УДК 539.3

Однородные общие решения в статической задаче теории упругости

В. М. Деев, Н. А. Нечепоренко

Как известно, одним из эффективных методов решения статических задач теории упругости является метод общих решений, который состоит в удовлетворении уравнений равновесия в перемещениях при помощи гармонических функций и в последующем решении краевой задачи для определения этих функций по заданному на поверхности тела вектору перемещений или тензору напряжений.

Известные общие решения уравнений Ляме выражались через гармонические векторы и некоторые дифференциальные операторы над ними, а потому не давали возможности получить непосредственную связь между граничными значениями гармонических функций и заданным на поверхности тела вектором перемещений. Только решение Ю. А. Круткова [1] выражалось через скалярные гармонические функции, однако и из него получить простые граничные условия для гармонического скаляра не удается.

Авторы задались целью восполнить этот пробел хотя бы для некоторого класса задач статической теории упругости. Используя метод неопределенных коэффициентов, впервые примененный для получения общих решений уравнений Ляме в работе [2], можно получить решения этих уравнений, выраженные только через первые частные производные от скалярных гармонических функций. Эти решения обладают рядом свойств, не присущих другим формам общих решений уравнений Ляме. Общий вид решения, однородного по порядку применения оператора Гамильтона, представляется в следующей достаточно простой форме:

$$u = \mu M \nabla \Phi + \nabla \Phi \times N, \tag{1}$$

где $\mu = \dfrac{4(1-\nu)}{3-4\nu}$, ν — коэффициент Пуассона, ∇ — оператор Гамильтона, Φ — скалярная гармоническая функция, а M и N — линейные скалярная и векторная функции, имеющие вид:

$$M = a \cdot r + \alpha; \; N = a \times r + \beta r + b, \tag{2}$$

где a и b — произвольные постоянные векторы, r — радиус-вектор, α и β — произвольные постоянные скалярные величины. Задавая конкретные значения произвольным постоянным a, b, α и β, можно из (1) получить много различных решений однородных уравнений Ляме.

Для указанного решения (1) имеем

$$\nabla \cdot u = (\mu - 2)\, a \cdot \nabla \Phi; \; \nabla \times u = (\mu - 1)\, a \times \nabla \Phi + 2\beta \nabla \Phi + N \cdot \nabla^2 \Phi, \tag{3}$$

где $\nabla^2 = \nabla\nabla$ — диадное произведение операторов Гамильтона

Из выражений (3) видно, что при $a \neq 0$ вектор перемещений (1) описывает деформацию, связанную как с изменением объема, так и с относительным поворотом каждого элемента упругой среды. С этой точки зрения решение (1) можно считать общим решением уравнений Ляме. Для увеличения возможностей удовлетворения граничных условий можно представлять вектор перемещений как суперпозицию решений вида (1), в каждом из которых выбираются свои значения произвольных постоянных.

Полученное решение уравнений Ляме дает возможность найти непосредственную связь между градиентом гармонической функции и вектором перемещений в виде

$$\nabla\Phi = \frac{\mu M(\mu M u + N \times u) + N(u \cdot N)}{\mu M(\mu^2 M^2 + N \cdot N)}. \tag{4}$$

Такой возможностью не обладает ни одно из известных общих решений уравнений Ляме.

Если на поверхности тела вектор u задан, то, выполняя в равенстве (4) переход к поверхности, получим граничное значение градиента гармонической функции. При этом надлежащим выбором произвольных постоянных всегда можно добиться, чтобы во внутренних точках тела и на его поверхности $M \neq 0$, что обеспечивает ограниченность $\nabla\Phi$.

На координатных поверхностях любой ортогональной криволинейной системы координат одна из составляющих $\nabla\Phi$ является нормальной производной $\frac{\partial}{\partial n}\Phi$, а две других составляющих позволяют путем интегрирования по поверхности восстановить функцию Φ. Таким образом, на поверхности тела могут быть получены данные Коши для уравнения Лапласа. Эта задача подробно рассматривалась в работах [3—6] и многих др., доказана ее разрешимость в постановке А. Н. Тихонова [7] в классе ограниченных функций.

Для решения (1) тензор напряжений σ имеет вид:

$$\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma = 2\mu M\nabla^2\Phi + (\mu+1)(\nabla\Phi a + a\nabla\Phi) +$$
$$+ (2 - 3\mu)(a \cdot \nabla\Phi) I + \nabla^2\Phi \times N - N \times \nabla^2\Phi, \tag{5}$$

где E — модуль Юнга, I — единичный тензор.

