УДК 517.9:532/534

Об одном методе численного решения осесимметрических течений со свободной границей

И. И. Данилюк, Л. Н. Тарасенко

1. Рассматриваемый класс задач характеризуется значительными математическими трудностями, вызванными тремя различными причинами. Во-первых, область течения заранее неизвестна и ее граница должна быть определена одновременно с полем скоростей. Во-вторых, на этой неизвестной границе должно выполняться вытекающее из закона Бернулли нелинейное условие на абсолютное значение скорости. В-третьих, область течения бесконечна и содержит внутри себя ось симметрии, на которой коэффициенты дифференциальных уравнений обращаются в бесконечность первого порядка. Первые два обстоятельства делают задачу нелинейной. В плоском случае вызванные нелинейностью трудности очень часто удается преодолеть при помощи методов теории функций комплексного переменного. Третье обстоятельство, вызванное параболическим вырождением системы дифференциальных уравнений, описывающих поле скоростей пространственного осесимметрического течения, в сочетании с первыми двумя сильно затрудняет проведение качественного исследования задачи аналитическими средствами. И только в том случае, когда по самому смыслу задачи ось вырождения находится вне области течения, появляется реальная возможность полного качественного изучения задачи аналитическими методами. Такой случай возникает в задаче о торовидных движениях со свободной границей, и при помощи методов, восходящих в конечном итоге к теории функций комплексного переменного, удается преодолеть трудности, вызванные нелинейным характером задачи [1—3]. В данной работе рассматривается задача об осесимметрическом соударении двух струй идеальной несжимаемой жидкости и для ее исследования предлагается метод численного анализа.

2. Введем цилиндрическую систему координат (x, r), где x — переменная вдоль оси симметрии, а r — расстояние от оси. В осесимметрическом случае векторное поле скоростей $\vec{V}$ характеризуется двумя компонентами V_x, V_r вдоль соответствующих осей. Для идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии источников и вихрей пара функций $V_x(x, r)$, $V_r(x, r)$ определяется системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}(rV_x) + \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}V_r - \frac{\partial}{\partial r}V_x = 0. \qquad (1)$$

Дополнительные условия формулируются в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Мы рассмотрим задачу об осевом соударении двух осесимметрических струй одинаковой толщины с одной и той же плотностью и с одинаковыми по абсолютной величине скоростями на бесконечности. Свободная граница γ течения будет состоять из четырех линий, образующих симметричную относительно обеих координатных осей конфигурацию. В каждой конечной точке линий γ должно выполняться условие

$$V_r dx - V_x dr = 0, \tag{2}$$

выражающее тот факт, что γ является линией тока поля скоростей (V_x, V_r). Пусть V_∞— абсолютное значение скорости струй на бесконечности. Если V_∞ достаточно велико, то силы инерции являются преобладающими в системе всех сил, воздействующих на жидкость. Пренебрегая этими силами,

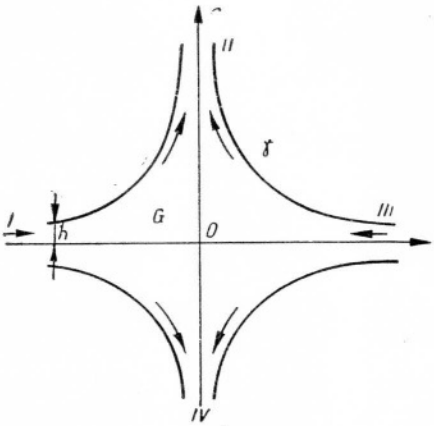

Рис. 1.

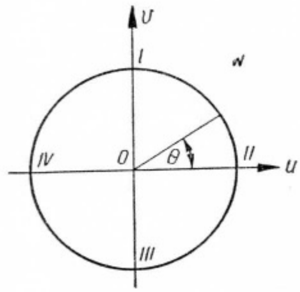

Рис. 2.

