1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.53

Структура главных идеалов одного кольца аналитических функций

Н. М. Осадчий

1. Как известно, Рудиным [1]* дано описание всех замкнутых идеалов кольца A функций, непрерывных в круге $U\{z : z \in \mathbf{C}, |z| \leqslant 1\}$ и аналитических внутри этого круга. Приведем этот результат.

Пусть I — ненулевой замкнутый идеал в A и E — множество точек единичной окружности $\Gamma\{|z| = 1\}$, на котором равны нулю все функции $f \in I$. Пусть $G(z)$ — наибольший общий делитель внутренних частей ненулевых функций из I. Тогда I совпадает с множеством вида Gg, где g пробегает все функции из A, равные нулю на E.

Насколько нам известно, для других колец аналитических функций столь полного описания структуры замкнутых идеалов не существует. Для колец H_n^2 $(n \geqslant 1)$ (определение см. ниже) В. С. Королевич получил описание главных идеалов при условии, что порождающий идеал I элемент $f \in H_n^2$ имеет конечное множество E нулей на окружности $|z| = 1$**.

В данной статье дается описание главных идеалов кольца H_1^2 при условии, что множество $E\{z : |z| = 1, f(z) = 0\}$ не более чем счетно. Применяемый нами метод позволяет решить аналогичную задачу и для колец H_n^2 $(n > 1)$.

2. Определение 1 (см. [3]). Пространство H_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — класс функций $f(z)$, голоморфных в круге $U\{|z| < 1\}$ и таких, что $f^{(n)} \in H^2$ $(H_0^2 = H^2)$, с нормой

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_{H^2} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \sup_{0 < r < 1} \left\{\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(re^{i\theta})|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Как показано в [4], H_n^2 при $n \geqslant 1$ — банахова алгебра с единицей $f(z) \equiv 1$.

Определение 2. Пусть E — замкнутое множество на единичной окружности $\Gamma\{|z| = 1\}$. Если выполняется одно из эквивалентных условий:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi_E(t)}{t} dt < \infty$, $\varphi_E(t) = \mathrm{mes}\{\theta : 0 \leqslant \theta < 2\pi, \varrho(e^{i\theta}) \leqslant t\}$, где $\varrho(z) = \min_{\zeta \in E} |z - \zeta|$;

---

* См. также [2, стр. 120—130].

** В. С. Королевич дополнительно предполагал, что $f(z) = f'(z) = \ldots = f^{(n-1)}(z) = 0$ $(z \in E)$.

2) $\int\limits_{\Gamma} \log \varrho(z)\,|dz| > -\infty$;

3) $\operatorname{mes} E = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tau_j \log \frac{1}{\tau_j} < \infty$

($\{\tau_j\}_1^{\infty}$ — последовательность длин дополнительных дуг множества E), то считают, что множество E удовлетворяет условию Берлинга — Карлесона.

Так как всякая функция $f(z) \in H_1^2$ на окружности Γ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = \frac{1}{2}$, то множество нулей E этой функции на Γ удовлетворяет условию Берлинга—Карлесона (см. [5, 6]).

Как известно [2, стр. 100], каждая функция $f(z) \in H^2$ допускает каноническую факторизацию $f(z) = B(z)\,S(z)\,F(z)$, где

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\alpha}_k (\alpha_k - z)}{|\alpha_k|(1 - \bar{\alpha}_k z)} \right]^{p_n}$$

—произведение Бляшке;

$$S(z) = \exp\left\{ -\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta) \right\}$$

— сингулярная функция ($d\mu(\theta)$ — положительная сингулярная мера на окружности Γ);

$$F(z) = \lambda \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta \right\} \quad (|\lambda| = 1) \text{ — внешняя функция.}$$

Следуя Берлингу, функцию $G(z) = B(z)\,S(z)$ назовем внутренней частью функции $f(z)$, а $F(z)$ — внешней частью функции.

Обозначим через $I_1\{G(z); E\}$ множество функций $g(z) \in H_1^2$, удовлетворяющих условиям:

1) $g(z) = 0$ $(z \in E)$;

2) $G(z)$ делит $g(z)$, т. е. если $g(z) = G_1(z)\,F_1(z)$, то $\frac{G_1(z)}{G(z)}$ — ограниченная в круге $|z| < 1$ функция.

Как показано в [4], $I_1\{G(z);\ E\}$ является замкнутым идеалом (быть может, тривиальным). Если идеал $I_1\{G(z);\ E\}$ не тривиальный, то множество E удовлетворяет условию Берлинга — Карлесона.

