УДК 517.93

Построение некоторых решений обобщенной задачи Коши для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

В. Г. Писаренко

1. Рассмотрим обыкновенное автономное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2x(t)=gf(g,x(t)), \tag{1}$$

где $\omega_0=\overline{\omega}_0$; $f(g,z)$ — аналитическая функция аргумента g в некоторой комплексной окрестности $G=(g\,\|\,|g|<g_0)$ точки $g=0$ с полиномиальными по z коэффициентами в разложении в ряд по g:

$$f(g,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}\sum_{l=2}^{n_k}d_{kl}z^l,$$

где $d_{kl}=\overline{d}_{kl}$, $\max\limits_{\substack{0\leqslant k<\infty\\ 2\leqslant l\leqslant n_k}}|d_{kl}|=d_0<\infty$, $\max\limits_{0\leqslant k<\infty}n_k=n<\infty$.

Предположим, что для заданного малого $g_1>0$ существует такое число $B(g_1,\omega_0)$, что в области фазовой плоскости

$$R_{g_1}=(x,\dot{x}\,\|\,|x|+\frac{|\dot{x}|}{\omega_0}\leqslant B(g_1,\omega_0)) \tag{2}$$

все фазовые траектории для уравнения (1) при $-g_1\leqslant g\leqslant g_1$ имеют вид циклов, охватывающих начало координат $x=\dot{x}=0$.

Рассмотрим сначала задачу Коши для линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+a^2u(t)=F(t), \tag{3}$$

$$u(t_0+0)=u_0,\quad u'(t_0+0)=u_1,$$

где $F\in C[0,\infty)$. Продолжим решение $u(t)$ этой задачи и функцию $F(t)$ нулем при $t<t_0\,(t>t_0)$, продолженные функции обозначим через $\tilde{u}$ и $\tilde{F}$ ($\tilde{\tilde{u}}$ и $\tilde{\tilde{F}}$) соответственно. Функции $\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}}$, $\tilde{F}$ и $\tilde{\tilde{F}}$ являются обобщенными функциями из пространства $D'(R) = D'$, сопряженного с пространством всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $D(R) \equiv D$, и удовлетворяют в D' уравнениям [1]:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + a^2\tilde{u} = \tilde{F}(t) + u_0\delta'(t - t_0) + u_1\delta(t - t_0), \tag{4}$$

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}}{dt^2} + a^2\tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{F}}(t) - u_0\delta'(t - t_0) - u_1\delta(t - t_0). \tag{5}$$

Определение 1. Обобщенной задачей Коши вправо (влево) от точки t_0 для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (3) с источником $f \in D'$ и начальными (конечными) возмущениями u_0 и u_1 назовем задачу о нахождении обобщенной функции $\tilde{u} \in D'$ ($\tilde{\tilde{u}} \in D'$), обращающейся в нуль при $t < t_0$ ($t > t_0$) и удовлетворяющей уравнению (4) (уравнению (5)).

Определение 2. Обобщенной задачей Коши вправо (влево) от точки t_0 для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (1) с начальными (конечными) возмущениями u_0 и u_1 назовем задачу о нахождении обобщенной функции $\tilde{y} \in D'$ ($\tilde{\tilde{y}} \in D'$), для которой определена в D' обобщенная функция $f(g, \tilde{y})$ ($f(g, \tilde{\tilde{y}})$), обращающейся в нуль при $t < t_0$ ($t > t_0$) и удовлетворяющей в D' уравнению (6) (уравнению (7)):

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y} - gf(g, \tilde{y}) = u_0\delta'(t - t_0) + u_1\delta(t - t_0), \tag{6}$$

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{y}}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{\tilde{y}} - gf(g, \tilde{\tilde{y}}) = -u_0\delta'(t - t_0) - u_1\delta(t - t_0). \tag{7}$$

Определение 3. Запаздывающей функцией Грина $G^{\text{ret}}(t)$ для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (1) будем называть обобщенную функцию из D', обращающуюся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющую в D' уравнению

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) - gf(g, z(t)) = \delta(t). \tag{6a}$$

Определение 4. Опережающей функцией Грина $G^{\text{adv}}(t)$ для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (1) будем называть обобщенную функцию из D', обращающуюся в нуль при $t > 0$ и удовлетворяющую в D' уравнению (6а).