в частности силой земного притяжения, мы прийдем к условию постоянства модуля скорости $|\vec{V}|$ на γ:

$$V_x^2(x, r) + V_r^2(x, r) = V_\infty^2, \tag{3}$$

вытекающему из закона Бернулли для невесомой жидкости. Теперь постановку задачи можно сформулировать так: требуется определить область вида G (рис. 1), свободная граница γ которой имеет вдоль оси x горизонтальную асимптоту $r = h$ с заданным $h > 0$, и регулярное в G решение системы (1), удовлетворяющее на γ условиям (2), (3), причем V_∞— заданное абсолютное значение скорости на бесконечности.

3. Вместо пары действительных функций V_x, V_r действительных переменных x, r рассмотрим комплекснозначную функцию $w \equiv V_r + iV_x$. Полагая $z = x + ir$ и вводя дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

мы сможем систему уравнений (1) записать в виде одного комплексного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{4ir} w - \frac{1}{4ir}\bar{w} = 0 \quad \text{(внутри } G). \tag{4}$$

Условия же (2), (3) могут быть представлены следующим образом:

$$\operatorname{Re}[w dz] = 0, \quad |w| = V_\infty \quad \text{(на } \gamma). \tag{5}$$

Предположим, что функция $w(z) \equiv w(x, r)$ является решением задачи (4), (5). Тогда нетрудно убедиться, что эта функция реализует однолистное отображение области G, расположенной в физической плоскости

$z = x + ir$, на внутренность круга $|w| \leqslant V_\infty$, расположенного в плоскости годографа $w = V_r + iV_x = u + iv$ (рис. 2). При этом свободная граница γ отображается на окружность $|w| = V_\infty$ с сохранением ориентации. Нетрудно видеть, что достаточно рассмотреть случай $V_\infty = 1$. Полученное поле скоростей $w(x, r)$ следует затем умножить на вещественное число V_∞, чтобы получить поле скоростей в общем случае.

Теперь рассмотрим в качестве искомой функцию $z = z(w)$, обратную к функции $w = w(z)$. Воспользовавшись связью между частными производными взаимно обратных функций $w(z)$, $z(w)$, перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} - q(w, z, z_w)\frac{\partial z}{\partial w} = 0, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

$$q \equiv \frac{i\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}}{\dfrac{r}{u} + \sqrt{\dfrac{r^2}{u^2} + \left|\dfrac{\partial z}{\partial w}\right|^2}}. \tag{7}$$

Второе условие (5), эквивалентное закону Бернулли (3), при переходе к плоскости w «линеаризуется» и означает просто, что решение $z(w)$ уравнения (6) должно быть определено в круге $|w| \leqslant V_\infty$. Первое граничное условие (5), эквивалентное условию обтекания (2), может быть теперь представлено в виде

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\frac{dz}{d\theta}\right) \equiv \frac{\partial x}{\partial \theta}\cos\theta - \frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{8}$$

на единичной окружности $w = e^{i\theta}$. Мы показали, таким образом, что задача (4), (5) редуцируется к эквивалентной задаче, в которой требуется определить в единичном круге $|w| < 1$ однолистное решение $z(w)$ уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (8) и отображающее круг $|w| < 1$ на область вида G. Образ γ единичной окружности $|w| = 1$ при этом отображении и будет искомой свободной границей.

Несмотря на сильную нелинейность уравнения (6), которому должна удовлетворять новая неизвестная функция $z(w)$, простота области определения функции, а именно, единичный круг $|w| = 1$ и линейный характер граничного условия (8) определяют некоторые преимущества новой записи задачи по сравнению с исходной, в частности, позволяют предложить некоторый численный метод расчета задачи об осесимметрическом соударении струй.

4. Переменные r и $u = V_r$ имеют один и тот же знак, следовательно, их отношение r/u неотрицательно. Отсюда следует, что функция q, определенная при помощи последней формулы (7), удовлетворяет неравенству $|q| \leqslant 1$. Знак равенства достигается при $(r/u) = 0$. Если бы функция q, входящая в уравнение (6), удовлетворяла условию вида $|q| \leqslant q_0 < 1$, $q_0 =$ const, то уравнение (6) было бы равномерно эллиптическим и для его исследования можно было бы применить существующие методы (см. [4]). Этот подход можно реализовать и в том случае, когда для определенного класса функций $z(w)$ удается установить априорную оценку $|q| \leqslant q_0 < 1$, как это сделано в работах А. Игликова [1—3]. К сожалению, аналогичных оценок не удается получить в рассматриваемой нами задаче. В связи с этим в данной статье предлагается численный метод разыскания решения задачи (6), (8) в единичном круге.

