1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.949.2+517.929.4

Обоснование метода усреднения для дифференциально-разностных уравнений в гильбертовом пространстве

Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук

Рассмотрим координатное гильбертово пространство $\mathscr{H}$, элементами которого являются последовательности функций

$$\{x_1(t), x_2(t), \ldots\} = x(t),$$

удовлетворяющие в любой момент времени $\bar{t}$ условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(\bar{t})|^2 < \text{const}.$$

Норма в $\mathscr{H}$ вычисляется следующим образом:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

§ 1. Уравнения запаздывающего типа

Пусть $X(t, x(t), x(t-\Delta))$ — функция со значениями в $\mathscr{H}$, определенная на множестве $[0, \infty) \times D \times D$, где D — некоторая область (открытое множество) пространства $\mathscr{H}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Delta > 0$ — постоянная.

Обычными методами нетрудно установить, что если функция $X(t, x, y)$ непрерывна* (или суммируема) по t, равномерно ограничена на $[0, L) \times \times D \times D$ $(L > 0)$ и удовлетворяет условию Липшица по x, y, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = x(t)$ $(t > 0)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{для} \quad t \in [-\Delta, 0], \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция со значениями в $\mathscr{H}$, $\varphi(t) \in D$ при $t \in [-\Delta, 0]$.

* Здесь и в дальнейшем сходимость, непрерывность и дифференцируемость понимаются в сильном смысле.

Предположим, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x,y)\,dt = X_0(x,y) \tag{4}$$

равномерно относительно x, $y \in D$ и рассмотрим наряду с (2) усредненное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi,\xi) \tag{5}$$

при начальном условии

$$\xi(0) = x(0) = \varphi(0) = \xi_0. \tag{6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в области* $[0, \infty) \times D \times D$ *правая часть уравнения* (2) *удовлетворяет условиям:*

1) *существуют такие положительные постоянные* M *и* λ, *что для всех значений* $t \geqslant 0$ *и любых точек* x, x', $x'' \in D$ и y, y', $y'' \in D$ *выполняются условия:*

$$\| X(t,x,y) \| \leqslant M, \tag{7}$$

$$\| X(t,x',y') - X(t,x'',y'') \| \leqslant \lambda \{ \| x' - x'' \| + \| y' - y'' \| \}; \tag{8}$$

2) *равномерно по всем* $x \in D$, $y \in D$ *существует предел* (4).

Тогда, если $\xi = \xi(t)$ *есть решение задачи Коши* (5), (6), *определенное для всех* $t \in [-\Delta, \infty)$ *и принадлежащее вместе со своей* ϱ-*окрестностью области* D, *а* $x = x(t)$ — *решение задачи Коши* (2), (3), *то для любых сколь угодно малых* $\eta > 0$, $\varrho > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в интервале* $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство. Из условия (4) видно, что существует монотонно стремящаяся к нулю функция $f(t)$, для которой справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^t [X(\tau,x,y) - X_0(x,y)]\,d\tau \right\| \leqslant t f(t). \tag{9}$$

Определим функцию $F(\varepsilon)$:

$$F(\varepsilon) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant L} \left\| \tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\|. \tag{10}$$

Так как $F(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε, то можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место неравенства

$$F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}, \tag{11}$$

$$2\lambda L e^{2\lambda L}\left[\varepsilon\Delta\left(\frac{\nu_0}{2L} + \frac{M}{2}\right) + \sqrt{F(\varepsilon)}\left(M + \frac{1}{\lambda}\right) + F(\varepsilon)\right] < \frac{\eta^*}{2},$$

где $\eta^* = \min(\eta, \varrho)$.