3. Основным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — некоторая функция из H_1^2 такая, что множество $E\{z: |z| = 1\ \ f(z) = 0\}$ не более чем счетно; пусть, далее, каноническая факторизация $f(z)$ имеет вид*:

$$f(z) = B(z)\,S(z)\,F(z)$$

где $B(z)\,S(z) = G(z)$ — внутренняя часть функции $f(z)$, а $F(z)$ — ее внешняя часть. Тогда идеал $I(f)$, порожденный функцией $f(z)$, совпадает с идеалом $I_1\{G(z); E\}$.

Для доказательства теоремы 1 используется такая теорема.

Теорема 2 (аппроксимации). *Какова бы ни была функция $g(z) \in H_1^2$, обращающаяся в нуль на конечном или счетном замкнутом множестве*

$E \subset \Gamma$, *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $K_\varepsilon(z) \in H_1^2$ *такая, что при* $\varrho(z) \to 0$ $(|z|=1)$ $K_\varepsilon(z) = o(\varrho^2(z))$ *и* $\|K_\varepsilon(z)g(z) - g(z)\|_{H_1^2} < \varepsilon$.

Доказательство теоремы 2. Если множество E конечно, то теорема, по существу, доказана в [3] (см. также [4]); поэтому предполагаем, что E счетно. Занумеруем дополнительные дуги S_j $(j = 1, 2, \ldots)$ множества E в порядке убывания из длин τ_j. Концами этих дуг являются или изолированные точки множества E, или же односторонние предельные точки этого множества. Обозначим множество концов дуг S_j $(j = 1, 2, \ldots)$ через E_0 $(E_0 \subset E$, причем $\overline{E}_0 = E)$. Если конец A_j дуги S_j находится по отношению к другому концу A_j' этой дуги так, что движение по S_j от точки A_j' до точки A_j совершается против часовой стрелки, то A_j обозначим через $e^{i\theta_j}$, а $A_j' - e^{i\theta_j'}$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. *Функция*

$$K_1(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\theta_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j}}\right]^{\log\frac{1}{\tau_j}} (\tau_1 < 1) \tag{1}$$

принадлежит пространству H^∞.

Доказательство. Сходимость произведения (1) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tau_j \log\frac{1}{\tau_j}}{ze^{-i\theta_j} - (1+\tau_j)}. \tag{2}$$

Пользуясь условием 3) определения 2, легко можно убедиться, что в любом круге $|z| \leqslant r < 1$ ряд (2) сходится абсолютно и равномерно, а, следовательно произведение (1) является регулярной функцией в круге $|z| < 1$. Кроме того, при $|z| \leqslant 1$ $|K_1(z)| < 1$, а поэтому $K_1(z) \in H^\infty$.

Введем функцию

$$K(z) = K_1(z) K_2(z), \tag{3}$$

где

$$K_2(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\theta_j'}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j'}}\right]^{\log\frac{1}{\tau_j}}, \tag{4}$$

а $K_1(z)$ задана равенством (1).

Лемма 2. *Существует постоянная* c *такая, что при* $\varrho(z) \to 0$ $|[K(z)]^c| = o(\varrho^2(z))$, *причем* $[K(z)]^c \in H_1^2$.

Доказательство. Допустим, что все $\tau_j < 1$*. Пусть $z \in S_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, тогда, учитывая, что

$$\frac{\varrho(z)}{\tau_j} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{\log\frac{1}{\tau_j}}{\log\frac{2}{\tau_j}} = 1,$$

---

*Если $\tau_j \geqslant 1$, $(j=1, \ldots, l$; $\max l = 6)$, множители $\dfrac{z - e^{i\theta_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j}}$ как и множители $\dfrac{z - e^{i\theta_j'}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j'}}$ $(j = 1, \ldots, l)$, входящие в (3), будем брать в степени $\log\dfrac{7}{\tau_j}$.

