УДК 517.521.8

Теоремы тауберова типа для двойных рядов, суммируемых методами Чезаро

М. А. Калаталова

В этой работе из (C)-свойства методов Чезаро суммирования двойных рядов, доказанного в работе [1], мы получаем ряд теорем тауберова типа для двойных рядов, суммируемых методами Чезаро.

Число a, конечное или бесконечное, называется частичным пределом двойной последовательности $S_{m,n}$, если найдется подпоследовательность S_{m_k,n_k}, сходящаяся к a при $m_k \to \infty$, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Лемма 1. *Пусть частичные суммы* $S_{m,n} = \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{l=0}^{n} a_{k,l}$ *двойного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ *удовлетворяют условиям:*

$$\overline{\lim_{k,m,n\to\infty}} |S_{m,n} - S_{m,n_k}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,m,n\to\infty}} |S_{m,n} - S_{m_k,n}| = r < \infty, \tag{1}$$

где $m_k \to \infty, n_k \to \infty$, *таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих ниже требований:*

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \quad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1, \tag{1'}$$

$$1 < \frac{n_k}{n} \to 1, \quad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1, \tag{2}$$

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \quad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1, \tag{3}$$

$$1 < \frac{n_k}{n} \to 1, \quad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1, \tag{4}$$

причем m_k *и* n_k — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел.*

Тогда каждый круг K_{2r} $(|z - a| \leqslant 2r)$ *радиуса* $2r$ *с центром в точке* a, *являющейся конечным частичным пределом подпоследовательности* $S_{m_k,n_k} = \sum\limits_{i=0}^{m_k} \sum\limits_{l=0}^{n_k} a_{i,l}$, *является* ($C$)-*множеством последовательности* $S_{m,n}$.

Если бесконечно удаленная точка является частичным пределом последовательности S_{m_k,n_k}, *то она является бесконечно удаленной* (C)-*точкой последовательности* $S_{m,n}$.

Доказательство. Из (1) при $m=m_k$, $n=n_k$ получаем соответственно

$$\overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n}{n_k}\to 1}}} |S_{m_k,n}-S_{m_k,n_k}|=r'\leqslant r<\infty,\quad \overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1}}} |S_{m,n_k}-S_{m_k,n_k}|=$$
$$=r''\leqslant r<\infty. \qquad (1'')$$

Если для любого $\varepsilon>0$ $S_{m,n}\in K_{2r+\varepsilon}(|z-a|\leqslant 2r+\varepsilon)$ для $m,n>N(\varepsilon)$, то круг $K_{2r}(|z-a|\leqslant 2r)$, очевидно, является (C)-множеством последовательности $S_{m,n}$.

Предположим, что среди частичных пределов последовательности $S_{m,n}$ есть по крайней мере один, не принадлежащий кругу $K_{2r}(|z-a|\leqslant 2r)$. Возьмем любое число $\varepsilon>0$ и подпоследовательность S_{m_k,n_k}, сходящуюся к a при $k\to\infty$.

Можем считать, что все $S_{m_k,n_k}\in K_{\varepsilon/4}\left(|z-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\right)(k=1,2,\ldots)$. Пусть $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ —первая после $S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ частная сумма в строке m_{k_ν}, не принадлежащая $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a|\leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Если такая частная сумма существует для каждого ν, то

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}}=\lambda_1>1. \qquad (5)$$

Докажем это. Пусть (5) не выполняется, тогда найдется подпоследовательность $\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}}$, сходящаяся к единице, т. е. $\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}}\to 1\,(i\to\infty)$.

Имеем:

а) $|S_{m_{k_{\nu_i}},n'_{k_{\nu_i}}}-S_{m_{k_{\nu_i}},n_{k_{\nu_i}}}|>r+\frac{\varepsilon}{4}$ $(i=1,2,\ldots)$ по построению последовательности $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$;

б) $\overline{\lim_{\substack{i\to\infty\\ 1<\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}}\to 1}}}|S_{m_{k_{\nu_i}},n'_{k_{\nu_i}}}-S_{m_{k_{\nu_i}},n_{k_{\nu_i}}}|\leqslant r$ по первому из условий $(1'')$.

Полученное противоречие доказывает соотношение (5).

