УДК 519.21

Про одне зображення багатовимірної нормальної функції розподілу

В. В. Позняков

Розглянемо багатовимірну нормовану нормальну функцію розподілу випадкового вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$F_n(t_t, r_{ij}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\sqrt{\Delta_{1,2,\ldots,n}}} \int\limits_{-\infty}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2}\cdots\int\limits_{-\infty}^{t_n} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta_{1,2,\ldots,n}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i,j=1}\Delta^{ij}u_iu_j\right\} du_1du_2\ldots du_n, \qquad (1)$$

де $\Delta_{1,2,\ldots,n}$ — визначник корреляційної матриці вектора $(x_1x_2\ldots x_n)$; Δ^{ij} — алгебраїчне доповнення елемента r_{ij} в корреляційній матриці вектора $(x_1x_2\ldots x_n)$.

Вираз (1) можна розглядати як функцію коефіцієнтів корреляції, і очевидно, що перші частинні похідні (1) по r_{ij} існують. При $n=2$ [1]

$$\frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_{pq}^2}} \exp\left\{-\frac{t_p^2 - 2r_{pq}t_pt_q + t_q^2}{2(1-r_{pq}^2)}\right\}, \qquad (2)$$

$$F_2(t_p, t_q, r_{pq}) = F_1(t_p)F_1(t_q) + \int_0^{r_{pq}} \frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} dr_{pq}.$$

Про довільному «n» має місце таке узагальнення виразу (2).

Л е м а. *Похідна n-вимірної нормованої нормальної функції розподілу за коефіцієнтом корреляції при $n \geqslant 3$ дорівнює:*

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} = \frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} F_{n-2}(t_i^{pq}, r_{ij}^{pq}), \quad i, j \neq p, q, \qquad (3)$$

де

$$t_i^{pq} = \frac{\Delta_{pqi}(t_pt_qt_i)}{\sqrt{\Delta_{pqi}\Delta_{pq}}}; \quad r_{ij}^{pq} = \frac{R_{pqij}}{\sqrt{\Delta_{pqij}\Delta_{pq} + R_{pqij}^2}}, \qquad (4)$$

$$R_{pqij} = r_{ij}(1-r_{pq}^2) - r_{pi}r_{pj} - r_{qi}r_{qj} + r_{pq}(r_{pi}r_{qj} + r_{qi}r_{pj});$$

r_{pq} — коефіцієнт корреляції з фіксованими p і q; F_{n-2} — $(n-2)$-вимірна нормована нормальна функція розподілу t_i^{pq}, r_{ij}^{pq} — нові границі інтегрування і коефіцієнта корреляції, що відповідають похідній по r_{pq}; $\Delta_{pq}\Delta_{pqi}$; Δ_{pqij} — визначники корреляційних матриць векторів відповідно (x_p, x_q), (x_p, x_q, x_i), (x_p, x_q, x_i, x_j); $\Delta_{pqj}(t_p, t_q, t_i)$ — визначник матриці, яка одержується з корреляційної матриці вектора (x_p, x_q, x_i) заміною останнього третього рядка рядком (t_p, t_q, t_i).

Доведення проведемо за індукцією, починаючи з $n = 3$. Нехай (x_p, x_q, x_i) — тривимірний випадковий вектор з функцією розподілу (1). Знайдемо похідну (1) по r_{pq}. Використовуючи регресійні співвідношення, введемо нові змінні:

$$x_p = x_{pi}x_i + z_p, \quad x_q = r_{qi}x_i + z_q, \quad x_i = z_i. \qquad (5)$$

Тоді

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_i} e^{-\frac{1}{2}u^2} F_2(t'_p, t'_q, r'_{pq})\, du, \qquad (6)$$

де

$$t'_q = \frac{t_q - r_{qi}u}{\sqrt{1-r_{qi}^2}}, \quad t'_p = \frac{t_p - r_{pi}u}{\sqrt{1-r_{pi}^2}}, \quad r'_{pq} = \frac{r_{pq} - r_{pi}r_{qi}}{\sqrt{(1-r_{pi}^2)(1-r_{qi}^2)}}. \qquad (7)$$

Використовуючи (2), одержимо

$$\frac{\partial F_3}{\partial r_{pq}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t_i} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{dF_2(t'_p, t'_q, r'_{pq})}{dr'_{pq}} \frac{dr'_{pq}}{dr_{pa}} du.$$

Звідси, використовуючи (2), (7) і виконавши перетворення, знаходимо

$$\frac{\partial F_3}{\partial r_{pq}} = \frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} F_1(t_i^{pq}), \qquad (8)$$

де t_i^{pq} визначається виразом (4).