Построим еще функцию $\bar{x}(t)$, совпадающую на сегменте $[-\Delta, 0]$ с решением $\zeta(t)$ уравнения (5), а в интервале $0 < t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ принадлежащую

ϱ-окрестности этого решения:

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}\xi(t)+\dfrac{\varepsilon}{a}\displaystyle\int_t^{t+a}d\tau'\int_0^t[X(\tau,\xi(\tau'),\xi(\tau'))-X_0(\xi(\tau'),\xi(\tau'))]\,d\tau, & t>0,\\ \xi(t), & t\leqslant 0,\end{cases}\tag{12}$$

где a — пока неопределенная положительная постоянная.

Действительно, при $-\Delta\leqslant t\leqslant 0$ $\bar{x}(t)$ совпадает с $\xi(t)$, а при $0<t\leqslant\leqslant\dfrac{L}{\varepsilon}$, согласно (9) — (11), имеем

$$\|\bar{x}(t)-\xi(t)\|=\left\|\frac{\varepsilon}{a}\int_t^{t+a}d\tau'\int_0^t[X(\tau,\xi(\tau'),\xi(\tau'))-X_0(\xi(\tau'),\xi(\tau'))]\,d\tau\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_t^{t+a}|tf(t)|\,d\tau'\leqslant\frac{1}{a}\int_t^{t+a}F(\varepsilon)\,d\tau'=F(\varepsilon)<\varrho,\tag{13}$$

т. е. функция $\bar{x}(t)$ $\left(0<t\leqslant\dfrac{L}{\varepsilon}\right)$ принадлежит ϱ-окрестности $\xi(t)$.

Найдем оценку нормы выражения $R(t)$ $(t\geqslant 0)$, определяемого равенством

$$R(t)=\frac{d\bar{x}(t)}{dt}-\varepsilon X(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\Delta)).\tag{14}$$

Для этого, принимая во внимание (12), запишем $R(t)$ в виде

$$R(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}+\frac{\varepsilon}{a}\int_t^{t+a}[X(t,\xi(\tau'),\xi(\tau'))-X_0(\xi(\tau'),\xi(\tau'))]\,d\tau'+$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int_0^t[X(\tau,\xi(t+a),\xi(t+a))-X_0(\xi(t+a),\xi(t+a))]\,d\tau-$$

$$-\frac{\varepsilon}{a}\int_0^t[X(\tau,\xi(t),\xi(t))-X_0(\xi(t),\xi(t))]\,d\tau-\varepsilon X(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\Delta))+$$

$$+\varepsilon X(t,\xi(t),\xi(t))-\varepsilon X(t,\xi(t),\xi(t)).\tag{15}$$

Из (15), учитывая (5), находим

$$\|R(t)\|\leqslant\|\varepsilon X_0(\xi(t),\xi(t))-\varepsilon X(t,\xi(t),\xi(t))+$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int_t^{t+a}[X(t,\xi(\tau'),\xi(\tau')-X_0(\xi(\tau'),\xi(\tau'))]\,d\tau'\|+$$

$$+\left\|\frac{\varepsilon}{a}\int_0^t[X(\tau,\xi(t+a),\xi(t+a))-X_0(\xi(t+a),\xi(t+a))]d\tau\right\|+$$

$$+\left\|\frac{\varepsilon}{a}\int_{0}^{t}[X(\tau, \xi(t), \xi(t))-X_0(\xi(t), \xi(t))]\,d\tau\right\|+\|\varepsilon X(t, \xi(t), \xi(t))-$$

$$-\varepsilon X(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\Delta))\|=I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (16)$$

На основании (8), (5) и (7) получаем

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{a}\int_{t}^{t+a}\|X(t, \xi(\tau'), \xi(\tau'))-X(t, \xi(t), \xi(t))\|\,d\tau'+$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int_{t}^{t+a}\|X_0(\xi(t), \xi(t))-X_0(\xi(\tau'), \xi(\tau'))\|\,d\tau' \leqslant \frac{4\varepsilon\lambda}{a}\int_{t}^{t+a}\|\xi(\tau')-\xi(t)\|\,d\tau' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\varepsilon\lambda}{a}\int_{t}^{t+a}\varepsilon M|\tau'-t|\,d\tau' \leqslant 2\varepsilon^2\lambda Ma. \qquad (17)$$