Если частной суммы $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ не существует для некоторого ν, т. е. $S_{m_{k_\nu},l}\in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a|\leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $n_{k_\nu}\leqslant l<\infty$, то в качестве $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ возьмем любую частную сумму $S_{m_{k_\nu},n'_{k\nu}}$, для которой $\frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}}\geqslant 2$-

Таким образом, $S_{m_{k_\nu},l}\in K_{r+r/2}$ для $n_{k_\nu}\leqslant l\leqslant n'_{k_\nu}-1$, причем

$$\frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}}\geqslant\lambda>1,\quad 1<\lambda\leqslant\min\{\lambda_1,2\}\text{ для }\nu\geqslant N(\varepsilon). \qquad (6)$$

Пусть $S_{m'_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ — первая после $S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ частная сумма в столбце n_{k_ν}, не принадлежащая $K_{r+\varepsilon/2}(|z-a|\leqslant r+\varepsilon/2)$, тогда аналогично доказываем,

что
$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{m'_{k_\nu} - 1}{m_{k_\nu}} = \lambda_2 > 1.$$

Если $S_{m'_{k_\nu}, n_{k_\nu}}$ не существует для некоторого ν, т. е. $S_{i, n_{k_\nu}} \in K_{r+\varepsilon/2} \times \times (|z - a| \leqslant r + \varepsilon/2)$ для $m_{k_\nu} \leqslant i < \infty$, то в качестве $S_{m'_{k_\nu}, n_{k_\nu}}$ возьмем любую частную сумму $S_{m'_{k_\nu}, n_{k_\nu}}$, для которой $\dfrac{m'_{k_\nu} - 1}{m_{k_\nu}} \geqslant 2$.

Таким образом, $S_{i, n_{k_\nu}} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \left(|z - a| \leqslant r + \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$ для $m_{k_\nu} \leqslant i \leqslant m'_{k_\nu} - - 1$, причем
$$\frac{m'_{k_\nu} - 1}{m_{k_\nu}} \geqslant \lambda'_2 > 1, \quad 1 < \lambda'_2 \leqslant \min\{\lambda_2, 2\}, \quad \nu \geqslant N_1(\varepsilon). \tag{7}$$

Рассмотрим последовательность прямоугольников индексов
$$L_\nu : m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m'_{k_\nu} - 1, \quad n_{k_\nu} \leqslant n \leqslant n'_{k_\nu} - 1, \quad \nu \geqslant N_2 = \max\{N(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}.$$

Возможны два случая.

1. Существует подпоследовательность прямоугольников индексов
$$L_{\nu_i} : m_{k_{\nu_i}} \leqslant m \leqslant m'_{k_{\nu_i}} - 1, \quad n_{k_{\nu_i}} \leqslant n \leqslant n'_{k_{\nu_i}} - 1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$
такая, что для каждой пары индексов $(m, n) \in L_{\nu_i}$ справедлива принадлежность $S_{m,n} \in K_{2r+\varepsilon}(|z - a| \leqslant 2r + \varepsilon)$; тогда из (6) и (7) следует, что круг $K_{2r}(|z - a| \leqslant 2r)$ является (C)-множеством последовательности $S_{m,n}$.

2. Для каждого L_ν при $\nu \geqslant N_2$ существует точка $(m^*_{k_\nu}, n^*_{k_\nu}) \in L_\nu$ такая, что
$$S_{m^*_{k_\nu}, n^*_{k_\nu}} \,\overline{\in}\, K_{2r+\varepsilon}(|z - a| \leqslant 2r + \varepsilon).$$

Таких точек может быть несколько. Через $(m^*_{k_\nu}, n^*_{k_\nu})$ обозначаем ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки (m_{k_ν}, n_{k_ν}), а если и этих точек будет несколько, то обозначаем через $(m^*_{k_\nu}, n^*_{k_\nu})$ ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки m_{k_ν}.

Покажем, что
$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{m^*_{k_\nu} - 1}{m_{k_\nu}} = \lambda^*_1 > 1, \quad \varliminf_{\nu \to \infty} \frac{n^*_{k_\nu} - 1}{n_{k_\nu}} = \lambda^*_2 > 1. \tag{8}$$

Пусть не выполняется, например, первое из соотношений (8). Тогда найдется подпоследовательность $\dfrac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}}$, сходящаяся к единице при $i \to \infty$,
$$\frac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}} \to 1 \quad (i \to \infty).$$

По построению последовательности $S_{m^*_{k_\nu}, n^*_{k_\nu}}$ имеем
$$|S_{m^*_{k_{\nu_i}}, n^*_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}}, n^*_{k_{\nu_i}}}| > r + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

а по второму из условий $(1'')$ —

$$\varlimsup_{\substack{i\to\infty\\ 1<\frac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}}\to 1}} |S_{m^*_{k_{\nu_i}},n^*_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}},n^*_{k_{\nu_i}}}| \leqslant r.$$

Полученное противоречие доказывает соотношения (8). Таким образом, $S_{m,n} \in K_{2r+\varepsilon}(|z-a| \leqslant 2r+\varepsilon)$ для $m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m^*_{k_\nu}-1$, $n_{k_\nu} \leqslant n \leqslant n^*_{k_\nu}-1$, $\nu \geqslant N_2$. Отсюда и из (8) следует, что круг $K_{2r}(|z-a| \leqslant 2r)$ — (C)-множество последовательности $S_{m,n}$.