Рассмотрим теперь уравнение (6).

Множество решений уравнения (6) в D', вообще говоря, не совпадает с $x(t)\theta(t - t_0)$, где $x(t)$ — вещественное решение уравнений (1) с начальными условиями

$$x(t_0 + 0) = u_0 = \bar{u}_0, \quad \dot{x}(t_0 + 0) = u_1 = \bar{u}_1, \tag{8}$$

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \tag{8a}$$

Ниже построим решение обобщенной задачи Коши вправо от точки t_0 для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (1) с начальными возмущениями u_0, u_1, принадлежащее множеству $D'_>$*, периодическое по t при $t > t_0$; такое решение существует и является единственным при условиях теоремы 1.

Прежде чем сформулировать теорему 1, сделаем в (6) замену переменного и искомой функции:

$$t = \frac{\tau}{\omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k B_k}, \tag{9}$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}\left(\frac{\tau}{\omega_0 + \Sigma g^k B_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k \tilde{y}_k(\tau) \tag{10}$$

$$\tilde{\tilde{y}}(t) = \tilde{\tilde{y}}\left(\frac{\tau}{\omega_0 + \Sigma g^k B_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k \tilde{\tilde{y}}_k(\tau). \tag{10a}$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (6) *функция* $f(g, z)$ *обладает следующими свойствами*:

1) *функция* $f(g, z)$ *является аналитической функцией аргумента* g *в некоторой комплексной окрестности* $G = (g \| |g| < g_0)$ *точки* $g = 0$ *с полиномиальными коэффициентами в разложении в ряд по* g:

$$f(g, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} z^l, \tag{11}$$

где $\max\limits_{\substack{0 \leqslant k < \infty \\ 2 \leqslant l \leqslant n_k}} |d_{kl}| = d_0 < \infty$, $d_{kl} = \bar{d}_{kl}$, $\max\limits_{0 \leqslant k < \infty} n_k = n < \infty$;

2) *функция* $f(g, z)$ *такова, что для любого заданного* $g_1 < g_2 < g_0$ *можно указать вещественную постоянную* $B(g_1, \omega_0)$ *такую, что в области фазовой плоскости*

$$R_{g_1} = \left(x, \dot{x} \| |x| + \frac{|\dot{x}|}{\omega_0} \leqslant B(g_1, \omega_0)\right)$$

все фазовые траектории уравнения (1) *для* $g \in [-g_1, g_1]$ *имеют вид циклов, охватывающих начало координат* $x = \dot{x} = 0$.

Пусть, кроме того, функции $u_0(g)$, $u_1(g)$ *— аналитические функции переменного* g *в области* $|g| < g_1$, *так что сходятся ряды*

$$u_0(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k a_k, \quad u_1(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k b_k, \quad a_k = \bar{a}_k, \quad b_k = \bar{b}_k, \tag{12}$$

и пусть также

$$(u_0(g),\ u_1(g)) \in R_{g_1}, \quad g \in [-g_1, g_1].$$

---

* Под $D'_>$ будем понимать множество всех тех обобщенных функций из D', которые имеют ограниченный слева носитель:

$$D'_> = (f \| \operatorname{supp} f \subset (c_f, \infty),\ c_f > -\infty,\ f \in D').$$

Под $D'_>$ будем понимать множество всех тех обобщенных функций из D', которые имеют ограниченный справа носитель:

$$D'_< = (f \| \operatorname{supp} f \subset (-\infty, c_f),\ c_f < \infty,\ f \in D').$$

Тогда решение уравнения (6) *с начальными возмущениями* (12), *принадлежащее множеству* $D'_>$, *периодическое по* t *при* $t > t_0$ *такое, для которого все произведения коэффициентов ряда* (10) $(\tilde{y}_{p_1})^{l_1} \ldots (\tilde{y}_{p_r})^{l_r}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$; $p_j = 0, 1, 2, \ldots$; $1 \leqslant j \leqslant r$, $l_1 + \ldots + l_r \leqslant n$, $0 \leqslant l_j$ — *натуральные числа, определены в* D' *как обобщенные функции, существует; это решение единственно в* $D'_>$ *и может быть получено в виде ряда* (10) *как сумма периодических по* t *при* $t > t_0$ *решений из* $D'_>$ *последовательности обобщенных задач Коши вправо от точки* t_0 *для уравнений, получаемых формально подстановкой выражений* (9), (10), (11), (12) *в уравнение* (6) *и приравниванием членов при одинаковых степенях* g. *Построенное решение непрерывно зависит от начальных возмущений* u_0, u_1 *в смысле слабой топологии в* D'.