Предлагаемый метод состоит в реализации следующей схемы. Обозначим через $z_0(w)$ решение плоской задачи о встрече струй с теми же геометрическими и кинематическими характеристиками на бесконечности. Это соответствует тому случаю задачи (6), (8), который отвечает нулевой функции q ($q \equiv 0$) в уравнении (6). Решение $z_0(w)$ легко выписывается с помощью интегрирования элементарных функций от комплексного переменного (см., например, [5, § 6]). Подставим затем в коэффициент q вместо точного решения $z(w)$ функцию $z_0(w)$. Мы получим тогда линейную задачу (6), (8), в которой $q = q(w, z_0, z_{0w})$. Допустим, что мы смогли решить эту линейную задачу, и пусть $z_1(w)$ — ее решение. Распоряжаясь этой функцией так, как на первом шагу мы распорядились функцией $z_0(w)$, приходим к новой линейной задаче (6), (8), в которой $q = q(w, z_1, z_{0w})$. Возникающая при этом последовательность функций $\{z_n(w)\}$ в какой-то степени дает все более точные приближения к истинному решению нелинейной задачи (6), (8).

Для численного решения задачи вида (6), (8) в линейном случае введем обозначения $w = \varrho e^{i\theta}$, $q = q_1 + iq_2$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{i}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{i}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

то одно комплексное уравнение (6) можно записать в виде системы двух вещественных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \alpha\frac{\partial r}{\partial \theta} + \beta\frac{\partial r}{\partial \varrho}, \\ -\frac{\partial x}{\partial \theta} = \beta\frac{\partial r}{\partial \theta} + \gamma\frac{\partial r}{\partial \varrho}, \end{gathered} \tag{9}$$

если для краткости ввести обозначения

$$\alpha = \frac{(1+c_1)^2 + c_2^2}{\varrho(1 - c_1^2 - c_2^2)}, \quad \beta = \frac{-2c_2}{1 - c_1^2 - c_2^2}, \quad \gamma = \varrho\frac{(1-c_1)^2 + c_2^2}{1 - c_1^2 - c_2^2}, \tag{10}$$

$$c_1 = q_1\cos 2\theta + q_2\sin 2\theta, \quad c_2 = -q_1\sin 2\theta + q_2\cos 2\theta.$$

Система дифференциальных уравнений (9) имеет эллиптический тип во всех точках, где регулярны ее коэффициенты, ибо нетрудно проверить, что имеют место следующие условия:

$$\alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 1. \tag{11}$$

По непрерывности равенства (9) будут выполняться и во всех граничных точках единичной окружности $w = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, за исключением, быть может, точек I — IV (см. рис. 2). Система (9) может быть также разрешена относительно производных от функции $r(\varrho, \theta)$:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \gamma\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \beta\frac{\partial x}{\partial \theta}, \quad -\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \beta\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \alpha\frac{\partial x}{\partial \theta}. \tag{12}$$

Пользуясь первым уравнением, исключим из граничного условия (8) производную $\frac{\partial r}{\partial \theta}$. Мы получим условие

$$(\cos\theta - \beta\sin\theta)\frac{\partial x}{\partial \theta} - \gamma\sin\theta\frac{\partial x}{\partial \varrho} = 0 \quad (\varrho = 1), \tag{13}$$

содержащее только одну неизвестную функцию $x(\varrho, \theta)$. Исключая из системы (12) неизвестную $r(\varrho, \theta)$, получим одно дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial\theta}+\beta\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\beta\frac{\partial x}{\partial\theta}+\gamma\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right)=0. \tag{14}$$

Мы приходим, таким образом, к задаче с наклонной производной (13) для уравнения (14).