Перейдемо до випадку довільного «n» і допустимо, що для функції розподілу з розмірністю до $(n-1)$ включно властивість (4) здійснюється і t_i^{pq} — лінійні функції від t_i.

Введемо нові змінні аналогічно (5), наприклад,

$$x_i = r_{in} x_n + z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad x_n = z_n.$$

Далі

$$F_n(t_i, r_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_n} e^{-\frac{1}{2}u^2} F_{n-1}(t_i', r_{ij}')\, du, \tag{9}$$

де

$$t_i' = \frac{t_i - r_{in} u}{\sqrt{1 - r_{in}^2}}; \qquad r_{ij}' = \frac{r_{ij} - r_{in} r_{jn}}{\sqrt{(1 - r_{in}^2)(1 - r_{jn}^2)}}, \qquad i, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Звідси

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_n} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{\partial F_{n-1}(t_i', r_{ij}')}{\partial r_{pq}'} \frac{dr_{pq}'}{dr_{pq}'}\, du.$$

Відповідно допущенню

$$\frac{\partial F_{n-1}(t_i', r_{ij}')}{\partial r_{pq}'} = \frac{dF_2(t_p', t_q', r_{pq}')}{dr'_{pq}} F_{n-3}[(t_i')^{pq}, (r_{ij}')^{pq}], \qquad i, j \neq p, q.$$

Тоді

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_n} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{dF_2(t_p', t_q', r_{pq}')}{dr_{pq}'} \cdot \frac{dr_{pq}'}{dr_{pq}} F_{n-3}[(t_i')^{pq} (r_{ij}')^{pq}]\, du,$$
$$i, \ j \neq p, q.$$

Згідно з допущенням для $(t_i')^{pq}$ має місце вираз (4). Використовуючи (4), (2), (10) і виконавши перетворення, подібні до випадків $n = 3$, одержимо

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} = \frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_n^{pq}} e^{-\frac{1}{2}v^2} F_{n-3}[(A_i - B_i v)\,(r_{ij}')^{pq}]\, dv,$$

де

$$A_i = \frac{\Delta_{pqi}\left(\frac{t_p}{\sqrt{\Delta_{pn}}}; \frac{t_q}{\sqrt{\Delta_{qn}}}; \frac{t_i}{\sqrt{\Delta_{in}}}\right)}{\sqrt{\Delta_{pqi}' \Delta_{pq}'}}; \qquad B_i = \frac{\Delta_{pqi}\left(\frac{r_{pn}}{\sqrt{\Delta_{pn}}}; \frac{r_{qn}}{\sqrt{\Delta_{qn}}}; \frac{r_{in}}{\sqrt{\Delta_{in}}}\right)}{\sqrt{\Delta_{pqi}' \Delta_{pq}'}}. \tag{11}$$

Визначники в (11) мають таке ж значення, як і в (4). Штрих над визначниками означає, що замість r_{ij} треба підставляти r_{ij}', які визначаються виразом (10).

Після перетворення

$$A_i - B_i v = \frac{t_i^{pq} - r_{in}^{pq} v}{\sqrt{1 - (r_{in}^{pq})^2}}.$$

Звідси

$$r_{in}^{pq} = \frac{B_i}{\sqrt{1 + B_i^2}}, \qquad t_i^{pq} = A_i \sqrt{1 - (r_{in}^{pq})^2}. \tag{12}$$

Знаходимо

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} = \frac{dF_2(t_p, t_q, r_{pq})}{dr_{pq}} F_{n-2}(t_i^{pq}, r_{ij}^{pq}), \qquad i, j \neq p, q.$$

Означення r_{in}^{pq} і t_i^{pq} за допомогою (12) після алгебраїчних перетворень приводить до виразів (4).

Відзначимо деякі властивості похідних (3). Очевидно,

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} \geqslant 0. \tag{13}$$

Легко показати також, що

$$\frac{\partial F_n(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}} \geqslant \frac{\partial F_{n+1}(t_i, r_{ij})}{\partial r_{pq}}. \tag{14}$$

Вираз (3) дає змогу спростити обчислення функцій $F_n(t_i, r_{ij})$, оскільки в правій частині (3) розмірність інтегрування знижена на два в порівнянні з $F_n(t_1, r_{ij})$. Провівши інтегрування виразів (3) в області коефіцієнтів кореляції r_{ij} по шляху, складеному з відрізків, паралельних координатним лініям від деякої початкової точки до потрібної, одержимо значення $F_n(t_i, r_{ij})$. За початкову точку інтегрування природно вибрати точку, в якій обчислення $F_n(t_i, r_{ij})$ спрощується. Такою точкою може бути початок координат, або точка, в якій деяка складова вектора $(x_1 x_2 \dots x_n)$ не залежить від останніх x_i.

