon \frac{\partial u(x_0, t, \varepsilon)}{\partial t} = \Delta u(x_0, t, \varepsilon) - c(x_0, t, \varepsilon) u(x_0, t, \varepsilon) + f(t, u, \varepsilon), \quad x_0 \in G, \quad t \in [0, T_1], \tag{1}$$

яке на границі $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ задовольняє умови

$$\varepsilon \frac{\partial u(x_1, t, \varepsilon)}{\partial t} = -\frac{\partial u(x_1, t, \varepsilon)}{\partial n} - \sigma(x_1, t, \varepsilon) u(x_1, t, \varepsilon) + f_1(t, u, \varepsilon), \quad x_1 \in \Gamma_1, \quad t \in [0, T_1]; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma_2. \tag{3}$$

На Γ_1 гранична умова нестаціонарна, тому природно початкову умову задавати у вигляді

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi_0(x, \varepsilon), \quad x \in G \cup \Gamma_1. \tag{4}$$

Тут $c(x_0, t, \varepsilon)$ — дійсна додатна функція, неперервна в $\overline{G} = G \cup S$ при кожному $(t, \varepsilon) \in [0, T_1] \times [0, \varepsilon_0]$, $\sigma(x_1, t, \varepsilon)$ — дійсна додатна функція, яка при кожному $(t, \varepsilon) \in [0, T_1] \times [0, \varepsilon_0]$ визначена і неперервна на Γ_1. $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ — малий параметр.

Задача (1) — (4) зводиться до задачі Коші (див. [5])

$$\varepsilon \frac{dU(\cdot, t, \varepsilon)}{dt} = -A(t, \varepsilon) U(\cdot, t, \varepsilon) + F(t, U, \varepsilon), \; x \in G, \; t \in [0, T_1], \tag{5}$$

$$U(\cdot, 0, \varepsilon) = \varphi_0(x, \varepsilon) \in L^2, \quad x \in G \cup \Gamma_1, \tag{6}$$

розглядуваної в ортогональній сумі гільбертових просторів $L^2 = L_2(G) \oplus L_2(\Gamma_1)$ для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим, самоспряженим додатно визначеним оператором $A(t, \varepsilon)$. Причому, конструкція оператора така, що його область визначення $D(A(t, \varepsilon))$ не залежить від (t, ε), хоча коефіцієнти в рівнянні і граничній умові на Γ_1 залежать від t і ε, тобто $D(A(t, \varepsilon)) \equiv D(A)$.

Тут $F(t, U, \varepsilon) = [f(t, u, \varepsilon), \; f_1(t, u, \varepsilon)]$ і $U(\cdot, t, \varepsilon)$ розглядаються, як функції (t, ε) зі значеннями в L^2.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $c(x_0, t, \varepsilon)$, $\sigma(x_1, t, \varepsilon)$ *додатні для всіх* $t \in [0, T_1]$ *і неперервно диференційовні по* t. *Нехай нелінійний оператор* $F(t, U, \varepsilon)$ *диференційовний по* t *і по* U *(по* U *в розумінні Фреше), причому похідні* $F_t(t, U, \varepsilon)$ *і* $F_U(t, U, \varepsilon)$ *неперервні за сукупністю змінних* t *і* U *і обмежені* $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right.$ *за нормою* L^2, $\frac{\partial F}{\partial U}$ — *за нормою лінійних операторів над* $\left.L^2\right)$, *а* $\varphi_0(x, \varepsilon) \in \in D(A)$. *Тоді на деякому інтервалі* $[0, T] \subset [0, T_1]$ *для кожного фіксованого* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5), (6), *який можна подати у вигляді* $U = [u(x_0, \cdot, \varepsilon),\ u(x_1, \cdot, \varepsilon)]$. *При цьому розв'язок має такі властивості регулярності за просторовими змінними:*

$$u(x_0, \cdot, \varepsilon) \in W_2^2(G, \Gamma_2),\ u(x_0, \cdot, \varepsilon) \in \widetilde{W}_2^{\frac{3}{2}}, (G, \Gamma_1),\ u(x_1, \cdot, \varepsilon) \in W_2^1, (\Gamma_1).$$

Визначення цих просторів див., наприклад, в [4].