Допустим, что мы решили задачу (13), (14) и нашли решение $x(\varrho, \theta)$. Из условия (8) находим значения производной $\frac{\partial r}{\partial\theta}=\frac{\partial x}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta$ на окружности $\varrho=1$. Из соответствия точек, указанного на рис. 1 и 2, следует, что $r\left(1, \frac{\pi}{2}\right)=h$, где h — радиус струи на бесконечности. Следовательно,

$$r(1, \theta)=h-\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial x}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta d\theta, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

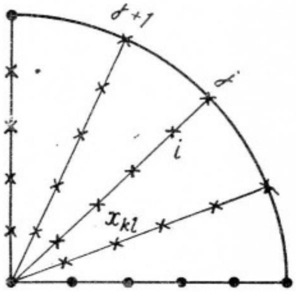

Рис. 3.

В остальных точках единичной окружности $w=e^{i\theta}$ значения функции $r(1, \theta)$ определяются из условия симметричности свободной границы относительно координатных осей. Из системы (12) во всех внутренних точках определяются значения производных, а затем и значения функции $r(\varrho, \theta)$. Полученная функция $r(\varrho, \theta)$ будет удовлетворять, как следует из системы (9), уравнению второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\alpha\frac{\partial r}{\partial\theta}+\beta\frac{\partial r}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\beta\frac{\partial r}{\partial\theta}+\gamma\frac{\partial r}{\partial\varrho}\right)=0 \tag{16}$$

и условию Дирихле с граничной функцией (15). Последовательность определения функций x и r можно обратить, если из граничного условия (8) исключить не функцию r, а функцию x, пользуясь вторым уравнением (9). В этом и другом случае выполнение всех указанных операций приводит к решению задачи (6), (8) в линейном случае.

5. Из отмеченной выше симметрии вытекает, что задачу (13), (14) достаточно решить в первой четверти круга $0\leqslant\varrho\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Покроем эту область сеткой с шагом Δ по переменной θ и шагом δ по переменной ϱ, считая при этом, что числа $n=\pi/2\Delta$, $m=1/\delta$ являются целыми. На рис. 3 изображена эта сетка при $n=4$, $m=5$. Жирными кружочками отмечены точки рассматриваемой сетки, в которых известны значения искомой функции. На горизонтальном радиусе $\theta=0$ функция $x(\varrho, \theta)$ равна нулю, поскольку этому радиусу на физической плоскости отвечает ось r. Конечная точка вертикального радиуса $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ соответствует в физической плоскости точке $x=-\infty$, и в конечноразностной аппроксимации мы можем положить в этой точке $x=-10\,h$ (или $-100\,h$), где h — радиус струи. Легко подсчитать, что число точек нашей сетки, где значения функции $x(\varrho, \theta)$ неизвестны, равно $N=mn-1$. Мы должны, следовательно, получить ровно N уравнений для определения этих неизвестных.

Разделим оставшиеся точки на две группы — внутренние и граничные. К граничным точкам отнесем те точки нашей сетки, которые находятся на единичной окружности $\varrho=1$. Таких точек будет ровно $N_1=n-1$. Все остальные точки называются внутренними. Их общее число равно

$N_2 = n(m-1) = N - N_1$. Чтобы представить граничное условие (13) в точке с номером j через конечноразностные отношения, положим (см. рис. 3):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right)_j = \frac{x_j - x_i}{\delta}.$$

Тогда, как показывают элементарные преобразования, получаем

$$\left[\frac{\cos\theta_j - \beta_j\sin\theta_j}{\Delta} + \frac{\gamma_j\sin\theta_j}{\delta}\right]x_j - \frac{\cos\theta_j - \beta_j\sin\theta_j}{\Delta}x_{j+1} - \frac{\gamma_j\sin\theta_j}{\delta}x_i = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{17}$$

Перед тем, как записать конечноразностную аппроксимацию для уравнения (14), запишем его в развернутом виде:

$$L(x) \equiv \alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} + 2\beta\frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial\varrho} + \gamma\frac{\partial^2 x}{\partial\varrho^2} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial\beta}{\partial\varrho}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta} +$$
$$+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}\right)\frac{\partial x}{\partial\varrho} = 0, \tag{18}$$