Пусть бесконечно удаленная точка является частичным пределом подпоследовательности S_{m_k,n_k}.

Тогда найдется подпоследовательность $S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ такая, что

$$S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}} \to \infty\ (\nu \to \infty),\ |S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}} - S_{m_{k_{\nu+1}},n_{k_{\nu+1}}}| > 9r.$$

Обозначим через $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ первую после $S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ частную сумму в строке с номером m_{k_ν}, которая не принадлежит кругу $Q_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}| \leqslant 2r)$.

Если такая частная сумма существует для каждого ν, то

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}} = \lambda_2 > 1. \tag{9}$$

Пусть это не так, тогда найдется подпоследовательность $\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}}$, сходящаяся к единице при $i\to\infty$, $\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}} \to 1 \quad (i\to\infty)$.

По построению последовательности $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ имеем

$$|S_{m_{k_{\nu_i}},n'_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}},n_{k_{\nu_i}}}| > 2r, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

но по первому из условий $(1'')$ —

$$\varlimsup_{\substack{i\to\infty,\\ 1<\frac{n'_{k_{\nu_i}}}{n_{k_{\nu_i}}}\to 1}} |S_{m_{k_{\nu_i}},n'_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}},n_{k_{\nu_i}}}| \leqslant r.$$

Полученное противоречие доказывает соотношение (9).

Если указанной выше частной суммы $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ не существует для некоторого ν, т.е. $S_{m_{k_\nu},l} \in Q_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}| \leqslant 2r)$ для $n_{k_\nu} \leqslant l < \infty$, то в качестве $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$ возьмем любую частную сумму $S_{m_{k_\nu},n'_{k_\nu}}$, для которой $\frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}} \geqslant 2$.

Таким образом, $S_{m_{k_\nu},l} \in Q_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}| \leqslant 2r)$ для $n_{k_\nu} \leqslant l \leqslant n'_{k_\nu}-1$, причем

$$\frac{n'_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}} \geqslant \lambda'_3 > 1, \quad 1 < \lambda'_3 \leqslant \lambda_3, \quad \nu \geqslant N. \tag{10}$$

Если $S_{m'_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ — первая частная сумма после $S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ в столбце с номером n_{k_ν}, не принадлежащая $Q_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}|\leqslant 2r)$, то аналогично рассмотренному выше докажем, что $\underset{\nu\to\infty}{\underline{\lim}}\dfrac{m^*_{k_\nu}-1}{m_{k_\nu}}=\lambda_4>1$.

Если названной частной суммы $S_{m'_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ не существует для некоторого ν, т.е. $S_{i,n_{k_\nu}}\in Q_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}|\leqslant 2r)$ для $m_{m_{k_\nu}}\leqslant i<\infty$, то в качестве $S_{m'_{k_\nu},n_{k_\nu}}$ возьмем любую частную сумму $S_{m'_{k_\nu},n_{k_\nu}}$, для которой $\dfrac{m'_{k_\nu}-1}{m_{k_\nu}}\geqslant 2$.

Таким образом, $S_{i,n_{k_\nu}}\in Q_\nu$ для $m_{k_\nu}\leqslant i\leqslant m'_{k_\nu}-1$, причем

$$\frac{m'_{k_\nu}-1}{m_{k_\nu}}\geqslant\lambda'_4>1,\quad 1<\lambda'_4\leqslant\min\{\lambda_4,2\},\quad \nu\geqslant N_1. \tag{11}$$

Рассмотрим последовательность прямоугольников индексов

$$L_\nu: m_{k_\nu}\leqslant m\leqslant m'_{k_\nu}-1,\quad n_{k_\nu}\leqslant n\leqslant n'_{k_\nu}-1,\quad \nu\geqslant N_2=\max\{N,N_1\}.$$

Возможны для случая.

