УДК 517.917

Дослідження стійкості руху в критичному випадку асимптотичним методом нелінійної механіки

Нгуен Ван Дао

В цій роботі асимптотичним методом нелінійної механіки розв'язується питання про стійкість руху в тому критичному випадку, коли характеристичне рівняння системи першого наближення має пару чисто уявних коренів. Цей метод є дуже ефективним при розв'язанні ряду практичних задач.

§ 1. Дослідження стійкості для системи другого порядку. Розглянемо диференціальні рівняння збуреного руху виду

$$\dot{x} = -\lambda y + \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \qquad \dot{y} = \lambda x + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \tag{11}$$

де ε — малий додатний параметр, λ — додатна стала, $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ є голоморфними функціями дійсних змінних x, y, розвинення яких починаються членами не нижче другого порядку:

$$X(x, y, \varepsilon) = X_2(x, y) + \varepsilon X_3(x, y) + \varepsilon^2 X_4(x, y) + \ldots,$$

$$Y(x, y, \varepsilon) = Y_2(x, y) + \varepsilon Y_3(x, y) + \ldots .$$

Тут $X_s(x, y)$, $Y_s(x, y)$ є формами s-го порядку змінних x, y.

Задача про стійкість нульового розв'язку системи (1.1) розв'язується просто. Добре відомо, що при втраті стійкості в розглядуваній системі, яка знаходиться на межі стійкості, проходять розбіжні коливання, близькі до гармонічних. Тому, йдучи за А. Ю. Ішлінським [1], встановлюватимемо відповідність між системою (1.1) і деякою лінійною системою із сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = cx + dy. \tag{1.2}$$

Питання про стійкість незбуреного руху $x = y = 0$ вирішується знаком дійсної частини коренів характеристичного рівняння системи (1.2)

$$\sigma^2 - (a + d)\sigma + ad - bc = 0. \tag{1.3}$$

Для зведення системи (1.1), що знаходиться на межі стійкості, до еквівалентної лінійної системи (1.2), використовуємо припущення про те, що рух поблизу межі стійкості проходить хоча б на протязі одного-двух періодів за законом, близьким до гармонічного:

$$x = r\cos\theta + \varepsilon u_1(r, \theta) + \varepsilon^2 u_2(r, \theta) + \ldots, \qquad y = r\sin\theta + \varepsilon v_1(r, \theta) + \varepsilon^2 v_2(r, \theta) + \ldots, \tag{1.4}$$

де $u_i(r, \theta)$, $v_i(r, \theta)$ — періодичні функції з періодом 2π відносно θ: $u_i(r, \theta + 2\pi) = u_i(r, \theta)$, $v_i(r, \theta + 2\pi) = v_i(r, \theta)$, які не мають першої гармоніки $\sin\theta$, $\cos\theta$, r — стала величина, а функція θ задовольняє рівняння [2]:

$$\dot{\theta} = \lambda + \varepsilon B_1(r) + \varepsilon^2 B_2(r) + \ldots \tag{1.5}$$

Для знаходження невідомих виразів u_i, v_i, A_i, B_i прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε, замінивши в (1.1) x, y їх значеннями (1.4). Маємо

$$\dot{x} = (\lambda + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots)\left(-r\sin\theta + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + \ldots\right),$$

$$\dot{y} = (\lambda + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots)\left(r\cos\theta + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + \ldots\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при першому степені ε в (1.1), одержимо

$$\begin{aligned} -rB_1\sin\theta + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial\theta} &= -\lambda v_1 + X(r\cos\theta,\ r\sin\theta, 0), \\ rB_1\cos\theta + \lambda\frac{\partial v_1}{\partial\theta} &= \lambda u_1 + Y(r\cos\theta,\ r\sin\theta, 0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Припустимо, що мають місце розвинення

$$\begin{aligned} X(r\cos\theta,\ r\sin\theta, 0) &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n\cos n\theta + h_n\sin n\theta), \\ Y(r\cos\theta,\ r\sin\theta, 0) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тоді із (1.6) знаходимо

$$rB_1 = c_1 = -h_1,\ g_1 = d_1 = 0,\ u_1 = \alpha_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{n1}\cos n\theta + \gamma_{n1}\sin n\theta), \tag{1.8}$$

$$v_1 = \alpha_2 + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{n2}\cos n\theta + \gamma_{n2}\sin n\theta), \tag{1.9}$$