При доказательстве теоремы 1 используется теорема о единственности решения уравнения (4) в множестве $D'_>$ (см. [1, § 10, п. 3, теорема]).

Замечание 1. Построенное в теореме 1 обобщенное решение при $t > t_0$ совпадает с решением уравнения (1) с начальными условиями (8), (12), единственным при условиях теоремы 1.

С помощью метода последовательных приближений устанавливаем, что это решение уравнения (1) с начальными условиями (8), (12) аналитически продолжается по g во весь круг $|g| < g_1$ в плоскости комплексного переменного g для достаточно малых g_1.

Следствие 1. *При* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ *теорема 1 дает запаздывающую функцию Грина для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения* (1). *При* $0 < t = \mathrm{const}$ *эта запаздывающая функция Грина аналитически продолжается по переменному* g *во весь круг* $|g| < g_1$ *для достаточно малых* g_1.

Для уравнения (7) доказывается следующая теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.

Тогда решение уравнения (7) *с начальными возмущениями* (12), *принадлежащее множеству* $D'_<$, *периодическое по* t *при* $t > t_0$ *такое, для которого все произведения коэффициентов ряда* (10а): $(\tilde{\tilde{y}}_{p_1})^{l_1} \ldots (\tilde{\tilde{y}}_{p_r})^{l_r}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$; $p_j = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leqslant j \leqslant r$; $l_1 + \ldots + l_r \leqslant n, 0 \leqslant l_j$ — *натуральные числа, определены в* D' *как обобщенные функции, существует; это решение единственно и может быть получено в виде ряда* (10а) *как сумма периодических по* t *при* $t < t_0$ *решений из* $D'_<$ *последовательности обобщенных задач Коши влево от точки* t_0 *для уравнений, получаемых формально подстановкой выражений* (9), (10а), (11), (12) *в уравнение* (7) *и приравниванием членов при одинаковых степенях* g.

Построенное решение непрерывно зависит от начальных возмущений u_0, u_1 *в смысле слабой топологии в* D'.

Замечание 2. Построенное в теореме 2 обобщенное решение при $t < t_0$ совпадает с решением уравнения (1) с конечными условиями

$$x(t_0 - 0) = u_0(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^k, \qquad \dot{x}(t_0 - 0) = u_1(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k g^k \tag{13}$$

и с продолженным на всю ось $t \in (-\infty, \infty)$ решением уравнения (1) с начальными условиями (8), (12), единственным при условиях теоремы 2. Из замечания 1 при этом заключаем, что это решение допускает аналитическое продолжение по g во весь круг $|g| < g_1$ в плоскости комплексного переменного g для достаточно малых g_1.

Следствие 2. *При* $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ *теорема 2 дает опережающую функцию Грина для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения* (1).

При $0 > t = \text{const}$ *эта опережающая функция Грина допускает аналитическое продолжение по переменному* g *во весь круг* $|g| < g_1$ *для достаточно малых* g_1.

Следствие 3. *Имеется целое семейство периодических решений уравнения* (1) *с периодами* $T_i(g) = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + g\beta_j(g))$, *обращающихся при* $g = 0$ *в решение* $x_0(t) = c_0 \cos \omega_0 t + \frac{d_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ *порождающего уравнения* $\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = 0$; *каждое решение из этого семейства является решением задачи Коши для уравнения* (1) *с начальными условиями вида* (12):

$$x(t_0 + 0) = u_0^{(j)}(g) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k a_k^{(j)}, \qquad \dot{x}(t_0 + 0) = u_1^{(j)}(g) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k b_k^{(j)}. \tag{14}$$

2. Пример. Построим запаздывающую и опережающую функции Грина для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) - g x^3(t) = 0. \tag{15}$$

Обобщенная задача Коши вправо от точки $t_0 = 0$ для уравнения (15) с начальными возмущениями $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ приводит к уравнению в D':

$$\frac{d^2 \tilde{y}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{y}(t) - g\tilde{y}^3(t) = \delta(t). \tag{16}$$