1. Существует подпоследовательность прямоугольников индексов

$$L_{\nu_i}: m_{k_{\nu_i}}\leqslant m\leqslant m'_{k_{\nu_i}}-1,\quad n_{k_{\nu_i}}\leqslant n\leqslant n'_{k_{\nu_i}}-1,\quad i=1,2,\ldots,$$

такая, что для каждой пары индексов $(m,n)\in L_{\nu_i}$ справедлива принадлежность $S_{m,n}\in Q'_{\nu_i}(|z-S_{m_{k_{\nu_i}},n_{k_{\nu_i}}}|\leqslant 4r)$.

Тогда из (10) и (11) следует, что бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

2. Для каждого L_ν при $\nu\geqslant N_2$ существует точка $(m^*_{k_\nu},n^*_{k_\nu})$, принадлежащая L_ν, такая, что $S_{m^*_{k_\nu},n^*_{k_\nu}}\overline{\in}Q'_\nu(|z-S_{m_{k_\nu},n_{k_\nu}}|\leqslant 4r)$.

Таких точек может быть несколько. Через $(m^*_{k_\nu},n^*_{k_\nu})$ обозначаем ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки (m_{k_ν},n_{k_ν}), а если и этих точек окажется несколько, то через $(m^*_{k_\nu},n^*_{k_\nu})$ обозначаем ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки m_{k_ν}.

Покажем, что

$$\underset{\nu\to\infty}{\underline{\lim}}\frac{m^*_{k_\nu}-1}{m_{k_\nu}}=\lambda^*_3>1,\quad \underset{\nu\to\infty}{\underline{\lim}}\frac{n^*_{k_\nu}-1}{n_{k_\nu}}=\lambda^*_4>1. \tag{12}$$

Пусть не выполняется, например, первое из соотношений (12).

Тогда найдется подпоследовательность $\dfrac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}}$, сходящаяся к единице при $i\to\infty$, $\dfrac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}}\to 1\quad (i\to\infty)$.

По построению последовательности $S_{m^*_{k_\nu},n^*_{k_\nu}}$ имеем

$$|S_{m^*_{k_{\nu_i}},n^*_{k_{\nu_i}}}-S_{m_{k_{\nu_i}},n^*_{k_{\nu_i}}}|>2r,\quad i=1,2,\ldots,$$

но по второму из условий $(1'')$ —

$$\varlimsup_{\substack{i\to\infty,\\ 1<\frac{m^*_{k_{\nu_i}}}{m_{k_{\nu_i}}}\to 1}} |S_{m^*_{k_{\nu_i}}, n^*_{k_{\nu_i}}} - S_{m_{k_{\nu_i}}, n^*_{k_{\nu_i}}}| \leqslant r.$$

Полученное противоречие доказывает соотношения (12).

Таким образом, $S_{m,n} \in Q'_\nu(|z - S_{m_{k_\nu}, n_{k_\nu}}| \leqslant 4r)$ для $m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m^*_{k_\nu} - 1$, $n_{k_\nu} \leqslant n \leqslant n^*_{k_\nu} - 1$, $\nu \geqslant N_2$; и так как $S_{m_{k_\nu}, n_{k_\nu}} \to \infty$, то отсюда и из (12) следует, что бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Аналогично можно показать справедливость утверждения леммы и при выполнении каждого из условий (2)—(4).

Следствие 1. *Каждый частичный предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности S_{m_k, n_k} частных сумм двойного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$, где m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, при выполнении условий:*

$$\lim_{k,m,n\to\infty} (S_{m,n} - S_{m,n_k}) = 0, \quad \lim_{k,m,n\to\infty} (S_{m,n} - S_{m_k,n}) = 0, \tag{13}$$

причем $m_k \to \infty$, $n_k \to \infty$ таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих ниже требований:

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \quad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1, \quad 1 < \frac{n_k}{n} \to 1, \quad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1,$$

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \quad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1, \quad 1 < \frac{n_k}{n} \to 1, \quad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1,$$

является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Следствие 1 является частным случаем леммы 1 при $r = 0$.

Следствие 2. *Каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности частных сумм $S_{m,n}$ двойного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ при выполнении условий:*

$$\lim_{\substack{m,n,n'\to\infty,\\ 1<\frac{n'}{n}\to 1}} (S_{m,n'} - S_{m,n}) = 0, \quad \lim_{\substack{m,n,m'\to\infty\\ 1<\frac{m'}{m}\to 1}} (S_{m',n} - S_{m,n}) = 0 \tag{14}$$

является (C)-точкой этой последовательности.