Далее, используя неравенство (7) и определение функции $F(\varepsilon)$, находим, что при $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ справедливы оценки

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{a}tf(t)=\frac{1}{a}\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{F(\varepsilon)}{a}, \qquad (18)$$

$$I_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{a}tf(t) \leqslant \frac{F(\varepsilon)}{a}. \qquad (19)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (16). В силу (8), (12), (5), (7), (9) и (10) при $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ получаем

$$I_4 \leqslant \varepsilon\lambda\{\|\xi(t)-\bar{x}(t)\|+\|\xi(t)-\bar{x}(t-\Delta)\|\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\lambda\left\|\frac{\varepsilon}{a}\int_{t}^{t+a}d\tau'\int_{0}^{t}[X(\tau, \xi(\tau'), \xi(\tau'))-X_0(\xi(\tau'), \xi(\tau')]\,d\tau\right\|+\varepsilon\lambda\|\xi(t)-\xi(t-\Delta)\|+$$

$$+\varepsilon\lambda\left\|\frac{\varepsilon}{a}\int_{t-\Delta}^{t-\Delta+a}d\tau'\int_{0}^{t-\Delta}[X(\tau, \xi(\tau'), \xi(\tau'))-X_0(\xi(\tau'), \xi(\tau'))]\,d\tau\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon\lambda}{a}\int_{t}^{t+a}F(\varepsilon)\,d\tau'+\varepsilon^2\lambda\Delta M+\frac{\varepsilon\lambda}{a}\int_{t-\Delta}^{t-\Delta+a}F(\varepsilon)\,d\tau'=\varepsilon^2\lambda\Delta M+2\varepsilon\lambda F(\varepsilon). \quad (20)$$

Таким образом, на основании (16)—(20) для нормы функции $R(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ имеет место оценка

$$\|R(t)\| \leqslant \varepsilon^2\lambda\Delta M+2\varepsilon^2\lambda Ma+\frac{2F(\varepsilon)}{a}+2\varepsilon\lambda F(\varepsilon) \quad (0<\varepsilon<\varepsilon_0). \qquad (21)$$

Рассмотрим теперь решение $x(t)$ задачи Коши (2), (3) и оценим разность $x(t)-\bar{x}(t)$. Так как, по условию теоремы, начальная функция $\varphi(t) \in D$ при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, то в некотором интервале $0<t<t^*$, где $t^* \leqslant$

$\leqslant \frac{T}{\varepsilon}$, $x(t)$ будет принадлежать области D и, следовательно, будет выполняться условие

$$\| X(t, x(t), x(t-\Delta)) - X(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\Delta)) \| \leqslant \lambda \{\| x(t) - \bar{x}(t) \| + \\ + \| x(t-\Delta) - \bar{x}(t-\Delta) \|\}.$$

Тогда из уравнений (2) и (14) получим

$$\left\| \frac{d[x(t) - \bar{x}(t)]}{dt} \right\| \leqslant \varepsilon \| X(t, x(t), x(t-\Delta)) - X(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\Delta)) \| + \| R(t) \|,$$

откуда, принимая во внимание предыдущее неравенство, можно записать

$$\left\| \frac{d[x(t) - \bar{x}(t)]}{dt} \right\| \leqslant \varepsilon\lambda \{\| x(t) - \bar{x}(t) \| + \| x(t-\Delta) - \bar{x}(t-\Delta) \| + \| R(t) \|.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t и учитывая, что

$$\left| \frac{d \| x(t) - \bar{x}(t) \|}{dt} \right| \leqslant \left\| \frac{d[x(t) - \bar{x}(t)]}{dt} \right\|,$$

а $x(0) = \bar{x}(0)$, получаем

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \| x(\tau) - \bar{x}(\tau) \| d\tau + \varepsilon\lambda \int_0^t \| x(\tau - \Delta) - \\ - \bar{x}(\tau - \Delta) \| d\tau + \int_0^t \| R(\tau) \| d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta + 2\varepsilon\lambda \int_0^t \| x(\tau) - \bar{x}(\tau) \| d\tau + \int_0^t \| R(\tau) \| d\tau \tag{22}$$

где $\nu_0 = \sup\limits_{t \in [-\Delta, 0]} \| \varphi(t) - \xi(t) \|$.