Очевидно, указанное уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы 1, если в качестве постоянных g_1, $B(g_1, \omega_0)$, фигурирующих в условии (2), взять

$$0 < g_1 < \frac{\omega_0^4}{2}, \tag{17}$$

$$B(g_1, \omega_0) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2g_1}}. \tag{18}$$

Из теоремы 1 и следствия 1 получаем запаздывающую функцию Грина $G^{\text{ret}}(t)$ для уравнения (15). Эта запаздывающая функция Грина с точностью до членов порядка $0(g^2)$ имеет вид:

$$G^{\text{ret}}(t) = \theta(t)\left[\frac{1}{\omega_0}\sin\psi_1(t) + \frac{g}{32\omega_0^5}\sin 3\psi_1(t) + \frac{9g}{32\omega_0^5}\sin\psi_1(t) + 0(g^2)\right], \tag{19}$$

где $\psi_1(t) = \left[\omega_0 - \frac{3g}{8\omega_0^3} + 0(g^2)\right] t$.

Весь ряд по g для функции $G^{\text{ret}}(t)$ в силу теоремы 1 и следствия 1 дает аналитическую в области $|g| < g_1 < \frac{\omega_0^4}{2}$ функцию от g при $0 < t = \text{const}$ для достаточно малых g_1.

Обобщенная задача Коши влево от точки $t_0 = 0$ для уравнения (15) с начальными возмущениями $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ приводит к уравнению (16) в D'. Выбирая постоянные g_1 и $B(g_1, \omega_0)$ в соответствии с неравенствами (17), (18), из теоремы 2 и следствия 2 получаем опережающую функцию Грина

$G^{\mathrm{adv}}(t)$ для уравнения (15). Эга опережающая функция Грина с точностью до членов порядка $0(g^2)$ имеет вид

$$G^{\mathrm{adv}}(t) = -\theta(-t)\left[\frac{1}{\omega_0}\sin\psi_1(t) + \frac{g}{32\omega_0^5}\sin 3\psi_1(t) + \frac{9g}{32\omega_0^5}\sin\psi_1(t) + 0(g^2)\right], \tag{20}$$

где $\psi_1(t) = \left[\omega_0 - \dfrac{3g}{8\omega_0^3} + 0(g^2)\right]t$.

Обозначая через $x_{[u_0,u_1]}(t)$ обычное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (15) с начальными условиями (8), получаем таким образом с точностью до $0(g^2)$

$$G^{\mathrm{adv}}(t) = -x_{[0,1]}(t) + G^{\mathrm{ret}}(t) + 0(g^2) \tag{21}$$

как следствие того, что

$$x_{[0,1]}(t) = x_{[0,-1]}(-t) + 0(g^2). \tag{22}$$

Для общего вида функции $gf(g, z)$, удовлетворяющей условиям теорем 1 и 2, соотношения (21) и (22), вообще говоря, не будут выполняться.

3. Обобщенные решения из теоремы 1 удобно использовать при построении решений задачи Коши для обыкновенных неоднородных нелинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Так, рассмотрим задачу об отыскании решения при $t > t_0$ уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) - gf(g, x(t)) = F(t) \tag{23}$$

с начальными условиями (8):

$$x(t_0+0) = u_0, \qquad \dot{x}(t_0+0) = u_1,$$

где $f(g, z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а «функция» $F(t)$ равна нулю при всех $t > t_0$, кроме конечного числа точек $t = t_j > t_0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, p$; в моменты $t = t_j$ «функция» $F(t)$ принимает такие значения, которые обеспечивают заданные конечные скачки производной от решения $x(t)$ уравнения (23):

$$\begin{aligned}
&x(t+0) - x(t-0) = 0, && \text{если } t > t_0;\\
&\dot{x}(t+0) - \dot{x}(t-0) = 0, && \text{если } t > t_0,\ t \neq t_j;\\
&\dot{x}(t_j+0) - \dot{x}(t_j-0) = \alpha_j \neq 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots, p.
\end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, что определенная таким образом «функция» $F(t)$ не является функцией в обычном смысле. Но $F(t)$ может быть определена как обобщенная функция над пространством D всех финитных бесконечно дифференцируемых функций:

$$F(t) = \sum_{j=1}^{p} \delta(t - t_j)\,\alpha_j \in D'.$$

Для построения решения задачи (23), (8), (24) разобьем полуось $t > t_0$ точками $t = t_1, \ldots, t_p$ на отрезки $A_1, A_2, \ldots, A_p$, где

$$A_j = (t \,\|\, t_{j-1} < t < t_j),\ j = 1, 2, \ldots, p,$$

$$A_{p+1} = (t \,\|\, t > t_p). \tag{25}$$

Рассмотрим в фазовой плоскости замкнутую относительно нормы двумерного евклидовского пространства связную область H_{g_1}, содержащую ıчало координат $\{0\}$ и целиком лежащую в области R_{g_1}, определенной ›рмулой (2):

$$\{0\} \in H_{g_1} = \overline{H}_{g_1} \subset R_{g_1}. \tag{26}$$

Обозначим через $c(x_0, \dot{x}_0)$ цикл, проходящий через точку $(x_0, \dot{x}_0)$ фазо-›й плоскости.

Определим в фазовой плоскости замкнутые связные области $K_j(g_1)$, $_j(g_1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, p$, с помощью формул:

$$K_j(g_1) = (x, \dot{x} \,\|\, |\dot{x} - \xi| \leqslant |\alpha_j|, (x, \xi) \in \hat{K}_{j-1}(g_1)), \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\hat{K}_j(g_1) = \bigcup_{(x,\dot{x}) \in K_j(g_1)} c(x, x),$$

$$K_0(g_1) \equiv H_{g_1} \subset R_{g_1}, \quad \hat{K}_j(g_1) \subset R_{g_1}.$$

При этом получаем

$$I_{g_1} \equiv K_0(g_1) \subset \hat{K}_0(g_1) \subset K_1(g_1) \subset \hat{K}_1(g_1) \subset \ldots \subset K_p(g_1) \subset \hat{K}_p(g_1) \subset R_{g_1}. \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть для функции $f(g, z)$ в уравнении* (23) *выполнены ›е условия теоремы* 1 *и пусть заданы p вещественных постоянных $\alpha_1, \ldots$ .., α_p таких, что для всякого фиксированного $g_1 < g_2 < g_0$ справедливо* ›8) *для областей $K_j(g_1)$ и $\hat{K}_j(g_1)$, определенных по формулам* (27).

Тогда решение уравнения (23) *с начальными условиями* (8), (12) *и с* ›*равой частью $F(t)$, обеспечивающей условия* (24), *на интервале $t \in (t_{j-1},$ $) = A_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, p + 1$, существует, единственно и совпадает на* ›*том интервале с решением из множества $D'_{>}$ уравнения*

$$\frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y}(t) - gf(g, \tilde{y}(t)) = u_{0,j-1}\frac{d\delta(t - t_{j-1})}{dt} + (u_{1,j-1} + \alpha_{j-1})\delta(t - t_{j-1}) \tag{29}$$

›*динственным в $D'_{>}$ и даваемым теоремой* 1; *при этом $u_{0,j-1}$, $u_{1,j-1}$—зна-*›*ния решения из $D'_{>}$ уравнения*

$$\frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y}(t) - gf(g, \tilde{y}(t)) = u_{0,j-2}\frac{d\delta(t - t_{j-2})}{dt} +$$
$$+ (u_{1,j-2} + \alpha_{j-2})\,\delta(t - t_{j-2}) \tag{30}$$

ı *его первой производной по t в точке $t = t_{j=1} - 0$, а $u_{0,0} = u_0$; $u_{0,1} = u_1$,* $_{p+1} = \infty$, $\alpha_0 = 0$.

Отметим, что вытекающий из теорем 1 и 2 метод построения решения ıадачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (1) с на-ıальными условиями (8), (12) с помощью решения обобщенной задачи Коши близок к методу неопределенных коэффициентов, изложенному, ıапример, в монографии [2], но дает более простой алгоритм для построе-ıия решения.

Напомним, что вопросы обоснования метода усреднения для нелиней-ıых уравнений типа (23) с разрывной правой частью специфического вида ›ассматривались в ряде работ ([3], см. также библиографию в [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1967.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. А. М. Самойленко, К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.

Поступила 1.II 1971 г.

Институт математики АН УССР