Следствие 2 получается из следствия 1 при $n_k = k$, $m_k = k$, $n = n'$, $m = m'$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Следствие 3. *Если члены двойного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}$ являются комплексными числами, удовлетворяющими условиям:*

$$|a_{k,l}| \leqslant \frac{M}{k^2 + l^2}, \quad k + l > 0, \tag{15}$$

то каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности частных сумм $S_{m,n}$ этого двойного ряда является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий (15) выполняются и условия (14) Имеем

$$|S_{m,n'} - S_{m,n}| = \left|\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=n+1}^{n'} a_{k,l}\right| \leqslant M \sum_{l=n+1}^{n'} \frac{1}{l^2} + M \sum_{l=n+1}^{n'} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2+l^2} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{l=n+1}^{n'} \frac{1}{l^2} + M \sum_{l=n+1}^{n'} \int_0^m \frac{dx}{x^2+l^2} < M \sum_{l=n+1}^{n'} \frac{1}{l^2} + M \sum_{l=n+1}^{n'} \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{m}{l} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{\pi}{2} \ln \frac{n'}{n} + o(1).$$

Отсюда $|S_{m,n'} - S_{m,n}| \to 0$ при $m, n \to \infty$, $1 < \frac{n'}{n} \to 1$.

Аналогично проверяется выполнимость второго из условий (14).

Следствие 4. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n'}$ *члены которого являются комплексными числами, удовлетворяющими условиям:*

$$|a_{m,n}| \leqslant \frac{M}{m^2+n^2}, \quad m_k \leqslant m \leqslant m'_p < m_k + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n_l \leqslant n \leqslant n'_l < n_{l+1},$$

причем

$$\frac{m'_k}{m_k} \geqslant \lambda > 1, \quad \frac{n'_l}{n_l} \geqslant \lambda > 1, \quad k = 1\ 2, \ldots; \ l = 1, 2, \ldots,$$

где число $\lambda > 1$ *и последовательности* m_k, m'_k, n_l, n'_l *заданы.*

Тогда каждый частичный предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности $S_{p_i q_i} = \sum\limits_{k=0}^{p_i} \sum\limits_{l=0}^{q_i} a_{k,l'}$ *где* $m_{k_i} \leqslant p_i \leqslant m'_{k_i}; n_{l_i} \leqslant q_i \leqslant n'_{l_i'}$ *является* (*C*)-*точкой последовательности* $S_{m,\,n'}$

Это следствие доказывается так же, как и следствие 3.

Лемма 2. *Пусть дан двойной ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n'}$ *члены которого удовлетворяют условию:* $a_{m,n} = 0$ для $(m, n) \neq (m_k, n_l)$, *причем*

$$\frac{m_{k+1}}{m_k} \geqslant \lambda > 1, \quad \frac{n_{l+1}}{n_l} \geqslant \lambda > 1 \ (k = 1, 2, \ldots, \ l = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

где число $\lambda > 1$ *и последовательности* m_k, n_l *наперед заданы.*

Тогда каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности $S_{m,n}$ *является* (*C*)-*точкой этой последовательности.*

Доказательство. Пусть S' — конечный частичный предел последовательности $S_{m,n}$. Тогда найдется подпоследовательность S_{p_ν, q_ν}, сходящаяся к S' при $\nu \to \infty$.

Можем считать, что все S_{p_ν, q_ν} принадлежат ε-окрестности точки S'. Рассмотрим прямоугольники индексов с вершинами в точках (m_k, n_l): $m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1} - 1$, $n_l \leqslant n \leqslant n_{l+1} - 1$ $(k = 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots)$. Эти прямоугольники покрывают часть плоскости, находящейся в первой четверти, где $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

Можно указать последовательность прямоугольников индексов

$$L_i : m_{k_i} \leqslant m \leqslant m_{k_i+1} - 1, \ n_{l_i} \leqslant n \leqslant n_{l_i+1} - 1, \ l = 1, 2, \ldots,$$

такую, что $m_{k_i} \leqslant p_{\nu_i} \leqslant m_{k_i+1} - 1$, $n_{l_i} \leqslant q_{\nu_i} \leqslant n_{l_i+1} - 1$.