Обозначим

$$\int_0^t \| x(\tau) - \bar{x}(\tau) \| d\tau = v(t); \tag{23}$$

тогда неравенство (22) запишется в виде

$$v'(t) - 2\varepsilon\lambda v(t) \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta + \int_0^t \| R(\tau) \| d\tau.$$

Умножая это неравенство почленно на $e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}$ и интегрируя результат по τ от 0 до t, находим

$$\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)} v'(\tau) d\tau - 2\varepsilon\lambda \int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)} v(\tau) d\tau \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta \int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left[\int_0^\tau \| R(\tau') \| d\tau' \right] d\tau. \tag{24}$$

Так как $v(0) = 0$, то легко видеть, что левая часть неравенства (24) равна $v(t)$. Итак, имеем

$$v(t) \leqslant \frac{\nu_0\Delta}{2}(e^{2\varepsilon\lambda t} - 1) + \int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left[\int_0^\tau \| R(\tau') \| d\tau' \right] d\tau. \tag{25}$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (25):

$$\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\left[\int_0^\tau \| R(\tau')\| d\tau'\right] d\tau = -\frac{1}{2\varepsilon\lambda}\left[e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\int_0^\tau \| R(\tau')\| d\tau'\right]_0^t +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon\lambda}\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\| R(\tau)\| d\tau = -\frac{1}{2\varepsilon\lambda}\int_0^t \| R(\tau')\| d\tau' +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon\lambda}\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\| R(\tau)\| d\tau.$$

Тогда неравенство (25) примет вид

$$v(t) \leqslant \frac{\nu_0\Delta}{2}(e^{2\varepsilon\lambda t}-1)+\frac{1}{2\varepsilon\lambda}\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\| R(\tau)\| d\tau - \frac{1}{2\varepsilon\lambda}\int_0^t \| R(\tau')\| d\tau'.$$

Умножая это неравенство почленно на $2\varepsilon\lambda$ и учитывая обозначение (23), получаем

$$2\varepsilon\lambda\int_0^t \| x(\tau)-\bar{x}(\tau)\| d\tau \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta(e^{2\varepsilon\lambda t}-1)+\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\| R(\tau)\| d\tau -$$

$$-\int_0^t \| R(\tau')\| d\tau'. \tag{26}$$

Из (22) и (26) находим для нормы $\| x(t)-\bar{x}(t)\|$ следующую оценку:

$$\| x(t)-\bar{x}(t)\| \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta e^{2\varepsilon\lambda t}+\int_0^t e^{2\varepsilon\lambda(t-\tau)}\| R(\tau)\| d\tau, \tag{27}$$

верную для всех t из интервала $0<t<t^*$. Из (27), принимая во внимание (21) и учитывая, что $0<t<t^*$ $\left(t^*\leqslant\dfrac{L}{\varepsilon}\right)$, получаем

$$\| x(t)-\bar{x}(t)\| \leqslant \varepsilon\lambda\nu_0\Delta e^{2\lambda L}+e^{2\lambda L}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\frac{L}{\varepsilon}}[e^{-2\varepsilon\lambda\tau}\| R(\tau)\|]\frac{L}{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda L e^{2\lambda L}\left[\varepsilon\Delta\left(\frac{\nu_0}{2L}+\frac{M}{2}\right)+\varepsilon Ma+\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda a}+F(\varepsilon)\right].$$