при $j > N_1$ имеем

$$|K(z)| < \left| \frac{z - e^{i\theta_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j}} \right|^{\log\frac{1}{\tau_j}} \left| \frac{z - e^{i\theta'_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta'_j}} \right|^{\log\frac{1}{\tau_j}} <$$

$$< \left[\frac{\varrho(z)}{\tau_j} \right]^{\log\frac{1}{\tau_j}} = \exp\left\{ \left(-\log\frac{1}{\varrho(z)} + \log\frac{1}{\tau_j} \right) \log\frac{1}{\tau_j} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\log\frac{1}{\varrho(z)} \frac{\log\frac{1}{\tau_j}\log 2}{\log\frac{2}{\tau_j}} \right\} \leqslant [\varrho(z)]\,\frac{\log 2}{2}. \tag{5}$$

Если же $z \in S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N_1)$, то

$$|K(z)| < \left| \frac{\varrho(z)}{\tau_{N_1}} \right]^{\log\frac{1}{\tau_{N_1}}}. \tag{6}$$

Используя (5) и (6), убеждаемся в справедливости первой части леммы 2.

Покажем теперь, что $[K(z)]^c \in H_1^2$. Из леммы 1 следует, что $[K(z)]^c \in H^2$. Беря логарифмическую производную, находим

$$\{[K(z)]^c\}' = [K(z)]^c \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} c\log\frac{1}{\tau_j} \frac{-\tau_j e^{i\theta_j}}{(z - e^{i\theta_j})[z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j}]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} c\log\frac{1}{\tau_j} \frac{-\tau_j e^{i\theta'_j}}{(z - e^{i\theta'_j})[z - (1+\tau_j)e^{i\theta'_j}]} \right\}$$

и, учитывая 3) определения 2 и доказанную часть данной леммы, получим

$$|\{[K(z)]^c\}'| < |[K(z)]^c| \frac{2c}{\varrho^2(z)} \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \log\frac{1}{\tau_j} \leqslant M_0,$$

т. е. $\{[K(z)]^c\}' \in H^2$. Лемма 2 доказана.

Введем функцию

$$\Phi_w^2(z; \alpha) = \left[\frac{z - e^{iw}}{z - (1+\alpha)e^{iw}} \right]^2 \quad (\alpha > 0),$$

где e^{iw} — произвольная точка множества E.

Лемма 3. *Для всякого $\varepsilon > 0$ и произвольной функции $g(z) \in H_1^2$, обращающейся в нуль в точках множества E, найдется $\alpha_\varepsilon > 0$ такое, что при всех $\alpha \leqslant \alpha_\varepsilon$*

$$\| \Phi_w^2(z; \alpha)\, g(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

для всех w таких, что $e^{iw} \in E$.

Доказательство. Очевидно, найдутся $\alpha_{1\varepsilon} > 0$ и $\alpha_{2\varepsilon} > 0$, что при $\alpha \leqslant \alpha_{1\varepsilon}$

$$\| \Phi_w^2(z; \alpha)\, g(z) - g(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{8}$$

а при $\alpha \leqslant \alpha_{2\varepsilon}$

$$\| \Phi_w^2(z; \alpha) g'(z) - g'(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{8} \tag{9}$$

для всех w.

Покажем еще, что существует $\alpha_{3\varepsilon} > 0$; при $\alpha \leqslant \alpha_{3\varepsilon}$

$$\| [\Phi_w^2(z; \alpha)]' g(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{8} \tag{10}$$

или, что то же,

$$\int_0^{2\pi} | g(e^{it}) |^2 \frac{\alpha^2 dt}{|e^{it} - (1+\alpha) e^{iw}|^4} < \frac{\varepsilon^2}{8^2}.$$

Произведя замену $t - w = \tau$ предыдущий интеграл перепишем так:

$$\alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{iw} e^{i\tau}|^2 d\tau}{|e^{i\tau} - (1+\alpha)|^4}. \tag{11}$$

Пользуясь неравенством Коши—Буняковского и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, легко убеждаемся, что $|g(e^{iw} e^{i\tau})| = o(|\tau|^{\frac{1}{2}})$ $(\tau \to 0)$ равномерно по $e^{iw} \in E$.

Обозначим $\varphi_w(\tau) = \dfrac{|g(e^{iw} e^{i\tau})|^2}{|\tau|}$. Функции $\varphi_w(\tau)$ в своей совокупности ограничены на окружности Γ и при $\tau \to 0$ равномерно по e^{iw} $\varphi_w(\tau) \to 0$.