Справедливість твердження цієї теореми відносно єдиності розв'язку задачі (5), (6) випливає з першої частини теореми 2 роботи [6], а регулярні властивості розв'язку за просторовими змінними одержано в роботі [4].

Перейдемо тепер до побудови асимптотичної формули для розв'язку задачі (5), (6). Одержане зображення в узагальненому розумінні (в розумінні скалярного добутку) буде задовольняти початкову задачу (1) — (4).

Припустимо, що функції $c(x_0, t, \varepsilon)$ і $\sigma(x_1, t, \varepsilon)$ неперервно диференційовні по t і ε, а $F(t, U, \varepsilon)$ неперервно диференційовна по t і ε і має неперервні похідні Фреше по U. $\varphi_0(x, \varepsilon) \in D(A)$ і має неперервні похідні по ε.

Тоді згідно з теоремою 1, задача (5), (6) має єдиний регулярний розв'язок $U(x, t, \varepsilon)$ для кожного $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, T]$. Цей розв'язок ми хочемо розвинути в ряд Тейлора за малим параметром в околі точки $\varepsilon = 0$. Оскільки формула для розв'язку нам невідома, то безпосередньо одержати коефіцієнти розвинення в ряд неможливо. Оскільки $U(x, t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння (5), то, беручи похідні по ε від рівняння (5) (тим самим ми беремо похідні по ε від $U(x, t, \varepsilon)$), а в результат диференціювання підставляючи $\varepsilon = 0$, одержимо систему рівнянь

$$A(t, 0)\,U_0 = F(t, U_0, 0), \tag{7}$$

$$[A(t, 0) - F_U(t, U_0(\cdot, t), 0)]\,U_n = Q_n(\cdot, t), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

для визначення коефіцієнтів U_n розвинення функції $U(x, t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора, в околі точки $\varepsilon = 0$, де $U_0(\cdot, t) = U(x, t, 0)$, $U_n(\cdot, t) = U_\varepsilon^{(n)}(x, t, 0)$, $Q_n(\cdot, t)$ сума членів, одержаних після диференціювання і підстановки $\varepsilon = 0$, і які не містять в собі $U_\varepsilon^{(n)}(x, t, 0)$. Рівняння (7) одержано підстановкою $\varepsilon = 0$ безпосередньо в рівняння (5).

$$\frac{d\widetilde{U}(\varepsilon\tau, x, \varepsilon)}{d\tau} + A(\varepsilon\tau, \varepsilon)\,\widetilde{U}(\varepsilon\tau, x, \varepsilon) = F(\varepsilon\tau, \widetilde{U}, \varepsilon),\ \widetilde{U}(\cdot, 0, \varepsilon) = \varphi_0(\cdot, \varepsilon). \tag{9}$$

Беручи похідні по ε від (9) і підставляючи в результат $\varepsilon = 0$, одержимо

$$\frac{d\widetilde{U}_0}{d\tau} + A(0, 0)\,\widetilde{U}_0 = F(0, \widetilde{U}, 0)\ \ \widetilde{U}_0(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot, 0), \tag{10}$$

$$\frac{d\widetilde{U}_n}{d\tau} + [A(0, 0) - F_{\widetilde{U}}(0, \widetilde{U}, 0)]\,\widetilde{U}_n = q_n(\cdot, \tau),\ \ \widetilde{U}_n(\cdot, 0) = \varphi_{0n}(\cdot, 0),\ \ n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

— систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $\widetilde{U}_n(\cdot, \tau)$ розвинення функції $\widetilde{U}(\varepsilon\tau, x, \varepsilon)$ в ряд Тейлора в околі точки $\varepsilon = 0$. Тут $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}(0, x, 0)$,

$\widetilde{U}_n = \widetilde{U}_\varepsilon^{(n)}(0, x, 0)$, $q_n(\cdot, \tau)$ — сума членів, одержаних після диференціювання і підстановки $\varepsilon = 0$ і які не містять в собі $\widetilde{U}_\varepsilon^{(n)}(0, x, 0)$, а $\varphi_{0n}(\cdot, 0)$ є коефіцієнтами при ε^n ряду Тейлора в околі $\varepsilon = 0$ для $\varphi_0(\cdot, \varepsilon)$.

За аналогією із звичайними диференціальними рівняннями, якщо задачі (7), (8), (10), (11) мають розв'язки U_n і $\widetilde{U}_n$, ми можемо утворити вирази

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cdot, t)\,\varepsilon^n, \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{U}_n\left(\cdot, \frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^n, \tag{13}$$

розв'язок задачі (5), (6) може бути зображений у вигляді (12) для t, які відмінні від нуля і багато більші від нього, і у вигляді (13) для t в околі нуля.

Для побудови асимптотики рівномірної на всьому розглядуваному проміжку $t \in [0, T]$, треба до розвинень (12), (13) приєднати ще одне розвинення спеціальної форми.

Будемо вважати, що вираз

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cdot, \varepsilon\tau)\,\varepsilon^n \tag{14}$$

формально задовольняє задачу (9). Розвиваючи кожний коефіцієнт $U_n(\cdot, t) = \sum_{r=0}^{\infty} U_{n,r} t^r$ в формальний ряд Тейлора і підставляючи цей вираз в (14), одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(\cdot, \tau)\,\varepsilon^n, \qquad V_n(\cdot, \tau) = \sum_{r=0}^{n} U_{n-r,r}\tau^r, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

В цих позначеннях пропонується така формула для розв'язку

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[U_n(\cdot, t) + \widetilde{U}_n\left(\cdot, \frac{t}{\varepsilon}\right) - V_n\left(\cdot, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^n. \tag{16}$$

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай задача* (7) *має єдиний нескінченно диференційовний розв'язок, для* $t \in [0, T]$ *і* $F_U(t, U_0(\cdot, t), 0) = 0$, *а задача* (10) *має єдиний розв'язок* $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}_0(\cdot, \tau)$, *який існує для* $0 \leqslant \tau < \infty$. *Тоді для достатньо малого* $\|\varphi_0(\cdot, 0) - U_0(\cdot, 0)\|_{L^2}$ *задачі* (7), (8), (10), (11) *можна розв'язати, і для кожного малого* ε *розв'язок задачі* (5), (6) *можна подати у вигляді*

$$U(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[U_n(x, t) + \widetilde{U}_n\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) - V_n\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^p, \tag{17}$$

де U_n, $\widetilde{U}_n$, V_n *можна знайти відповідно із* (7), (8), (10), (11), (14).

Примітка 1. Формулу (17) треба розуміти в тому смислі, що для кожного $N = 1, 2, \ldots$ функція S_N, визначена рівністю

$$\varepsilon^{N+1}S_N = U(x, t, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N}\left[U_n(x, t) + \widetilde{U}_n\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) - V_n\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^n,$$

буде обмежена за нормою L^2 рівномірно щодо t і ε, коли $t \in [0, T]$ і $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Обмеження на $\| \varphi_0(\cdot, 0) - U_0(\cdot, 0) \|_{L^2}$ в теоремі 2 гарантує, що $\| \widetilde{U}_0(\cdot, \tau) - U_0(\cdot, 0) \|_{L^2} \to 0$, при $\tau \to \infty$.