На координатных поверхностях компоненты полученного тензора напряжений (5) допускают представление в форме, не содержащей повторного дифференцирования по направлению нормали к поверхности. Используя условие гармоничности функции Φ, а также равенство (4), которое допускает возможность дифференцирования по направлению касательных к координатным поверхностям, можно на поверхности тела найти связь между компонентами тензора напряжений и вектором перемещений. Покажем это на примере конкретной ортогональной системы координат.

Рассмотрим систему координат вращения, переменные ξ, η и φ которой связаны с декартовыми координатами равенствами:

$$x = (\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)\cos\varphi;\ y = (\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)\sin\varphi;\ z = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \tag{6}$$

где α — постоянный угол. Кроме того, введем следующие обозначения для часто встречающихся в дальнейшем величин:

$$K = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha;\ L = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha. \tag{7}$$

Единичные орты e_ξ, e_η и e_φ вводимой системы координат связаны с ортами e_1, e_2 и e_3 декартовой системы при помощи следующих соотношений:

$$e_\xi = (e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)\cos\alpha + e_3\sin\alpha;\ e_\varphi = -e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi;$$
$$e_\eta = -(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)\sin\alpha + e_3\cos\alpha. \tag{8}$$

Орты зависят от переменной φ, правила дифференцирования ортов определяются равенствами:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} e_\xi = e_\varphi \cos\alpha; \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} e_\eta = - e_\varphi \sin\alpha; \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} e_\varphi = - e_\xi \cos\alpha + e_\eta \sin\alpha. \tag{9}$$

Оператор Гамильтона в рассматриваемой системе координат определяется выражением

$$\nabla = e_\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + e_\varphi \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial\varphi} + e_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{10}$$

а условие гармоничности функции имеет вид

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\cos\alpha}{K}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin\alpha}{K}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Phi = 0. \tag{11}$$

Радиус-вектор и вектор перемещений своими компонентами в рассматриваемой системе координат представляются в форме

$$r = e_\xi \xi + e_\eta \eta; \quad u = e_\xi u_\xi + e_\varphi u_\varphi + e_\eta u_\eta. \tag{12}$$

Полученных данных достаточно для представления во введенной системе координат любых векторных и тензорных выражений.

Легко проверить, что при стремлении угла α к нулю введенная система координат переходит в круговую цилиндрическую. В самом деле, при $\alpha \to 0$ получаем, что ξ переходит в ϱ, η — в z, K — в ϱ и L — в z. Все приведенные выше формулы переходят в соответственные формулы круговой цилиндрической системы координат.

Во введенной системе координат для случая осевой симметрии, который принимается только с целью упрощения выкладок, из решения (1) при соответствующих предположениях получим

$$u_\xi = \mu L \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}; \quad u_\eta = K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}. \tag{13}$$

Для этого решения уравнений Ляме легко получаются следующие выражения частных производных через компоненты u_ξ и u_ξ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\mu L u_\xi + K u_\eta}{\mu^2 L^2 + K^2}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{-K u_\xi + \mu L u_\eta}{\mu^2 L^2 + K^2}. \tag{14}$$

Компоненты тензора напряжений, соответствующие решению (13), определяются формулами

$$\begin{aligned}
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\xi} &= 2(\mu+1)\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + (2-3\mu)\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \\
&\quad + 2\mu L\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - 2K\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}; \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\eta} &= (\mu+1)\left(\cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + K\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right) + 2\mu L\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}; \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\varphi\varphi} &= (2-3\mu)\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \\
&\quad + 2\mu\frac{L}{K}\left(\cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right);
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\eta\eta} = 2(\mu+1)\cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + (2-3\mu)\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) +$$

$$+ 2\mu L\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + 2K\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Используя условие гармоничности функции Φ, можно из выражений (15) исключить по желанию либо вторую производную по переменной ξ, либо вторую производную по переменной η. Сохраняя неизменной компоненту $\sigma_{\varphi\varphi}$, не содержащую двойных производных, преобразуем остальные компоненты к виду

$$\begin{gathered}
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\xi} = -2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] - \frac{2\cos\alpha}{K}\left[\mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + \\
+ \frac{2\sin\alpha}{K}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] - \mu\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right); \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] - \mu\left(\cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right); \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\eta\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + (4-3\mu)\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right).
\end{gathered} \tag{16}$$

В квадратных скобках, входящих в равенства (16), нетрудно узнать компоненты u_ξ и u_η вектора перемещений, которые на поверхности $\xi = \text{const}$, ограничивающей тело, являются заданными функциями переменной η и допускают дифференцирование по этой переменной.