Следовательно, функция

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \sup\limits_{e^{iw} \in E} \varphi_w(\tau), & -\pi \leqslant \tau \leqslant \pi, \\ \varphi(\pi), & \tau > \pi, \\ \varphi(-\pi), & \tau < -\pi \end{cases} \tag{12}$$

ограничена на $(-\infty, \infty)$ и

$$\lim_{\tau \to 0} \varphi(\tau) = 0. \tag{13}$$

Применяя неравенство $\frac{\tau}{\pi} \leqslant \sin \frac{\tau}{2}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \pi)$ и учитывая (12), имеем

$$\alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{iw} e^{i\tau})|^2 d\tau}{|e^{i\tau} - (1+\alpha)|^4} \leqslant \alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{iw} e^{i\tau})|^2 d\tau}{\left(\frac{4}{\pi^2} \tau^2 + \alpha^2\right)^2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{|\tau|}{\alpha} \frac{|g(e^{iw} e^{i\tau})|^2}{|\tau|} \frac{d\tau}{\alpha}}{\left[\frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^2} = \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|\tau| \varphi_w(\alpha\tau) d\tau}{\left(1 + \frac{4}{\pi^2} \tau^2\right)^2} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau| \varphi(\alpha\tau) d\tau}{\left(1 + \frac{4}{\pi^2} \tau^2\right)^2}.$$

В силу (13) найдется $\alpha_{3\varepsilon} > 0$, что когда $\alpha \leqslant \alpha_{3\varepsilon}$, то последний интеграл станет меньше $\frac{\varepsilon^2}{8^2}$, а следовательно, выполняется (10).

Полагая

$$\alpha_\varepsilon = \min\{1, \alpha_{1\varepsilon}, \alpha_{2\varepsilon}, \alpha_{3\varepsilon}\} \tag{14}$$

и учитывая (8)—(10), получим (7). Лемма 3 доказана.

Построим трансфинитную цепочку замкнутых множеств

$$E = E^{(0)} \supset E^{(1)} \supset \ldots \supset E^{(\omega)} \supset \ldots \supset E^{(\beta)} \supset \ldots$$

($\beta < \Omega$, где Ω — наименьшее число, принадлежащее классу (III)). При этом $E^{(\beta)} = [E^{(\beta-1)}]'$, когда трансфинитное число β не является предельным, и $E^{(\beta)} = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} E^{(\alpha)}$, когда β — предельное число.

Применяя принцип стационарности Кантора—Бера и используя счетность множества E, заключаем, что найдется первое трансфинитное число $\mu < \Omega$ такое, что $E^{(\mu)} = E^{(\mu+1)} = \ldots = \varnothing$. Очевидно, трансфинитное число μ не является предельным. Положим $\mu - 1 = \nu$. Тогда множество $E^{(\nu)}$ конечно.

Дальнейшее доказательство теоремы аппроксимации будем проводить методом трансфинитной индукции по ν. Для $\nu_0 = 0$, как мы заметили вначале доказательства, теорема верна. Предположим теперь, что теорема справедлива для всех $\nu < \nu_0 \neq 0$, и покажем, что она справедлива также и для $\nu = \nu_0$:

Для простоты полагаем, что $E^{(\nu_0)}$ состоит лишь из одной точки, т. е. $E^{(\nu_0)} = \{e^{i\nu}\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу 3) определения 2 найдется N', что при $p > N'$

$$\sum_{j=p}^{\infty} 2c\tau_j \log \frac{1}{\tau_j} < \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon^2}{16M}, \tag{15}$$

где c — постоянная, определяемая леммой 2; α_ε — постоянная, определяемая условием (14), а $M = \| g \|_{H^2}$.

Из леммы 2 следует, что при $z \in S_j$ $(j > N_1)$

$$|K_0(z)| = |K^c(z)| < \varrho^2(z). \tag{16}$$

Пусть $\overline{S}_{\delta_0}$ — замкнутая дуга длиной δ_0, содержащая точку e^{iv} с концами, принадлежащими множеству E, и такая, что все дуги S_j $(j \leqslant \max\{N', N_1\})$ находятся вне S_{δ_0}. Рассмотрим, далее, произвольное, но фиксированное множество замкнутых дуг $\mathfrak{M}_0 = \{\overline{S}_\delta\}$ $(\operatorname{mes} \overline{S}_\delta = \delta \leqslant \delta_0)$, исчерпывающее своими концами множество $E \cap \overline{S}_{\delta_0}$ и удовлетворяющее условию: если $\delta' \leqslant \delta''$, то $\overline{S}_{\delta'} \subseteq \overline{S}_{\delta''}$.

Кроме того, если e^{iv} — двусторонняя ν_0-предельная точка, $\mathfrak{M}_0$ выбираем так, чтобы в произвольной окрестности точки e^{iv} на Γ содержалось счетное множество дуг из $\mathfrak{M}_0$, для каждой из которых точка e^{iv} является внутренней.