де

$$\alpha_1 = -\frac{c_0}{\lambda},\quad \alpha_2 = \frac{g_0}{\lambda},\quad \beta_{n1} = \frac{c_n - nh_n}{\lambda(n^2-1)},\quad \beta_{n2} = \frac{g_n + nc_n}{\lambda(1-n^2)},$$

$$\gamma_{n1} = \frac{c_n - ng_n}{\lambda(n^2-1)},\quad \gamma_{n2} = \frac{h_n - nc_n}{\lambda(1-n^2)}. \tag{1.10}$$

Шляхом лінеаризації правих частин системи (1.1) можна написати

$$\begin{aligned} \varepsilon X(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon X(r\cos\theta + \varepsilon u_1 + \ldots,\ r\sin\theta + \varepsilon v_1 + \ldots, \varepsilon) \approx ax + by, \\ \varepsilon Y(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon Y(r\cos\theta + \varepsilon u_1 + \ldots,\ r\sin\theta + \varepsilon v_1 + \ldots, \varepsilon) \approx cx + dy. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Оскільки у виразах u_i, v_i відсутні праві гармоніки $\sin\theta$, $\cos\theta$, то для визначення сталих a, b, c, d усереднимо обидві частини виразів (1.11) за кутовою змінною θ, помноживши їх послідовно на $\frac{2}{r}\cos\theta$, $\frac{2}{r}\sin\theta$. Маємо

$$a = \frac{\varepsilon}{\pi r}\int_0^{2\pi} X(r\cos\theta + \varepsilon u_1 + \ldots,\ r\sin\theta + \varepsilon v_1 + \ldots, \varepsilon)\cos\theta\, d\theta,$$

$$b = \frac{\varepsilon}{\pi r}\int_0^{2\pi} X(r\cos\theta + \varepsilon u_1 + \ldots,\ r\sin\theta + \varepsilon v_1 + \ldots, \varepsilon)\sin\theta d\theta,$$

(1.12)

$$c=\frac{\varepsilon}{\pi r}\int\limits_0^{2\pi} Y(r\cos\theta+\varepsilon u_1+\dots,\ r\sin\theta+\varepsilon v_1+\dots,\ \varepsilon)\cos\theta d\theta,$$

$$d=\frac{\varepsilon}{\pi r}\int\limits_0^{2\pi} Y(r\cos\theta+\varepsilon u_1+\dots,\ r\sin\theta+\varepsilon v_1+\dots,\ \varepsilon)\sin\theta d\theta.$$

Тепер можемо записати систему (1.1) в такій еквівалентній лінійній формі

$$\begin{aligned}\dot{x}&=ax+(b-\lambda)y,\\ \dot{y}&=(c+\lambda)x+dy.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Умова асимптотичної стійкості руху, що описується системою (1.13), має, як відомо, такий вигляд:

$$a+d<0,\tag{1.14}$$

$$ad-(b-\lambda)(c+\lambda)=\lambda^2+0(\varepsilon)>0.\tag{1.15}$$

При досить малому ε — умова (1.15) завжди виконується. Отже, (1.14) є єдиною умовою асимптотичної стійкості незбуреного руху $x=y=0$. Якщо $a+d>0$, то має місце нестійкість.

Випадок $a+d=0$ — сумнівний. Для розв'язання задачі про стійкість в цьому випадку необхідно виписати в розвиненнях (14) члени більш високого порядку. Проте слід зауважити, що для практичних обчислень слід знати не сам розв'язок системи (1.1), а лише залежну від r і θ форму наближеного стаціонарного розв'язку (як звичайно першого $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ або другого наближення $x=r\cos\theta+\varepsilon u_1$, $y=r\sin\theta+\varepsilon v_1$).

Розглянемо деякі ілюстративні приклади.

Приклад 1. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь [3]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y-\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)x,\\ \dot{y}&=x-\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)y.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Покладаючи тут $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, маємо

$$\dot{x}=-\frac{\alpha}{2}r^2x-y,$$

$$\dot{y}=x-\frac{\alpha}{2}r^2y.$$

Отже, $a+d=-\alpha r^2$ і незбурений рух стійкий при додатному α і нестійкий при від'ємному α.