Используя дополнительно равенства (14), приходим к выводу, что на поверхностях $\xi = \text{const}$ компоненты тензора напряжений допускают выражение через заданные на этих поверхностях компоненты вектора перемещений.

На поверхностях $\eta = \text{const}$ можно достигнуть аналогичного результата, исключая повторное дифференцирование по переменной η и преобразуя компоненты тензора напряжений к виду

$$\begin{gathered}
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\eta\eta} = -2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] - \frac{2\cos\alpha}{K}\left[\mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + \\
+ \frac{2\sin\alpha}{K}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] - \mu\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right); \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\xi} = 2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - K\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + (4-3\mu)\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right); \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\xi\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \mu L\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + \mu\left(\cos\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right).
\end{gathered} \tag{17}$$

Отметим, что рассмотрение случая осевой симметрии не ограничивает общности полученного результата, поскольку дифференцирование по переменной φ допускается как на поверхностях $\xi = \text{const}$, так и на поверхностях $\eta = \text{const}$, ограничивающих упругое тело.

Можно поставить и обратную задачу: найти компоненты вектора перемещений на той части поверхности тела, на которой заданы соответствующие функции напряжений. Все необходимые данные для решения этой задачи уже получены.

Пусть на поверхности $\xi = \text{const}$ заданы нормальное $\sigma_{\xi\xi}$ и касательное $\sigma_{\xi\eta}$ напряжения. Используя (14) и (16), получим для определения u_ξ и u_η систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами первого порядка, в правых частях которых стоят заданные функции напряжений:

$$\frac{d}{d\eta} u_\eta + \frac{u_\xi \cos\alpha - u_\eta \sin\alpha}{K} + \frac{\mu}{2(\mu^2 L^2 + K^2)} [u_\xi (\mu L \sin\alpha - K\cos\alpha) + u_\eta (\mu L \cos\alpha + K \sin\alpha)] = -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\xi\xi}; \tag{18}$$

$$\frac{d}{d\eta} u_\xi - \frac{\mu}{2(\mu^2 L^2 + K^2)} [u_\xi (\mu L \cos\alpha + K\sin\alpha) - u_\eta (\mu L \sin\alpha - K \cos\alpha)] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\xi\eta}.$$

Вполне аналогично определяются перемещения через напряжения на границе тела, ограниченной координатной поверхностью $\eta = \text{const}$. Пусть на этой поверхности заданы функции напряжений $\sigma_{\eta\eta}$ и $\sigma_{\eta\xi}$. Используя зависимости (14) и (17), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u_ξ и u_η:

$$\frac{d}{d\xi} u_\xi + \frac{u_\xi \cos\alpha - u_\eta \sin\alpha}{K} + \frac{\mu}{2(\mu^2 L^2 + K^2)} [u_\xi (\mu L \sin\alpha - K\cos\alpha) + u_\eta (\mu L \cos\alpha + K \sin\alpha)] = -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\eta\eta}; \tag{19}$$

$$\frac{d}{d\xi} u_\eta + \frac{\mu}{2(\mu^2 L^2 + K^2)} [u_\xi (\mu L \cos\alpha + K\sin\alpha) - u_\eta (\mu L \sin\alpha - K \cos\alpha)] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\eta\xi}.$$

Полученные результаты позволяют перейти от краевой задачи со смешанными граничными условиями к первой или второй основной задаче статики упругого тела. При этом для перехода к напряжениям достаточно выполнить операцию дифференцирования заданных на поверхности функций перемещений. Для определения перемещений по заданным функциям напряжений необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (18) или (19), выбирая постоянные интегрирования из условий неразрывности перемещений на линиях сопряжения частей поверхностей с разными краевыми условиями.

Возможность получения на координатных поверхностях зависимостей между вектором перемещений и тензором напряжений является следствием формы общего решения уравнений Ляме (1). Эти зависимости можно получить в любой ортогональной системе координат.