предполагая, что первые производные коэффициентов α, β, γ существуют и непрерывны. Для простоты предположим, что рассматривается квадратная сетка $\Delta = \delta$, и воспользуемся обычными аппроксимациями для вторых производных (см., например, [6, гл. III]). Обозначим через x_{kl} (в нумерации с двумя индексами) внутреннюю точку нашей сетки (см. рис. 3), полагая, что первый индекс возрастает вдоль радиусов, а второй — при изменении угла θ. Как показывают непосредственные вычисления, мы получим уравнение:

$$\frac{2}{\Delta^2}(\alpha_{kl} + \gamma_{kl})x_{kl} - \left[\frac{\gamma_{kl}}{\Delta^2} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial\beta}{\partial\varrho}\right)_{k,l}\frac{1}{2\Delta}\right]x_{k+1,l} -$$
$$-\left[\frac{\gamma_{kl}}{\Delta^2} - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial\beta}{\partial\varrho}\right)_{k,l}\frac{1}{2\Delta}\right]x_{k-1,l} - \left[\frac{\alpha_{kl}}{\Delta^2} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}\right)_{kl}\frac{1}{2\Delta}\right]x_{k,l+1} -$$
$$-\left[\frac{\alpha_{kl}}{\Delta^2} - \left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}\right)_{kl}\frac{1}{2\Delta}\right]x_{k,l-1} + \frac{\beta_{kl}}{2\Delta^2}x_{k-1,l+1} -$$
$$-\frac{\beta_{kl}}{2\Delta^2}x_{k+1,l+1} + \frac{\beta_{kl}}{2\Delta^2}x_{k-1,l+1} - \frac{\beta_{kl}}{2\Delta^2}x_{k-1,l-1} = 0. \tag{19}$$

Если рассматриваемая внутренняя точка лежит на радиусе $\theta = \frac{\pi}{2}$, то при выписывании уравнения вида (19) учитывается, что функция $x(\varrho, \theta)$ симметрична относительно указанного радиуса. Наконец, в том случае, когда эта точка является соседней к точке $\varrho = 0$, то при составлении уравнения вида (19) начало координат считается трехкратной точкой соответственно трем радиусам, пересекающимся в точке $\varrho = 0$. Получившаяся конечноразностная система уравнений (17), (18) содержит $N_1 + N_2 = N = mn - 1$ уравнений относительно такого же количества неизвестных. Запишем эту систему в стандартном виде

$$\sum_{s=1}^{N} a_{\beta s}x_s = b_\beta, \quad \beta = 1, 2, \ldots, N, \tag{20}$$

где b_β — вектор-столбец, содержащий известные величины, выражающиеся через значение $x = -10\,h$ функции x в точке $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Те диагональные элементы $a_{\beta\beta}$ матрицы $a_{\beta s}$, которые входят в уравнения вида (19), положительны в силу первых двух неравенств (11). Диагональные же элементы уравнений вида (17) будут положительными, если

$$\cos\theta - \beta(1,\theta)\sin\theta \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \beta(1,\theta) \leqslant \operatorname{ctg}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{21}$$

Из этого условия и второго неравенства (11) вытекает также, что недиагональные элементы $a_{\beta s}$, $\beta \neq s$, входящие в уравнения (17), будут неположительными, причем среди них те, которые порождаются последним слагаемым уравнения (17), будут строго отрицательными. Этим последним свойством будут обладать и те внедиагональные элементы уравнений вида (19), которые включены в квадратные скобки, если при этом шаг $\Delta > 0$ достаточно мал.