Приклад 2. Припустимо, що рівняння збуреного руху має вигляд [3]

$$\ddot{x}+x=\alpha\dot{x}f(x,\dot{x}^2)+g(x,\dot{x}^2).\tag{1.17}$$

Покладаючи в правій частині (2.17) $x = r\sin\theta$, $\dot{x} = r\cos\theta$, одержимо $\alpha\dot{x}f \times \times (x, \dot{x}^2) + g(x, \dot{x}^2) \approx A\dot{x} + Bx$, де $A = \frac{1}{\pi r}\int\limits_0^{2\pi} [\alpha\dot{x}f(x, \dot{x}^2 + g(x, \dot{x}^2)] \cos\theta d\theta = = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta, r^2\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta$.

Отже, нульовий розв'язок системи (1.17) асимптотично стійкий, якщо $A = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta, r^2\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta < 0$ і нестійкий, якщо $A > 0$.

Приклад 3. Розглянемо рівняння збуреного руху типу

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \varepsilon\lambda\psi_2\left(\frac{a}{\lambda}\dot{y} - by\right)^2. \tag{1.18}$$

Легко перевірити, що форма розв'язку цього рівняння в першому наближенні $y = r\sin\theta$, $\dot{y} = \lambda r\cos\theta$ не розв'язує задачі про стійкість. Тому запишемо його в другому наближенні [2]:

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta + \varepsilon\lambda\psi_2 r^2(\alpha + \beta\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta), \\ \dot{y} &= \lambda r\cos\theta + 2\varepsilon\lambda^2\psi_2 r^2(-\beta\sin 2\theta + \gamma\cos 2\theta), \end{aligned} \tag{1.19}$$

де $\alpha = \frac{a^2 + b^2}{2\lambda^2}$, $\beta = \frac{b^2 - a^2}{6\lambda^2}$, $\gamma = \frac{ab}{3\lambda^2}$. Підставляючи y, $\dot{y}$ із (1.19) в праву частину рівняння (1.18) та лінеаризуючи його, одержимо

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \varepsilon\lambda\psi_2\{a[r\cos\theta + 2\varepsilon\lambda\psi_2 r^2(-\beta\sin 2\theta + \gamma\cos 2\theta)] -$$

$$- b[r\sin\theta + \varepsilon\lambda\psi_2 r^2(\alpha + \beta\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta)]\}^2 = A\dot{y} + By + \ldots .$$

Тут

$$A = M_\theta\left\{\frac{2\varepsilon}{\lambda r}\lambda\psi_2\left(\frac{a}{\lambda}\dot{y} - by\right)^2\cos\theta\right\} = -\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}r^2 ab(a^2 + b^2)\psi_2^2.$$

Звідси випливає, що при $ab > 0$ незбурений рух стійкий, навпаки, якщо $ab < 0$, то цей рух нестійкий.

§ 2. Стійкість для системи $(n + 2)$-го порядку. Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь збуреного руху виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + \varepsilon X(x, y, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \lambda x + \varepsilon Y(x, y, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon), \\ \dot{x}_s &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + \varepsilon X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

причому коефіцієнти p_{sj} такі, що рівняння

$$\det\|p_{sr} - \sigma\delta_{sr}\| = 0 \tag{2.2}$$

має корені лише з від'ємними дійсними частинами. Функції X, Y, X_s є голоморфними змінних $x, y, x_1, \dots, x_n$, розвинення яких починаються членами не нижче другого порядку

$$X = \sum_i X_2^{(i)}(x, y, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \sum_j X_3^{(j)}(x, y, x_1, \dots x_n) + \varepsilon^2 \dots,$$

$$Y = \sum_k Y_2^{(k)}(x, y, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \sum_l Y_3^{(l)}(x, y, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 \dots,$$

$$X_s = \sum_p X_{s2}^{(p)}(x, y, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \sum_q X_{s3}^{(q)}(x, y, x_1, \dots, x_n) + \dots$$

Тут $X_u^{(i)}$, $Y_u^{(k)}$, $X_{su}^{(p)}$ є формами u-го порядку змінних $x, y, x_1, \dots, x_n$.