В круговой цилиндрической системе координат из (1) получим следующее решение уравнений Ляме для случая осевой симметрии:

$$u_\varrho = \mu z \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad u_z = \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \mu z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{20}$$

где $\Phi(\varrho, z)$ — гармоническая функция, т. е.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = 0. \tag{21}$$

Для этого решения зависимость между частными производными гармонической функции и компонентами вектора перемещений u_ϱ и u_z определяется формулами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = \frac{\mu z u_\varrho + \varrho u_z}{\mu^2 z^2 + \varrho^2}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{-\varrho u_\varrho + \mu z u_z}{\mu^2 z^2 + \varrho^2}, \tag{22}$$

а компоненты тензора напряжений определяются равенствами

$$\begin{gathered}
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\varrho\varrho} = 2\mu z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} - 2\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial z} + (2 - 3\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\varphi\varphi} = (2 - 3\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial z} + 2\mu \frac{z}{\varrho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}; \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{zz} = 2\mu z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial z} + (4 - \mu)\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \\
\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\varrho z} = \varrho\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + 2\mu z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial z} + (1 + \mu)\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Как и прежде, используя условие (21), можно из равенств (23) исключить по желанию либо вторую производную по переменной ρ, либо вторую производную по переменной z. После этого, используя зависимости (22), можно получить на координатных поверхностях $\rho = \text{const}$ или $z = \text{const}$ выражения напряжений через перемещения в форме, не содержащей дифференцирования по нормали к поверхности.

Напомним, что рассмотренная выше система координат является естественным обобщением круговой цилиндрической системы координат и переходит в последнюю при $\alpha \to 0$. Поэтому необходимые формулы в цилиндрической системе координат можно получить из приведенных выше формул (16)—(19) с помощью предельного перехода. Исходя из этого, приведем только дифференциальные зависимости между перемещениями и напряжениями на координатных поверхностях.

На плоскостях $z = \text{const}$ эти зависимости имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\varrho}u_\varrho + \frac{1}{\varrho}u_\varrho + \frac{\mu}{2(\mu^2 z^2 + \varrho^2)}(\mu z u_z - \varrho u_\varrho) = -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz}; \\
\frac{d}{d\varrho}u_z + \frac{\mu}{2(\mu^2 z^2 + \varrho^2)}(\mu z u_\varrho + \varrho u_z) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{z\varrho}.
\end{gathered} \tag{24}$$

На цилиндрических поверхностях $\varrho = \text{const}$ компоненты вектора перемещений u_ϱ и u_z связаны с известными функциями нормального $\sigma_{\varrho\varrho}$ и касательного $\sigma_{\varrho z}$ напряжений при помощи дифференциальных зависимостей вида

$$\frac{d}{dz}u_z + \frac{1}{\varrho}u_\varrho + \frac{\mu}{2(\mu^2 z^2 + \varrho^2)}(\mu z u_z - \varrho u_\varrho) = -\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\varrho\varrho};$$

$$\frac{d}{dz}u_\varrho - \frac{\mu}{2(\mu^2 z^2 + \varrho^2)}(\mu z u_\varrho + \varrho u_z) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\varrho z}. \tag{25}$$

Решая соответствующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно на той части поверхности цилиндра, где заданы функции напряжений, определить перемещения и перейти тем самым от решения смешанной краевой задачи для цилиндра к решению статической задачи теории упругости в перемещениях.

Конечно, нельзя безоговорочно утверждать, что предлагаемая методика применима к любой задаче статики упругого тела. Однако в работе [5] доказано, что для любой пары непрерывных ограниченных функций F_1 и F_2, определенных на гладкой части поверхности, и для любого $\varepsilon > 0$ существует гармонический полином P_m степени m, для которого:

$$|F_1 - P_m| < \varepsilon; \quad \left| F_2 - \frac{\partial}{\partial n} P_m \right| < \varepsilon. \tag{26}$$

Это косвенно доказывает, что существует достаточно широкий класс функций перемещений, по крайней мере для осесимметричных задач теории упругости, для описания которых достаточно задания одной гармонической функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1949.
2. В. М. Деев, О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций, ПММ, т. XXIII, вып. 6, 1959.
3. М. М. Лаврентьев, О задаче Коши для уравнения Лапласа, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, 1956.
4. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректно поставленных задачах, Новосибирск, 1966.
5. С. Н. Мергелян, Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, УМН, т. 11 : 5(71), 1956.
6. Р. Латтес, Ж.— Л. Лионс, Метод квазиобращения и его приложения, «Мир», М., 1970.
7. А. Н. Тихонов, Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР, т. 39, 1943.

Поступила 29.III 1971 г.
Харьков, УЗПИ