Положим

$$K_0(z;\delta) = \prod_{\tau_j \in S_\delta} \left[\frac{z - e^{i\theta_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta_j}}\right]^{c\log\frac{1}{\tau_j}} \prod_{\tau_j \in S_\delta} \left[\frac{z - e^{i\theta'_j}}{z - (1+\tau_j)e^{i\theta'_j}}\right]^{c\log\frac{1}{\tau_j}},$$

$$\Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon) = \Phi_1^2(z;\alpha_\varepsilon)\,\Phi_2^2(z;\alpha_\varepsilon) = \left[\frac{z - e^{iw'}}{z - (1+\alpha_\varepsilon)e^{iw'}}\right]^2 \left[\frac{z - e^{iw''}}{z - (1+\alpha_\varepsilon)e^{iw''}}\right]^2;$$

нули $\Phi_\delta(z;\alpha_\varepsilon)$ совпадают с концами дуги $\overline{S}_\delta$.

Так как
$$|K_0(z;\delta)\, g(z)| < |g(z)|, \tag{17}$$
$\lim\limits_{\delta\to 0} K_0(z;\delta) = 1$ почти везде на окружности Γ и
$$|\Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)| < 1, \tag{18}$$
то найдется $\delta_1 > 0$, что при $\delta \leqslant \delta_1$
$$\| K_0(z;\delta)\, \Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)\, g(z) - \Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)\, g(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{19}$$
Аналогично, из того что
$$|[\Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)]'| < \frac{4}{\alpha_\varepsilon}, \quad |K_0(z;\delta)\, g'(z)| < |g'(z)|$$
и выполняется (17), следует, что при $\delta \leqslant \delta_2$ $(\delta_2 > 0)$
$$\| K_0(z;\delta)\, [\Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)\, g(z)]' - [\Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)\, g(z)]' \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{20}$$

Покажем еще, что для произвольной дуги $\overline{S}_\delta \in \mathfrak{M}_0$
$$\| [K_0(z;\delta)]'\, \Phi_\delta^2(z;\alpha_\varepsilon)\, g(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{21}$$
Действительно,
$$[K_0(z;\delta)]' = K_0(z;\delta) \left\{ \sum_{\tau_j \in S_\delta} \frac{-ce^{i\theta_j}\tau_j \log \frac{1}{\tau_j}}{(z - e^{i\theta_j})\,[z - (1+\tau_j)\, e^{i\theta_j}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\tau_j \in S_\delta} \frac{-ce^{i\theta_j'}\tau_j \log \frac{1}{\tau_j}}{(z - e^{i\theta_j'})\,[z - (1+\tau_j)\, e^{i\theta_j'}]} \right\},$$
а поэтому
$$|[K_0(z;\delta)]'| < |K_0(z;\delta)|\, \frac{\sum\limits_{\tau_j \in S_\delta} 2c\tau_j \log \frac{1}{\tau_j}}{\varrho^2(z)}. \tag{22}$$

Пусть $z \in S_\delta\, (\overline{S}_\delta \in \mathfrak{M}_0)$, тог а, учитывая (15)—(17) и (22), имеем
$$\int\limits_{S_\delta} |[K_0(e^{it};\delta)]'\, \Phi_\delta^2(e^{it};\alpha_\varepsilon)\, g(e^{it})|^2\, dt <$$
$$< \int\limits_{S_\delta} [\, |K_0(e^{it};\delta)|\, \frac{\sum\limits_{\tau_j \in S_\delta} 2c\tau_j \log \frac{1}{\tau_j}}{\varrho^2(e^{it})}\, |\Phi_\delta^2(e^{it};\alpha_\varepsilon)\, g(e^{it})\, |]^2 dt <$$
$$< \int\limits_{S_\delta} |\varrho^2(e^{it})\, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon^2}{\varrho^2(e^{it})\, 16M}\, g(e^{it})|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{16^2}. \tag{23}$$

Если же $z \in \Gamma \setminus S_\delta$, то

$$\int\limits_{\Gamma \setminus S_\delta} |[K_0(e^{it};\delta)]' \Phi_\delta^2(e^{it};\alpha_\varepsilon) g(e^{it})|^2 dt <$$

$$< \int\limits_{\Gamma \setminus S_\delta} \left[|K_0(e^{it};\ \delta)| \frac{2c \sum\limits_{\tau_j \in S_\delta} \tau_j \log \dfrac{1}{\tau_j}}{\varrho^2(e^{it})} \frac{\varrho^2(e^{it})}{\alpha_\varepsilon^2} |g(e^{it})| \right]^2 dt <$$

$$< \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon^2}{16M\alpha_\varepsilon^2} |g(e^{it})| \right]^2 dt = \frac{\varepsilon^2}{16^2}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует (21).