Ясно, что для всех пар индексов $(m, n) \in L_i$ имеем

$$S_{m,n} = S_{m_{k_i}, n_{l_i}} = S_{p_{\nu_i}, q_{\nu_i}}.$$

Таким образом, $S_{m,n}$ принадлежат ε-окрестности точки S' для $m_{k_i} \leqslant \leqslant m \leqslant m_{k_i+1} - 1$, $n_{l_i} \leqslant n \leqslant n_{l_{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots$; отсюда и из условий (16) следует, что S' является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Пусть бесконечно удаленная точка является частичным пределом последовательности $S_{m,n}$, тогда найдется подпоследовательность S_{p_i, q_i}, сходящаяся к бесконечности при $i \to \infty$:

$$S_{p_i, q_i} \to \infty \quad (i \to \infty). \tag{17}$$

Можно указать последовательность прямоугольников индексов

$$L_\nu : m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m_{k_\nu+1} - 1, \quad n_{l_\nu} \leqslant n \leqslant n_{l_\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

такую, что $m_{k_\nu} \leqslant p_{i_\nu} \leqslant m_{k_\nu+1} - 1$, $n_{l_\nu} \leqslant q_{i_\nu} \leqslant n_{l_\nu+1} - 1$.

Ясно, что для всех пар индексов $(m, n) \in L_\nu$ имеем: $S_{m,n} = S_{m_{k_\nu}, n_{k_\nu}} = = S_{p_{i_\nu}, q_{i_\nu}}$.

Таким образом, $S_{m,n}$ принадлежит кругу $Q_\nu (|z - S_{p_{i_\nu}, q_{i_\nu}}| \leqslant 1)$ для $m_{k_\nu} \leqslant m \leqslant m_{k_\nu+1} - 1$, $n_{l_\nu} \leqslant n \leqslant n_{l_\nu+1} - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Отсюда и из условий (16) и (17) следует, что бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.

Перейдем к доказательству теорем тауберова типа.

Теорема 1. *Пусть дан двойной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$, *частные суммы которого* $S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}$ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\substack{m,n,n' \to \infty, \\ 1 < \frac{n'}{n} \to 1}} (S_{m,n'} - S_{m,n}) = 0, \qquad \lim_{\substack{m,n,m' \to \infty, \\ 1 < \frac{m'}{m} \to 1}} (S_{m',n} - S_{m,n}) = 0.$$

Если $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = S (C, p, q)$ *(p, q — натуральные числа), то* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S$.

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ *ограничены, то множество частичных пределов частных сумм данного двойного ряда ограничено.*

Первая часть теоремы при $p = q = 1$ ранее была доказана К. Кноппом [2].

Следствие 5. *Пусть члены двойного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}$ *являются комплексными числами, удовлетворяющими условиям:* $|a_{k,l}| \leqslant \frac{M}{k^2 + l^2}$, $k + l > 0$.

Если $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S (C, p, q)$ *(p, q — натуральные числа), то* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S$.

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ ограничены, то множество частичных пределов частных сумм этого двойного ряда ограничено.

Первая часть следствия при $p = q = 1$ доказана К. Кноппом [2].

Теорема 2. *Пусть дан двойной ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$, члены которого удовлетворяют условию*

$$a_{m,n} = 0, \qquad (m, n) \neq (m_k, n_l),$$

причем $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geqslant \lambda > 1$, $\frac{n_{l+1}}{n_l} \geqslant \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots,$ где число $\lambda > 1$ и последовательности m_k, n_l наперед заданы.

Если $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = S(C, p, q)$ (p, q—натуральные числа). то $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = S.$

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ ограничены, то множество частичных пределов частных сумм данного двойного ряда ограничено.

Теорема 3. *Пусть дан ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ и пусть каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности частных сумм $S_{m,n}$ этого ряда является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.*

Если $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = S(C, p, q)$ (p, q—натуральные числа), то $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = S.$

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ ограничены, то множество частичных пределов последовательности частных сумм $S_{m,n}$ ограничено.

Доказательство. Прежде всего заметим, что теоремы 1 и 2 являются частными случаями теоремы 3.

В самом деле, при условии каждой из теорем 1 и 2 всякий частичный предел последовательности частных сумм ряда, конечный или бесконечный, является (C)-точкой этой последовательности. Это было показано в следствиях 2, 3 леммы 1 и в лемме 2. Поэтому доказательства требует только теорема 3. Теорема 3 является простым следствием (C)-свойства методов Чезаро суммирования двойных рядов.

Действительно, бесконечно удаленная точка не может быть частичным пределом последовательности частных сумм.

В самом деле, если бы бесконечно удаленная точка была частичным пределом последовательности $S_{m,n}$, то по условию теоремы бесконечно удаленная точка была бы (C)-точкой этой последовательности, а по (C)-свойству ряд, для которого бесконечно удаленная точка является (C)-точкой, не может суммироваться (C, p, q)-методом (p, q — натуральные числа).

Следовательно, множество всех частичных пределов последовательности $S_{m,n}$ ограничено.