Вектор-столбец, стоящий в правой части уравнений, имеет только один элемент, способный принимать ненулевые значения. Этот элемент (обозначим его через b_1) соответствует уравнению (17) при $\theta_j = \frac{\pi}{2} - \Delta$ и равен $-10h\left[\sin\Delta - \beta\left(1, \frac{\pi}{2} - \Delta\right)\cos\Delta\right]$. Он будет, следовательно, отрицательным, если

$$\beta\left(1, \frac{\pi}{2} - \Delta\right) < \operatorname{tg}\Delta, \quad \Delta > 0. \tag{22}$$

При этом условии будем также иметь

$$\sum_s a_{1s} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\right) - \beta\left(1, \frac{\pi}{2} - \Delta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\right)}{\Delta} > 0. \tag{23}$$

В частности, условиям (21) — (23) удовлетворяет тождественно равная нулю функция $\beta(\varrho, \theta)$. Покажем сейчас, что в этом случае определитель матрицы системы (20) отличен от нуля, т. е. что однородная система

$$\sum_{s=1}^{N} a_{\beta s} x_s = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, N, \tag{24}$$

имеет только нулевое решение. В противном случае существовало бы решение $x_1, x_2, \ldots, x_N$ системы (24), для которого $x_k = \max(x_1, x_2, \ldots, x_N) > 0$. Это значение x_k не может быть равно x_1, т. е. не может приниматься в граничной точке рассматриваемой сетки, ближайшей к точке $\theta = \frac{\pi}{2}$. В самом деле, из соответствующего уравнения (17) мы получили бы

$$0 = \sum_s a_{1s} x_s \geqslant x_k \sum_s a_{1s} > 0,$$

что невозможно. Покажем, исходя из уравнения (17), что если $x_k \neq x_{j+1}$, то $x_k \neq x_j$. В самом деле, $x_{j+1} < x_k$, т. е. $-x_{j+1} > -x_k$, следовательно, если бы $x_j = x_k$, то

$$0 = \left[\frac{\cos\theta_j}{\Delta} + \frac{\gamma_j \sin\theta_j}{\Delta}\right] x_k - \frac{\cos\theta_j}{\Delta} x_{j+1} - \frac{\gamma_j \sin\theta_j}{\Delta} x_i >$$
$$> x_k \left[\frac{\cos\theta_i}{\Delta} + \frac{\gamma_j \sin\theta_j}{\Delta} - \frac{\cos\theta_j}{\Delta} - \frac{\gamma_j \sin\theta_j}{\Delta}\right] = 0,$$

поскольку $(-x_i) \geqslant (-x_k)$. Полученное неравенство противоречиво, следовательно, максимальное значение x_k не может приниматься в граничных точках.

Предположим поэтому, что значение x_k принимается в некотором внутреннем узле с номером k. Сумма элементов матрицы в k-й строке равна нулю, следовательно,

$$0 = \sum_s a_{ks} x_s = \sum_s a_{ks}(x_s - x_k) + x_k \sum_s a_{ks} = \sum_s a_{ks}(x_s - x_k).$$

Каждое слагаемое $a_{ks}(x_s - x_k)$, очевидно, неотрицательно, следовательно, $x_k = x_s$ для всех s, при которых $a_{ks} \neq 0$. Таким образом, во всех внутренних точках имеем $x_s = x_k$. Рассматривая внутренние точки, примыкающие к оси $\theta = 0$, получаем $x_k = 0$, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает, что система (24) имеет только нулевое решение. Для уравнения вида (14) при $\beta = 0$ и самосопряженных граничных условий аналогичные свойства матрицы конечноразностной системы известны (см., например, [7, гл. 5]). Однозначная разрешимость системы (20) имеет место, очевидно, и в том случае, когда функция $\beta(\varrho, \theta)$ не является тождественным нулем, но принимает достаточно малые значения.