Припустимо, що рух поблизу межі стійкості відбувається хоча б на протязі одного-двох періодів за законом, близьким до гармонічного

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta + \varepsilon u_1(r, \theta) + \varepsilon^2 u_2(r, \theta) + \dots, \\ y &= r\sin\theta + \varepsilon v_1(r, \theta) + \varepsilon^2 v_2(r, \theta) + \dots, \\ x_s &= x_s^0 + \varepsilon x_s^{(1)} + \varepsilon^2 x_s^{(2)} + \dots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де, як і в § 1, u_i, v_i є періодичними функціями з періодом 2π щодо θ, r — стала величина, а функція θ задовольняє рівняння типу (1.5) $\dot\theta = \lambda + \varepsilon B_1(r) + \varepsilon^2 B_2(r) + \dots$. Функція $x_s^{(i)}$ є періодичною з періодом 2π щодо θ.

Підставляючи в (2.1) вирази x, y, x_s із (2.3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, знаходимо послідовно невідомі величини u_i, v_i, $x_s^{(i)}$. Маємо

$$\dot x_s^0 = p_{s1}x_1^{(0)} + \dots + p_{sn}x_n^0 + r(p_s\cos\theta + q_s\sin\theta), \tag{2.4}$$

$$\dot x_s^{(1)} = p_{s1}x_1^{(1)} + \dots + p_{sn}x_n^{(1)} + p_s u_1 + q_s v_1 + X_s(r\cos\theta, r\sin\theta, x_1^0, \dots, x_n^0, 0), \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} -rB_1\sin\theta + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial\theta} &= -\lambda v_1 + X(r\cos\theta, r\sin\theta, x_1^0, \dots, x_n^0, 0), \\ rB_1\cos\theta + \lambda\frac{\partial v_1}{\partial\theta} &= \lambda u_1 + Y(r\cos\theta, r\sin\theta, x_1^0, \dots, x_n^0, 0). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Оскільки характеристичне рівняння (2.2) не має коренів виду $\sigma = \pm im\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то система рівнянь (2.4) і (2.5) має єдиний періодичний розв'язок з періодом 2π щодо θ: $x_s^{(i)} = x_s^{(i)}(r, \theta)$. В окремому випадку, коли $p_s = q_s = 0$, система (2.4) має єдиний періодичний розв'язок виду $x_s^0 = 0$.

Аналогічно до § 1 (див. (1.8), (1.9)) із рівнянь (2.6) знаходимо невідомі функції u_1, v_1, B_1. Потім, заміняючи в правих частинах (2.1) x, y, x_s виразами (2.3) і лінеаризуючи їх, одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon X(x(r,\theta), y(r,\theta), x_1(r,\theta), \dots, x_n(r,\theta), \varepsilon) &\approx ax + by, \\ \varepsilon Y(x(r,\theta), y(r,\theta), x_1(r,\theta), \dots, x_n(r,\theta), \varepsilon) &\approx cx + dy, \\ \varepsilon X_s(x(r,\theta), y(r,\theta), x_1(r,\theta), \dots, \varepsilon) &\approx a_s x + b_s y. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Умова асимптотичної стійкості незбуреного руху заключається у від'ємності дійсної частини всіх коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a-\sigma & b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ c+\lambda & d-\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ p_1+a_1 & q_1+b_1 & p_{11}-\sigma & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n+a_n & q_n+b_n & p_{n1} & \cdots & p_{nn}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

еквівалентної (2.1) лінійної системи

$$\dot{x} = ax + (b - \lambda) y,$$

$$\dot{y} = (c + \lambda) x + dy,$$

$$\dot{x}_1 = (p_1 + a_1) x + (q_1 + b_1) y + p_{11} x_1 + \dots + p_{1n} x_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{x}_n = (p_n + a_n) x + (q_n + b_n) y + p_{n1} x_1 + \dots + p_{nn} x_n.$$

Характеристичне рівняння (2.8) розпадається на два рівняння

$$\begin{vmatrix} a - \sigma & b - \lambda \\ c + \lambda & d - \sigma \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.9)$$