Последовательность двух различных конечных частичных пределов, суммируемая (C, p, q)-методом, не может иметь в силу (C)-свойства (C, p, q)-методов. Она может иметь только один частичный предел, поэтому $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = S.$

Если (C, p, q)-средние ограничены, то множество всех частичных пределов последовательности $S_{m,n}$ частичных сумм ограничено. Докажем это.

Допустим, что это множество неограничено, тогда бесконечно удаленная точка будет являться частичным пределом последовательности $S_{m,n}$.

По условию теоремы бесконечно удаленная точка будет являться (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$, а тогда по (C)-свойству средние (C, p, q) (p, q — натуральные числа) неограничены.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения второй части теоремы.

Теорема 4. *Пусть даны двойной ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ *и возрастающие последовательности* m_k и n_k *натуральных чисел и пусть частные суммы этого ряда удовлетворяют условиям:*

$$\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n}{n_k}\to 1}} (S_{m,n}-S_{m,n_k})=0, \qquad \lim_{\substack{k,m,n\to\infty\\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1}} (S_{m,n}-S_{m_k,n})=0,$$

$$\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m_k}{m}\to 1}} (S_{m_k,n}-S_{m,n})=0, \qquad \lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n_k}{n}\to 1}} (S_{m,n_k}-S_{m,n})=0,$$

$$\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n}{n_k}\to 1}} (S_{m,n}-S_{m,n_k})=0, \qquad \lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m_k}{m}\to 1}} (S_{m_k,n}-S_{m,k})=0,$$

$$\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1}} (S_{m,n}-S_{m,n}-S_{m_k,n})=0, \qquad \lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n_k}{n}\to 1}} (S_{m,n_k}-S_{m,n})=0.$$

Если $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}=S(C,\ p,\ q)$ $(p,\ q$ *— натуральные числа), то* $\lim_{k\to\infty} S_{m_k,n_k}=S.$

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ *ограничены, то множество всех частичных пределов подпоследовательности* S_{m_k,n_k} *ограничено.*

Теорема 5. *Пусть дан ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$, *члены которого являются комплексными числами, удовлетворяющими условиям:* $|a_{m,n}|\leqslant \frac{M}{m^2+n^2}$, $m_k\leqslant m\leqslant m_k'<m_{k+1}$, $n=0,1,2,\dots,m=0,1,2,\dots,n_l\leqslant n\leqslant n_l'<n_{l+1}$, *причем* $\frac{m_k'}{m_k}\geqslant\lambda>1$, $\frac{n_l''}{n_l}\geqslant\lambda>1$, $k=1,2,\dots,l=1,2,\dots$, *где число* $\lambda>1$ *и последовательности* m_k, m_k', n_l, n_l' *заданы*

Если $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}=S(C,p,q)$ $(p,q$ *— натуральные числа), то* $\lim_{i\to\infty} S_{p_i,q_i}=$ $=S,\ m_{k_i}\leqslant p_i\leqslant m_{k_i}',\ n_{l_i}\leqslant q_i\leqslant n_{l_i}'.$

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ *ограничены, то множество всех частичных пределов подпоследовательности* S_{p_i,q_i} *ограничено.*

Теорема 6. *Пусть члены двойного ряда* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ *удовлетворяют условию:* $a_{m,n}=0$ *для* $m_k\leqslant m\leqslant m_k'<m_{k+1}$, $0\leqslant n\leqslant n_k$; $0\leqslant m\leqslant m_k'<m_{k+1}$, $n_k\leqslant n\leqslant n_k'<n_{k+1}$, *причем* $\frac{m_k'}{m_k}\geqslant\lambda>1$, $\frac{n_k'}{n_k}\geqslant\lambda>1$, $k=1,2,\dots$, *где число* $\lambda>1$ *и последовательности* m_k, m_k', n_k, n_k' *заданы.*

Если $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}=S(C,p,q)$ $(p,q$ *— натуральные числа), то* $\lim_{k\to\infty} S_{m_k,n_k}=S.$

Если средние $\sigma^{p,q}_{m,n}$ ограничены, то множество всех частичных пределов подпоследовательности S_{m_k,n_k} ограничено.

Теорема 7. *Пусть даны двойной ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ и возрастающие последовательности натуральных чисел m_k и n_k и пусть каждый частичный предел подпоследовательности S_{m_k,n_k}, конечный или бесконечный, является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$.*

Если $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}=S\,(C, p, q)$ (p, q—натуральные числа), то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k,n_k}=S$.