6. Непосредственное численное решение задачи (13), (14) проводилось по конечноразностной схеме, несколько отличающейся от той, которая описана выше. А именно, в терминах (неравномерной) сетки, описанной в начале п. 5, граничное условие (13) заменялось, как и раньше, конечноразностным уравнением (17). Для конечноразностной аппроксимации уравнения (14), вместо перехода к записи (18) с последующей заменой всех производных первого и второго порядков разностными отношениями, была использована схема, основанная на формулах

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\delta}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\alpha \frac{\partial x}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)\right]_{i,j} = \frac{\left(\alpha \frac{\partial x}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)_{i,j} - \left(\alpha \frac{\partial x}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)_{i,j-1}}{\Delta}, \tag{25}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\gamma \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \beta \frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\right]_{i,j} = \frac{\left(\gamma \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \beta \frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{i,j} - \left(\gamma \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \beta \frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{i-1,j}}{\delta}.$$

В соответствии с этим в каждом внутреннем узле сетки уравнение (14) заменялось следующим:

$$x_{i,j}\left(\frac{\alpha_{i,j}}{\Delta^2} + \frac{2\beta_{ij}}{\Delta\delta} + \frac{\alpha_{i,j-1}}{\Delta^2} + \frac{\gamma_{i,j}}{\delta^2} + \frac{\gamma_{i-1,j}}{\delta^2}\right) - x_{i,j+1}\left(\frac{\alpha_{ij}}{\Delta^2} + \frac{\beta_{ij}}{\Delta\delta}\right) -$$

$$- x_{i+1,j}\left(\frac{\gamma_{i,j}}{\delta^2} + \frac{\beta_{ij}}{\Delta\delta}\right) - x_{i,j-1}\left(\frac{\alpha_{i,j-1}}{\Delta^2} + \frac{\beta_{i,j-1}}{\Delta\delta}\right) -$$

$$- x_{i-1,j}\left(\frac{\gamma_{i-1,j}}{\delta^2} + \frac{\beta_{i-1,j}}{\Delta\delta}\right) + x_{i+1,j-1}\frac{\beta_{i,j-1}}{\Delta\delta} + x_{i-1,j+1}\frac{\beta_{i-1,j}}{\Delta\delta} = 0. \tag{26}$$

Чтобы оценить порядок погрешности, которая при этом допускается, предположим, что коэффициенты α, β и γ являются постоянными. Тогда (26) можно представить в виде

$$\alpha \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\Delta^2} + \gamma \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta^2} +$$

$$+ 2\beta\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j} - x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1}}{2\Delta\delta} + \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j} - x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j}}{2\Delta\delta}\right) = 0 \tag{27}$$

Первые два разностных отношения аппроксимируют вторые производные $\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2}$; они были использованы выше при составлении уравнения (19), и, как известно, при этом допускается ошибка порядка Δ^2, δ^2 соответственно. Предположим, что функция $x(\varrho, \theta)$ является достаточно гладкой, а разности Δ, δ имеют одинаковый порядок малости. Пользуясь разложениями Тейлора в окрестности точки $x_{i,j}$, можно убедиться, что конечноразностное отношение, стоящее в формуле (27) множителем при 2β, уклоняется от смешанной производной $\frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \varrho}$ на величину того же порядка малости $o(\Delta^2) = o(\delta^2)$.

Матрица конечноразностной системы, построенной при помощи уравнений (17), (26), будет диагонально преобладающей (см., например, [7, гл. 4]), если имеют место условия (11) и, кроме того,

$$\beta(\varrho, \theta) \leqslant 0, \quad -\frac{\beta}{\alpha} \leqslant \frac{\delta}{\Delta} \leqslant -\frac{\gamma}{\beta}. \tag{28}$$

Для определения значений $r(\varrho, \theta)$ во внутренних узлах сетки интегрировалось уравнение $\frac{\partial r}{\partial \theta} = \gamma \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \beta \frac{\partial x}{\partial \theta}$, используя условие $r\left(\varrho, \frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\frac{r_{i,j+1} - r_{i,j}}{\Delta_j} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\delta_i} + \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\delta_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \beta_{ij} \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta_j} + \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\Delta_{j-1}} \right).$$

Для продолжения итерационного счета каждый раз вычисляются значения коэффициентов q, α, β, γ во всех узлах сетки по только что найденным значениям x и r. Функцию q удобно при этом представить в виде

$$q = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)\sin\theta\right] + \frac{i}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\sin\theta\right]}{\frac{r}{\varrho\cos\theta} + \sqrt{\frac{r^2}{\varrho^2\cos^2\theta} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2\right]}}.$$