Исходя из (19)—(21) и леммы 3, заключаем, что при $\delta = \delta_0' = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$

$$\| K_0(z;\delta_0') \Phi_{\delta_0'}^2(z;\alpha_\varepsilon) g(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \frac{3}{4}\varepsilon^*. \tag{25}$$

Так как $\{\overline{E \setminus E \cap S_{\delta_0'}}\}^{(\nu_0)} = \varnothing$, то по предположению существует функция $D(z)$, удовлетворяющая всем требованиям теоремы аппроксимации для множества $\overline{E \setminus E \cap \overline{S}_{\delta_0'}}$ и

$$\| D(z) K_0(z;\delta_0') \Phi_{\delta_0'}^2(z;\alpha_\varepsilon) g(z) - K_0(z;\delta_0') \Phi_{\delta_0'}^2(z;\alpha_\varepsilon) g(z) \|_{H_1^2} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{26}$$

Полагая $K_\varepsilon(z) = D(z) K_0(z;\delta_0') \Phi_{\delta_0'}^2(z;\alpha_\varepsilon)$ и принимая во внимание (25) и (26), получим

$$\| K_\varepsilon(z) g(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \varepsilon,$$

т. е. теорема аппроксимации доказана.

Примечание. Из доказательства следует, что аппроксимационная функция $K_\varepsilon(z) g(z)$ для произвольной функции $g(z) \in H_1^2$ $(g(z) = 0,\ z \in E)$ определяется неоднозначно.

4. Доказательство теоремы 1. Включение $I(f) \subset I_1\{G(z); E\}$ очевидно, поэтому покажем, что $I_1\{G(z); E\} \subset I(f)$. Для этого достаточно убедиться, что для произвольной функции $g(z) \in I_1\{G(z); E\}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $R_\varepsilon(z) \in I(f)$ такая, что

$$\| R_\varepsilon(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \varepsilon.$$

Обозначим через $S_{k\varepsilon_k}$ дугу на окружности $\Gamma\{|z| = 1\}$ $\theta_k - \varepsilon_k < \arg z < \theta_k' + \varepsilon_k$; $0 < \varepsilon_k < \frac{\tau_k}{2}$; $e^{i\theta_k}$ и $e^{i\theta_k'}$ — концы дуги S_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть далее

$$F_{S_{k\varepsilon_k}}(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_{k\varepsilon_k}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta \right\};$$

---

* Неравенство (25) выполняется также для всех дуг $\overline{S}_\varepsilon \in \mathfrak{M}_0$ $(\delta < \delta_0')$.

$$F_{\Gamma\setminus S_{k\varepsilon_k}}(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma\setminus S_{k\varepsilon_k}}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right\};$$

$$F_{\Gamma\setminus L_k}(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma\setminus L_k}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right\}\left(L_k=\bigcup_{j=1}^{k}S_j\right);$$

$$\Phi_k^2(z;\alpha_k,\varepsilon_k)=\Phi_{\alpha_k}^2(ze^{-i(\theta_k'+\varepsilon_k)})\,\Phi_{\alpha_k}^2(ze^{-i(\theta_k-\varepsilon_k)});$$

$$\Phi_k^2(z;\alpha_k)=\Phi_{\alpha_k}^2(ze^{-i\theta_k'})\,\Phi_{\alpha_k}^2)\,ze^{-i\theta_k}),$$

где $\Phi_{\alpha_k}^2(z)=\left(\dfrac{z-1}{z-1-\alpha_k}\right)^2\quad(k=1,\ 2,\dots)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)=[F_{S_1\varepsilon_1}(z)]^{-1}\Phi_1^2(z;\alpha_1,\varepsilon_1).$$

Как показано в [4], $\varphi_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)\in H_1^2$. Так как $g(z)\in I_1\{G(z);E\}$, то $g_1(z)=\dfrac{g(z)}{G(z)}\in H_1^2$ (см. [3]), и поэтому

$$B_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)=f(z)\,[F_{S_1\varepsilon_1}(z)]^{-1}g_1(z)\,\Phi_1^2(z;\alpha_1,\varepsilon_1)\in I(f).$$