Примітка 2. У функції $Q_n(x, t)$, $q_n(x, \tau)$ входять похідні по t і по ε від розв'язку $U(x, t, \varepsilon)$ в степені n. Наприклад, для $Q_2(x, t)$ одержуємо вираз

$$Q_2(x, t) = -2 \frac{d}{dt} U_\varepsilon^{(1)}(x, t, 0) - 2A_\varepsilon^{(1)}(t, 0) U_\varepsilon^{(1)}(x, t, 0) -$$

$$- A_\varepsilon^{(2)}(t, 0) U(x, t, 0) + F_U^{(2)}(t, U_0, 0) [U_\varepsilon^{(1)}(x, t, 0)]^2 + F_\varepsilon^{(2)}(t, U_0, 0).$$

Оскільки в теоремі 2 ми вимагаємо, щоб $F_U(t, U_0(x, t), 0) = 0$ в точці $\varepsilon = 0$, то члени із степенями похідних пропадають і ці вирази мають смисл в L^2. Із теореми 1 цієї роботи, використовуючи теореми вкладення С. Л Соболєва [7], одержимо, що у випадку тривимірного простору $U(x, t, \varepsilon) \in L^\infty$, $U_\varepsilon^{(n)}(x, t, \varepsilon) \in L^\infty$ і $U_t^{(n)}(x, t, \varepsilon) \in L^\infty$, де $L^\infty = L_\infty(G) \oplus L_\infty(\Gamma_1)$. Таким чином, вирази $Q_n(x, \cdot)$ і $q_n(x, \cdot)$ мають смисл в L^2 і околі точки $\varepsilon = 0$, оскільки похідні по t і по ε від $U(x, t, \varepsilon)$, інтегровані в степені n функції.

Для прикладу нелінійних операторів, які мають неперервні похідні Фреше по U всіх порядків і задовольняють умову $F_U(t, U_0(\cdot, t), 0) = 0$, можна навести оператор-функції $f(\varepsilon, U) = \exp \varepsilon U$ і $f_1(\varepsilon, U) = \varepsilon U^m$ $(m \geqslant 2)$, які діють із $\widetilde{W}_2^{\frac{3}{2}}(G, \Gamma_1)$ в L^2.

На закінчення відзначимо, що коли $F(\cdot, U(x, \cdot, \varepsilon) \varepsilon) \in \widetilde{W}_2^5(G, \Gamma_1)$ $\varphi_0(x, \varepsilon) \in \widetilde{W}_2^5(G, \Gamma_1)$, а S достатньо гладка поверхня, то в силу теореми 1 роботи [6] $U(x, t, \varepsilon) \in C^2(G \cup \Gamma_1)$. Таким чином, одержаний розклад для розв'язку $U(x, t, \varepsilon)$ задачі (5), (6) неперервно диференційовний по t, двічі неперервно диференційовний по x і задовольняє початкову змішану крайову задачу (1)—(4) в класичному розумінні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Frank Hoppensteadt, Cauchy problems involving a small porameter, «Bull. Amer. Math. sos,» 76, № 1, 1970.
2. А. Б. Васильева, Построение равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, Матем. сб., 50(92):1, 1960.
3. А. Б. Васильева, О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, Матем. сб., 48(90), 1959.
4. В. В. Барковский, Смешанные краевые задачи для параболического уравнения, нестационарные на части границы. Труды семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям, вып. 1, Изд. Ин-та матем. АН УССР, К., 1969.
5. В. В. Барковский, В. Л. Кульчицкий, Обобщенные решения некоторых смешанных задач для уравнения Шредингера, Математическая физика и нелинейные колебания, вып. 6, Изд. Ин-та матем. АН УССР, К., 1971.
6. В. Л. Кульчицкий, О гладкости обобщенных решений некоторых краевых задач для уравнения Шредингера, Математическая физика и нелинейные колебания, вып.6, Изд. Ин-та матем. АН УССР, К., 1971.
7. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

Надійшла 30.III 1971 р.

Інститут математики АН УРСР