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \sigma & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Оскільки за припущенням всі корені рівняння (2.10) мають від'ємну дійсну частину, то, як і в § 1, умова асимптотичної стійкості незбуреного руху $x = y = x_s = 0$ при досить малому ε має вид

$$a + d < 0. \qquad (2.11)$$

Розглянемо тепер більш детально окремий випадок, який звичайно зустрічається в застосуваннях, коли $p_s = q_s = 0$. Як зазначалось вище, в згаданому випадку система рівнянь (2.4) має єдиний періодичний розв'язок з періодом 2π виду $x_s^0 = 0$ і рівняння для $x_s^{(1)}$ наберуть вигляду

$$\dot{x}_s^{(1)} = p_{s1} x_1^{(1)} + \dots + p_{sn} x_n^{(1)} + X_s (r \cos\theta, r \sin\theta, 0, \dots, 0, 0). \qquad (2.12)$$

Отже, якщо задача про стійкість досліджуваної системи розв'язується формою лише першого або другого наближення стаціонарного розв'язку, то можна запропонувати таку просту схему.

1°. Написати залежну від r і θ форму наближеного стаціонарного періодичного розв'язку з періодом 2π щодо θ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \text{ або } x = r\cos\theta + \varepsilon u_1, \quad y = r\sin\theta + \varepsilon v_1, \qquad (2.13)$$

системи (див. 2.6):

$$\dot{x} = -\lambda y + \varepsilon X (x, y, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\dot{y} = \lambda x + \varepsilon Y (x, y, 0, \dots, 0, 0). \qquad (2.14)$$

2°. Знайти наближений періодичний розв'язок з періодом 2π щодо θ

$$x_s = x_s (r, \theta). \qquad (2.15)$$

системи (див. (2.12))

$$\dot{x}_s = p_{s1} x_1 + \dots + p_{sn} x_n + \varepsilon X_s (r\cos\theta, r\sin\theta, 0, \dots, 0, 0). \qquad (2.16)$$

3°. Підставляючи вирази x, y, x_s із (2.13), (2.15) в праву частину системи:

$$\dot{x} = -\lambda y + \varepsilon X (x, y, x_1, \dots, x_n, \varepsilon), \qquad (2.17)$$

$$\dot{y} = \lambda x + \varepsilon Y (x, y, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$$

та лінеаризуючи його праві частини, одержимо

$$\dot{x} = ax + (b - \lambda) y,$$

$$\dot{y} = (c + \lambda) x + dy.$$

Умова стійкості незбуреного руху $x = y = x_s = 0$ набуває виду $a + d < 0$.

Приклад 4. Дослідимо стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon \alpha x \mathfrak{Z}, \\ \dot{y} &= x + \varepsilon \alpha y \mathfrak{Z}, \\ \dot{\mathfrak{Z}} &= -\mathfrak{Z} + \varepsilon (x^2 + y^2) + \varepsilon^2 f(x, y, \mathfrak{Z}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.18}$$

де розвинення функції $f(x, y, \mathfrak{Z}, \varepsilon)$ починається з членів не нижче третього порядку.

В розглядуваному випадку $p_s = q_s = 0$ і легко перевірити, що задача про стійкість для системи (2,18) розв'язується формою першого наближення (2,13) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Рівняння (2.16) тепер мають простий вигляд: $\dot{\mathfrak{Z}} = -\mathfrak{Z} + r^2$. Звідси одержимо $\mathfrak{Z} = r^2 = \mathrm{const}$. Підставляючи це значення в праві частини рівнянь (2.18), знаходимо

$$\dot{x} = \alpha r^2 x - y,$$

$$\dot{y} = x + \alpha r^2 y,$$

$$a + d = 2\alpha r^2.$$

Отже, нульовий розв'язок системи (2.18) асимптотично стійкий, якщо $\alpha < 0$, і нестійкий, якщо $\alpha > 0$.