Учитывая, что $f(z)=F(z)\,G(z)$, имеем

$$B_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)=F_{\Gamma\setminus S_1\varepsilon_1}(z)\,g(z)\;\Phi_1^2(z;\alpha_1,\varepsilon_1).$$

Так же, как в [4], легко убеждаемся, что при $\varepsilon_1\to0$ и фиксированном α_1

$$\|B_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)-B_1(z;\alpha_1)\|_{H_1^2}\to0,$$

где $B_1(z;\alpha_1)=F_{\Gamma\setminus S_1}(z)\,\Phi_1^2(z;\alpha_1)\,g(z)$, поэтому $B_1(z;\alpha_1)\in I(f)$.

Положим $A_{1\varepsilon}(z;\alpha_1)=B_1(z;\alpha_1)\,K_{1\varepsilon}(z)$; $K_{1\varepsilon}(z)$ — произвольная функция, удовлетворяющая всем требованиям теоремы 2 и такая, что $\|K_{1\varepsilon}(z)g(z)-g(z)\|_{H_1^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Используя тот факт, что $|g(z)|=o(\varrho^{\frac{1}{2}}(z))$ $(\varrho(z)\to0)$ и учитывая, что $|K_{1\varepsilon}(z)|=o(\varrho^2(z))$ $(\varrho(z)\to0)$, нетрудно убедиться, что при $\alpha_1\to0$ $\|A_{1\varepsilon}(z;\alpha_1)-A_{1\varepsilon}(z)\|_{H_1^2}\to0$, где $A_{1\varepsilon}(z)=F_{\Gamma\setminus S_1}(z)\,K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)$, и следовательно, $A_{1\varepsilon}(z)\in I(f)$.

Рассмотрим далее функцию

$$\varphi_2(z;\alpha_2,\varepsilon_2)=[F_{S_2\varepsilon_2}(z)]^{-1}\Phi_2^2(z;\alpha_2,\varepsilon_2).$$

По своей конструкции $\varphi_2(z;\alpha_2,\varepsilon_2)$ аналогична функции $\varphi_1(z;\alpha_1,\varepsilon_1)$ и, значит, принадлежит H_1^2. Тогда $A_{2\varepsilon}(z;\alpha_2,\varepsilon_2)=A_{1\varepsilon}(z)\,\varphi_2(z;\alpha_2,\varepsilon_2)\in I(f)$ и, как раньше, убеждаемся, что при $\varepsilon_2\to0$ $\|A_{2\varepsilon}(z;\alpha_2,\varepsilon_2)-A_{2\varepsilon}(z;\alpha_2)\|_{H_1^2}\to0$, где $A_{2\varepsilon}(z;\alpha_2)=K_{1\varepsilon}(z)\,F_{\Gamma\setminus L_2}(z)\,g(z)\,\Phi_2^2(z;\alpha_2)$, а при $\alpha_2\to0$ $\|A_{2\varepsilon}(z;\alpha_2)-A_{2\varepsilon}(z)\|_{H_1^2}\to0$, где $A_{2\varepsilon}(z)=K_{1\varepsilon}(z)\,F_{\Gamma\setminus L_2}(z)\,g(z)$ и $A_{2\varepsilon}(z)\in I(f)$.

Продолжая этот процесс «стирания», после m-го шага получим

$$A_{m\varepsilon}(z)=K_{1\varepsilon}(z)\,F_{\Gamma\setminus L_m}(z)\,g(z)\in I(f).$$

Покажем теперь, что при $m\to\infty$ $\| A_{m\varepsilon}(z)-K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)\|_{H_1^2}\to 0$. Так как $\lim\limits_{m\to\infty} F_{\Gamma\setminus L_m}(z)=1$ почти везде на Γ и $\| A_{m\varepsilon}(z)|\leqslant M_1|g(z)|$, то

$$\| A_{m\varepsilon}(z)-K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)\|_{H^2}\to 0\quad (m\to\infty). \tag{27}$$

Подобным образом убеждаемся, что при $m\to\infty$

$$\| F_{\Gamma\setminus L_m}(z)\,[K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)]'-[K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)]'\|_{H^2}\to 0. \tag{28}$$

Докажем теперь. что

$$\| [F_{\Gamma\setminus L_m}(z)]'\,K_{1\varepsilon}(z)\,g(z)\|_{H^2}\to 0\quad (m\to\infty).$$