Если средние $\sigma^{p,q}_{m,n}$ ограничены, то множество всех частичных пределов подпоследовательности S_{m_k,n_k} ограничено.

Доказательство. Теоремы 4—6 являются частным случаем теоремы 7. Действительно, при условии каждой из этих теорем всякий частичный предел, конечный или бесконечный, соответствующей подпоследовательности является (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$. Это было показано в следствиях 1,4 леммы 1 и в лемме 2. Поэтому доказательства требует только теорема 7.

Покажем, что при условиях теоремы бесконечно удаленная точка не может быть частичным пределом подпоследовательности S_{m_k,n_k}.

Действительно, если бы бесконечно удаленная точка была частичным пределом подпоследовательности S_{m_k,n_k}, то по условию теоремы бесконечно удаленная точка была бы (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$, а по (C)-свойству ряд, для которого бесконечно удаленная точка является (C)-точкой, не может суммироваться (C, p, q)-методом.

Двух различных конечных частичных пределов подпоследовательность $S_{m_k n,_k}$ иметь не может, так как каждый из них был бы (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$, а двух различных (C)-точек последовательность $S_{m,n}$ в силу (C)-свойства иметь не может, если она суммируется (C, p, q)-методом.

Подпоследовательность S_{m_k,n_k} может иметь только один частичный предел S'. По условию теоремы S' будет (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$. По (C)-свойству $S'=S$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k,n_k}=S$.

Утверждение первой части теоремы доказано.

Допустим, что множество частичных пределов подпоследовательности S_{m_k,n_k} неограничено, тогда бесконечно удаленная точка будет частичным пределом подпоследовательности S_{m_k,n_k}.

По условию теоремы бесконечно удаленная точка будет являться (C)-точкой последовательности $S_{m,n}$. По (C)-свойству средние $\sigma^{p,q}_{m,n}$ будут неограничены.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения второй части теоремы.

Теорема 8. *Пусть дан двойной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ и возрастающие последовательности m_k и n_k чисел натурального ряда и пусть*

$$\overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n}{a_k}\to 1}}} |S_{m,n}-S_{m,n_k}|=r<\infty, \qquad \overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m}{m_k}\to 1}}} |S_{m,n}-S_{m_k,n}|=r<\infty$$

или

$$\overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{n_k}{n}\to 1}}} |S_{m,n_k} - S_{m,n}| = r < \infty, \qquad \overline{\lim_{\substack{k,m,n\to\infty,\\ 1<\frac{m_k}{m}\to 1}}} |S_{m_k,n} - S_{m,n}| = r < \infty.$$

Если $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = S(C, p, q)$ *(p, q — натуральные числа), то* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S - S_{m_k,n_k}| \leqslant 2r$.

Если средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ *(p, q — натуральные числа) ограничены, то множество частичных пределов подпоследовательности* S_{m_k,n_k} *ограничено.*

Доказательство. По лемме 1 каждый круг $K_{2r}(|z-a|\leqslant 2r)$, где a — конечный частичный предел подпоследовательности S_{m_k,n_k}, является (C)-множеством последовательности $S_{m,n}$.

Поскольку $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = S(C, p, q)$, то по (C)-свойству S принадлежит кругу $K_{2r}(|z-a|\leqslant 2r)$. Таким образом, S принадлежит всем кругам $K_{2r}(|z-a|\leqslant 2r)$, т. е. каждый частичный предел подпоследовательности S_{m_k,n_k} отстоит от S на расстоянии, меньшем или равном $2r$.

Первая часть теоремы доказана.

Допустим, что множество частичных пределов подпоследовательности S_{m_k,n_k} неограничено.

Тогда бесконечно удаленная точка, будучи частичным пределом подпоследовательности S_{m_k,n_k}, по лемме 1 будет (C)-точкой последовательности $S_{m,k}$.

По (C)-свойству методов Чезаро средние $\sigma_{m,n}^{p,q}$ неограничены.

Полученное противоречие доказывает утверждение второй части теоремы.

В заключение благодарю Н. А. Давыдова за помощь, оказанную при написании данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Калаталова, (C)- Свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов, УМЖ, т. 23, № 3, 1971.
2. К. Кнорр, Limitierungs Umkehrsätre für Doppelfolgen math. Zeitshr., **45**, 1939, 573—589.
3. Н. А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., т. 38, № 4, 1956.
4. В. Г Челидзе, Некоторые вопросы теории двойных рядов, Ухань, Китай, 1958.

Поступила 24.VI 1969 г.,
после переработки — 11.I 1971 г.
Немешаевский совхоз-техникум