Приклад 5. Розглянемо задачу А. І. Лур'є про стійкість системи автоматичного регулювання. Рівняння збуреного руху такої системи набирають виду [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + \varepsilon \psi_2 \sigma^2 + \varepsilon^2 \psi_3 \sigma^3 + \dots, \\ \dot{y} &= \lambda x, \\ \dot{x}_s &= \varrho_s x_s + \varepsilon \psi_2 \sigma^2 + \varepsilon^2 \psi_3 \sigma^3 + \dots, \\ \sigma &= ax - by + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n. \end{aligned} \tag{2.19}$$

В цьому випадку $p_s = q_s = 0$. Розглянемо рівняння (2.14)

$$\dot{x} = -\lambda y + \varepsilon \psi_2 (ax - by)^2, \qquad \dot{y} = \lambda x.$$

Їх розв'язком у другому наближенні буде (див. приклад 3)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta + 2\varepsilon \lambda \psi_2 r^2 (-\beta \sin 2\theta + \gamma \cos 2\theta), \\ y &= r \sin \theta + \varepsilon \lambda \psi_2 r^2 (\alpha + \beta \cos 2\theta + \gamma \sin 2\theta). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Рівняння (2.16) набирають вигляду

$$\dot{x}_s = \varrho_s x_s + \varepsilon \psi_2 r^2 (a \cos \theta - b \sin \theta)^2.$$

Періодичний розв'язок цієї системи буде

$$x_s = \varepsilon r^2 \psi_2 (\alpha_s + \beta_s \cos 2\theta + \gamma_s \sin 2\theta),$$

де $\alpha_s = -\dfrac{\alpha}{\varrho_s}$, $\beta_s = -\dfrac{2\gamma\lambda + \beta\varrho_s}{4\lambda^2 + \varrho_s^2}$, $\gamma_s = \dfrac{2\beta\lambda - \gamma\varrho_s}{4\lambda^2 + \varrho_s^2}$. Отже,

$$\sigma = a\,[r\cos\theta + 2\varepsilon\lambda\psi_2 r^2(-\beta\sin 2\theta + \gamma\cos 2\theta)] - b\,[r\sin\theta + \\ + \varepsilon\lambda\psi_2 r^2(\alpha + \beta\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta)] + \varepsilon r^2(\alpha_s^* + \beta_s^*\cos 2\theta + \gamma_s^*\sin 2\theta). \quad (2.21)$$

Тут позначено

$$\alpha_s^* = \sum_{s=1}^{n} a_s\alpha_s\psi_2 = -\frac{a^2+b^2}{2}\psi_2 s_1, \qquad s_1 = \sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{\varrho_s},$$

$$\beta_s^* = \sum_{s=1}^{n} a_s\beta_s\psi_2 = 2\lambda ab\psi_2 s_2 - \frac{1}{2}(a^2-b^2)\psi_2 s_3, \quad s_2 = \sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{4\lambda^2+\varrho_s^2},$$

$$\gamma_s^* = \sum_{s=1}^{n} a_s\gamma_s\psi_2 = \lambda(a^2-b^2)\psi_2 s_2 + ab\psi_2 s_3, \qquad s_3 = \sum_{s=1}^{n}\frac{a_s\varrho_s}{4\lambda^2+\varrho_s^2}.$$

Рівняння (2.17) тепер мають форму $\ddot{y} + \lambda^2 y = \lambda\,[\varepsilon\psi_2\sigma^2 + \varepsilon^2\psi_3\sigma^3 + \ldots] = A\dot{y} + By + \ldots$ Підставляючи сюди значення σ, $\dot{y}$ з (2.20), (2.21) та усереднюючи обидві частини за змінною θ, помноживши на $\dfrac{2}{\lambda r}\cos\theta$, знаходимо

$$A = r^2\left[-\frac{\varepsilon ab}{2\lambda}(a^2+b^2)\psi_2 + \varepsilon(2a\alpha^* + a\beta^* - b\gamma^*)\psi_2 + \frac{3\varepsilon^2}{4}a(a^2+b^2)\psi_3\right].$$

Отже, нульовий розв'язок $x = y = x_s = 0$ системи (2.19) асимптотично стійкий, якщо $A < 0$, і нестійкий, якщо $A > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Ю. Ишлинский, Механика гироскопических систем, Изд-во АН СССР, М., 1963.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, М., 1955.
4. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, «Наука», М., 1966.

Надійшла 24.VIII 1970 р.

Ханойський політехнічний інститут