Значения производной $\frac{\partial x}{\partial \theta}$ в граничных узловых точках вычислялись с помощью разностных отношений

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{N,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{N,j+1} - x_{N,j}}{\Delta_j} + \frac{x_{N,j} - x_{N,j-1}}{\Delta_{j-1}} \right). \tag{29}$$

Если учесть граничное условие (8), то значения производной $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ в тех же узлах можно считать с помощью соотношений

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_{N,j} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{N,j} \operatorname{ctg}\theta_j.$$

При вычислении значений производных по ϱ на границе области, используя систему (9), получили

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \alpha \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{\beta}{\gamma}\left(\beta \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\right), \quad \frac{\partial r}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\gamma}\left(\beta\frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\right).$$

В узловых точках на осях $\theta=0$ и $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ удобно пользоваться соотношениями

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial\varrho}+\beta\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right),\quad \frac{\partial r}{\partial\theta}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho}-\beta\frac{\partial r}{\partial\varrho}\right).$$

Во всех внутренних узловых точках значения производных вычисляются с помощью разностных отношений типа (29). Рассматриваемая задача численно решалась описанным методом на ЭВМ «Минск-22». Четверть круга $0\leqslant\varrho\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, представлялась совокупностью 64 узловых

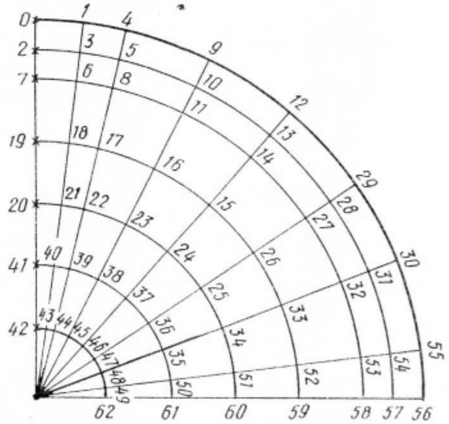

Рис. 4.

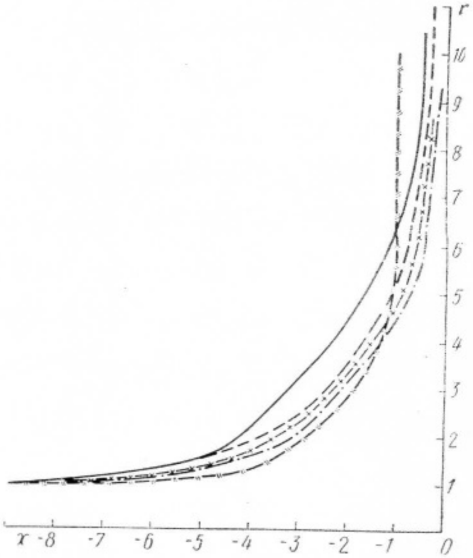

Рис. 5.

точек сетки. Сетка строилась неравномерная, более густая в окрестностях точек $(1, \frac{\pi}{2})$, $(1, 0)$. Нумерация узлов производилась таким образом, чтобы движению в направлении струи соответствовало возрастание номера узла (рис. 4).

На рис. 5 приведены первые приближения к решению нелинейной задачи (6), (8) в сопоставлении с профилем плоской струи (линией, перечеркнутой штрихами, обозначено решение плоской задачи; сплошной — первое приближение осесимметричной; штрихпунктирной — решение осесимметричной задачи).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Игликов, Об осесимметрических течениях со свободной границей, ДАН СССР, т. 179, № 4, 1968.
2. А. Игликов, Об одной задаче со свободной границей, Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., № 1, 1969.
3. А. Игликов, Об осесимметрических течениях со свободной границей, Автореферат канд. дис., 1968.
4. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
5. Бай-ши-и, Теория струй, «Мир», М., 1960.
6. В. Вазов и Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1963.
7. И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер, Численные процессы решения дифференциальных уравнений, «Мир», М., 1969.

Поступила 22.III 1971 г.
Институт прикладной математики и механики АН УССР