Выберем теперь произвольную до сих пор величину a следующим образом:

$$a=\frac{\sqrt{F(\varepsilon)}}{\varepsilon},$$

тогда из предыдущего неравенства находим

$$\| x(t)-\bar{x}(t)\| \leqslant 2\lambda L e^{2\lambda L}\left[\varepsilon\Delta\left(\frac{\nu_0}{2L}+\frac{M}{2}\right)+\sqrt{F(\varepsilon)}\left(M+\frac{1}{\lambda}\right)+F(\varepsilon)\right],$$

откуда, в силу условий (11), получаем

$$\| x(t)-\bar{x}(t)\| < \frac{\eta^*}{2}.$$

Следовательно, для всех $0 < t < t^*$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливы оценки

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| < \frac{\eta}{2}, \quad \| x(t) - \bar{x}(t) \| < \frac{\varrho}{2}, \tag{28}$$

а так как при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}$, то из неравенств (13) и (28) вытекает, что

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta, \quad \| x(t) - \xi(t) \| < \frac{\varrho}{2} + F(\varepsilon) < \varrho.$$

С помощью тех же рассуждений, что и в случае обычных дифференциальных уравнений [1], нетрудно показать, что число t^* может быть взято равным $\frac{L}{\varepsilon}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если предположить, что в уравнении (2) запаздывание $\Delta = \Delta(t)$ — переменное, то для справедливости теоремы 1 в этом случае достаточно потребовать, чтобы, кроме условий 1), 2), выполнялись условия:

3) функция $\Delta(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$;

4) существует $\sup\limits_t \{\Delta(t), t \geqslant 0\} = \Delta_0$, причем $0 < \Delta_0 < \infty$.

Теорема 1 в случае малого запаздывания $\Delta = \varepsilon\Delta_1$ была сформулирована в [2].

§ 2. Уравнения нейтрального типа

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}$ уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X\left(t, x(t), x(t-\Delta), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t-\Delta)}{dt}\right) \tag{29}$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{для} \quad t \in [-\Delta, 0], \tag{30}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая начальная функция, причем $\varphi(t) \in D$, $\frac{d\varphi(t)}{dt} \in D$ при $t \in [-\Delta, 0]$.

Наряду с (29), (30) рассмотрим начальную задачу для усредненного уравнения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0\left(\xi, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\xi}{dt}\right), \tag{31}$$

$$\xi(0) = \varphi(0) = \xi_0, \tag{32}$$

где, как обычно,

$$X_0(x, y, u, v) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y, u, v)\, dt. \tag{33}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в области* $[0, \infty) \times D \times D \times D \times D$ *выполняются условия:*

1) *функция* $X(t, x, y, u, v)$ *ограничена и удовлетворяет условию Липшица по* x, y, u, v;

2) *функция* $X_0(x, y, u, v)$ *имеет ограниченные частные производные по* x, y, u, v;

3) *равномерно по всем* $x \in D$, $y \in D$, $u \in D$, $v \in D$ *существует предел* (33).

Тогда, если $\xi = \xi(t)$ *есть решение задачи Коши* (31), (32), *определенное для всех* $t \in [-\Delta, \infty)$, *и* $\xi(t)$, $\frac{d\xi(t)}{dt}$ *принадлежат области* D *вместе со своими* ρ*-окрестностями, а* $x = x(t)$ — *решение задачи Коши* (29), (30), *то для любых сколь угодно малых* $\eta > 0$, $\varrho > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в интервале* $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 (см. также [3]).

Замечание 2. При сделанных выше предположениях относительно уравнения (29) в качестве усредненного уравнения можно взять уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi, \xi, 0, 0).$$

В этом случае также справедлива теорема, аналогичная теореме 2.

Замечание 3. Доказанные выше утверждения позволяют в ряде случаев обосновать применимость метода усреднения к дифференциальным уравнениям в частных производных запаздывающего и нейтрального типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1963.
2. Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом, УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
3. В. И. Фодчук, Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, УМЖ, т. 20, № 2, 1968.

Поступила 29.IV 1971 г.
Институт математики АН УССР