Позначимо через u_{ij} поточні значення коефіцієнтів корреляції, а через r_{ij} — фіксовані. Тоді для останнього випадку початкової точки інтегрування можна визначити такий алгоритм обчислення $F_n(t_i, r_{ij})$:

$$F_2(t_1, t_2, r_{12}) = F_1(t_1) F_2(t_2) + \int\limits_0^{r_{12}} \frac{dF_2(t_1, t_2, u_{12})}{du_{12}} du_{12}, \tag{15}$$

$$F_3(t_i, r_{ij}) = F_2(t_1, t_2, r_{12}) F_1(t_3) + \sum_{i=1}^{r} \int\limits_0^{r_{i3}} \frac{dF_2(t_i, t_3, u_{i3})}{du_{i3}} F_1(t_j^{i3}) du_{i3},$$

$$F_n(t_i, r_{ij}) = F_{n-1}(t_i, r_{ij}) F_1(t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_0^{r_{in}} \frac{dF_2(t_i, t_n, u_{in})}{du_{in}} F_{n-2}(t_j^{in}, u_{jk}^{in}) du_{in},$$

$$j, k \neq i, n.$$

Як видно, на кожному кроці алгоритму (15) обчислення $F_m(t_i, r_{ij})$ зводиться до F_{m-1} і F_{m-2}, які можуть бути обчислені за допомогою попередньої частини алгоритму.

Залежно від вибору початкової точки інтегрування можна запропонувати множину алгоритмів обчислення $F_n(t_i, r_{ij})$, подібних до (15). Відзначимо ще один з них. Розмістимо всі t_i по порядку збільшення $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.

За початкову точку інтегрування візьмемо точку, в якій $u_{n-1,n} = 1$. Тоді

$$F_2(t_1, t_2, r_{12}) = F_1(t_1) - \int\limits_{r_{12}}^{1} \frac{dF_2(t_1, t_2, u_{1,2})}{du_{12}} du_{12},$$

$$F_3(i_i, r_{ij}) = F_2(t_1, t_2, r_{12}) -$$

$$- \int\limits^{r_{12}} \frac{dF_2(t_1, t_3, u_{13})}{du_{13}} F_1(t_2^{13}) du_{13} - \int\limits^{1} \frac{dF_2(t_2, t_3, u_{23})}{du_{23}} F_1(t_1^{23}) du_{23}, \tag{16}$$

$$F_n(t_i, r_{ij}) = F_{n-1}(t_i, r_{ij}) - \sum_{i=1}^{n-2} \int_{r_{in}}^{r_{i,n-2}} \frac{dF_2(t_i, t_n, u_{i,n})}{du_{in}} F_{n-2}(t_j^{in} r_{jk}^{i,n})\, du_{in} -$$

$$- \int_{r_{n-1,n}}^{1} \frac{dF_2(t_{n-1} t_n u_{n-1,n})}{du_{n-1,n}} F_{n-2}(t_j^{n-1,n}, r_{j,k}^{n-1,n})\, du_{n-1,n}.$$

Кожному алгоритму (15), (16) можна поставити у відповідність аналітичний вираз для $F_n(t_i, r_{ij})$, який можна одержати підстановкою в $F_n(t_i, r_{ij})$ виразів для F_{n-1} і F_{n-2} із попереднього стану, наслідком чого буде одержано вираз для $F_n(t_i, r_{ij})$, до якого ввійдуть F_{n-2}, F_{n-3}, F_{n-4}. Для них, в свою чергу, можна використати наведений прийом.

Використовуючи з такою метою алгоритм (16), можна показати, що $F_n(t_i, r_{ij})$ може бути представлена у вигляді суми інтегралів, розмірністю не більше $\frac{n+1}{2}$.

В окремих випадках вдається одержати ще більш прості вирази для $F_n(t_i, r_{ij})$. Так, при $t_i = t$, $r_{ij} = r$, крім відомих рішень [2], для $n = 2, 3$, знаходимо для $n = 4, 5$

$$F_4(t_i = 0;\ r_{ij} = r) = 0{,}0625 + \frac{3}{4\pi} \arcsin r + \frac{3}{2\pi^2} \int_0^r \frac{\arcsin\left(\frac{u}{1+2u}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\, du,$$

$$F_5(t_i = 0;\ r_{i,j} = r) = 0{,}03125 + \frac{5}{8\pi} \arcsin r + \frac{15}{2\pi^2} \int_0^r \frac{\arcsin\left(\frac{u}{1+2u}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, М. Лидбаттер, Стационарные случайные процессы, «Наука», М., 1969.
2. М. Дж. Кендал, А. Стьюарт, Теория распределений, «Наука», М., 1966.

Надійшла 12.XII 1969,
після переробки — 20.IV 1970 р.

Дніпропетровське відділення Інституту механіки АН УРСР