Для каждого m разобьем Γ на два множества $L_m=\bigcup\limits_{j=1}^{m}S_j$ и $\Gamma\setminus L_m$ и рассмотрим совокупности интегралов

$$\left\{\int\limits_{L_m}|\,[F_{\Gamma\setminus L_m}(e^{it})]'\,K_{1\varepsilon}(e^{it})\,g(e^{it})\,|^2\,dt\right\} \tag{29}$$

и

$$\left\{\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}|\,[F_{\Gamma\setminus L_m}(e^{it})]'\,K_{1\varepsilon}(e^{it})\,g(e^{it})\,|^2\,dt\right\}\quad (m=1,\ 2,\ldots). \tag{30}$$

В силу свойств функции $K_{1\varepsilon}(z)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется N_2. что для всех $m\geqslant N_2$

$$\int\limits_{L_m}|\,[F_{\Gamma\setminus L_m}(e^{it})]'K_{1\varepsilon}(e^{it})\,g(e^{it})\,|^2\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{L_m}\left[|\,K_{1\varepsilon}(e^{it})\,g(e^{it})\,|\,\frac{1}{\pi\varrho^2(e^{it})}\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}|\log|f(e^{i\theta})\|\,d\theta\right]^2dt<\frac{\varepsilon^2}{6^2}.$$

Для оценки интегралов (30) каждую из функций $F_{\Gamma\setminus L_m}(z)$ ($m=1,\ 2,\ldots$) представим в таком виде:

$$F_{\Gamma\setminus L_m}(z)=F(z)\,[F_{L_m}(z)]^{-1}.$$

Тогда

$$[F_{\Gamma\setminus L_m}(z)]'=F'(z)\,[F_{L_m}(z)]^{-1}+F(z)\,[F_{L_m}(z)]^{-1}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_m}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

При $e^{it}\in\Gamma\setminus L_m$ $|F_{L_m}(e^{it})|=1$ и поэтому

$$\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}|[F_{\Gamma\setminus L_m}(e^{it})]'\,K_{1\varepsilon}(e^{it})\,g(e^{it})\,|^2\,dt\leqslant 2\left\{\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}|K_{1\varepsilon}(e^{it})F'(e^{it})g(e^{it})\,|^2dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}\left[|\,K_{1\varepsilon}(e^{it})\,F(e^{it})\,|\,\frac{|\,g(e^{it})\,|}{\varrho^2(e^{it})}\int\limits_{L_m}|\log|f(e^{i\theta})\,||\,d\theta\right]^2dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M_2\left[\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}|\,F'(e^{it})\,|^2\,dt+\int\limits_{\Gamma\setminus L_m}dt\right]\quad (m=1,\ 2,\ldots).$$

Учитывая предыдущее неравенство, находим N_3, что при $m \geqslant N_3$ все интегралы (30) станут меньше $\frac{\varepsilon^2}{6^2}$, а тогда при $m \geqslant \max\{N, N_3\}$

$$\| [F_{\Gamma \diagdown L_m}(z)]' K_{1\varepsilon}(z) g(z) \|_{H^2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{31}$$

Из (27), (28) и (31) следует, что существует N'' такое, что при $m \geqslant N''$

$$\| F_{\Gamma \diagdown L_m}(z) K_{1\varepsilon}(z) g(z) - K_{1\varepsilon}(z) g(z) \|_{H_1^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\| K_{1\varepsilon}(z) g(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, то, полагая $R_\varepsilon(z) = F_{\Gamma \diagdown L_m}(z) K_{1\varepsilon}(z) g(z)$, получим $R_\varepsilon(z) \in I(f)$ и $\| R_\varepsilon(z) - g(z) \|_{H_1^2} < \varepsilon$.

Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. И. Коренблюму за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rudin, The closed ideals in the algebra of continuous functions, Can. I. Math., **9**, N 13, 1957, 426—434.
2. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
3. Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич, Об аналитических функциях регулярных в круге и гладких на его границе, Математические заметки АН СССР, т. 7, № 2, 1970.
4. В. С. Королевич, Некоторые банаховы алгебры аналитических функций, Изв. АН АрмССР, серия матем., № 4, 1970.
5. A. Beurling, Ensemles exceptionnels, Acta Math., **72**, 1940.
6. L. Carleson, Sets of uniqueness for functions regular in the unit cirele, Acta Math., **87**, N 3—4, 1952, 325—345.

Поступила 28.I 1971 г.

Киевский инженерно-строительный институт