

## О построении приближенных решений для автономного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления

Л е с у а н К а н

В этой заметке построим при помощи метода последовательных замен переменных приближенные решения автономного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления. Рассматриваемое нами уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2b_1 \frac{dx(t)}{dt} + 2b_2 \frac{dx(t - \varepsilon\Delta)}{dt} + \omega_1^2 x(t) + \omega_2^2 x(t - \varepsilon\Delta) = \\ = \varepsilon F \left[ x(t), x(t - \varepsilon\Delta), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t - \varepsilon\Delta)}{dt} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $b_1, b_2, \omega_1, \omega_2, \Delta$  — положительные постоянные, удовлетворяющие условию  $\omega_1^2 + \omega_2^2 > (b_1 + b_2)^2$ ,  $\varepsilon$  — положительный малый параметр,  $F$  — функция, имеющая нужное число производных по всем аргументам в некоторой области их изменения.

Для случая, когда  $\Delta = 0$ , уравнение (1) было рассмотрено Е. П. Поповым и И. П. Пальтовым при помощи обобщения асимптотического метода на случай системы со значительной силой сопротивления [1, 2]. Затем Г. Бояджиев рассмотрел случай системы с медленно изменяющимися параметрами [3]. В данной заметке построим приближенные решения уравнения (1) при помощи обобщения метода последовательных замен переменных [4, 5].

Сначала введем в уравнение (1) новые переменные  $a$  и  $\psi$  согласно формулам

$$x = ae^{-bt} \cos \psi, \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = -ae^{-bt} (b \cos \psi + \omega_0 \sin \psi), \quad (3)$$

где  $b = b_1 + b_2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - (b_1 + b_2)^2}$ .

После ряда выкладок для новых переменных  $a$  и  $\psi$  вместо уравнения (1) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} [F_0(ae^{-bt}, \psi) e^{bt} \sin \psi + \Delta a ((2b_2 b^2 - 2b_2 \omega_0^2 - \omega_2^2 b) \cos \psi \sin \psi + \\ + (4b_2 b - \omega_2^2) \omega_0 \sin^2 \psi)] + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ F_0(ae^{-bt}, \psi) \frac{e^{bt}}{a} \cos \psi + \Delta ((2b_2 b^2 - 2b_2 \omega_0^2 - \omega_2^2 b) \cos^2 \psi + \right. \\ \left. + (4b_2 b - \omega_2^2) \omega_0 \cos \psi \sin \psi) \right] + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned}$$

где

$$F_0(ae^{-bt}, \psi) = F [ae^{-bt} \cos \psi, ae^{-bt} \cos \psi, -ae^{-bt} (b \cos \psi + \omega_0 \sin \psi), -ae^{-bt} (b \cos \psi + \omega_0 \sin \psi)].$$

Произведем теперь в системе (4) замену переменных

$$a = ce^{bt}, \quad \psi = \psi. \quad (5)$$

Тогда для новых переменных  $c, \psi$  вместо системы (4) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= -bc - \frac{\varepsilon}{\omega_0} [F_0(c, \psi) \sin \psi + \Delta c ((2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) \cos \psi \sin \psi + \\ &\quad + (4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 \sin^2 \psi)] + \varepsilon^2 \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ \frac{1}{c} F_0(c, \psi) \cos \psi + \Delta ((2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) \cos^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + (4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 \cos \psi \sin \psi) \right] + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Сделаем в системе уравнений (6) опять замену переменных согласно формулам

$$c = c_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} u(c_1, \psi_1), \quad \psi = \psi_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} v(c_1, \psi_1), \quad (7)$$

в которых положено

$$\begin{aligned} u(c_1, \psi_1) &= -\frac{1}{b} \sum_{n \neq 0} \left( c_1^{\frac{i n \omega_0}{b} + 1} \int g_n(c_1) c_1^{-\frac{i n \omega_0}{b} - 2} dc_1 \right) e^{i n \psi_1} - \\ &\quad - \frac{\Delta c_1}{8\omega_0} \{ [(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) - i(4b_2b - \omega_2^2) \omega_0] e^{i 2\psi_1} + [(2b_2b^2 - \\ &\quad - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) + i(4b_2b - \omega_2^2) \omega_0] e^{-i 2\psi_1} \}, \\ v(c_1, \psi_1) &= -\frac{1}{b} \sum_{n \neq 0} \left( c_1^{\frac{i n \omega_0}{b}} \int h_n(c_1) c_1^{-\frac{i n \omega_0}{b} - 2} dc_1 \right) e^{-i n \psi_1} - \\ &\quad - \frac{\Delta}{8\omega_0} \{ [(4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 + i(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b)] e^{i 2\psi_1} + [(4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 - \\ &\quad - i(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b)] e^{-i 2\psi_1} \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} g_n(c_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(c_1, \psi_1) \sin \psi_1 e^{-i n \psi_1} d\psi_1, \\ h_n(c_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(c_1, \psi_1) \cos \psi_1 e^{-i n \psi_1} d\psi_1. \end{aligned}$$

Тогда после ряда выкладок для новых переменных  $c_1, \psi_1$  вместо системы уравнений (6) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ g_0(c_1) + \frac{\Delta c_1}{2} (4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 \right] + \varepsilon^2 \dots, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ \frac{h_0(c_1)}{c_1} + \frac{\Delta}{2} (2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) \right] + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что пренебрегая в правых частях уравнений (9) величинами порядка малости  $\varepsilon^2$ , получим систему уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ g_0(c_1) + \frac{\Delta c_1}{2} (4b_2b - \omega_2^2) \omega_0 \right], \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ \frac{h_0(c_1)}{c_1} + \frac{\Delta}{2} (2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2b) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

правые части которой не зависят от  $\psi_1$ .

Короче говоря, в первом приближении мы можем сводить при помощи метода последовательных замен переменных интегрирование уравнения (1) к интегрированию двух уравнений (10). Очевидно, что интегрирование уравнений (10) во много раз легче, чем интегрирование непосредственно уравнения (1) и может быть сведено к квадратурам.

Таким образом, в первом приближении решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = c_1 \cos \psi_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left[ u(c_1, \psi_1) \cos \psi_1 - c_1 v(c_1, \psi_1) \sin \psi_1 \right], \quad (11)$$

где  $u(c_1, \psi_1)$ ,  $v(c_1, \psi_1)$  принимают вид (8);  $c_1, \psi_1$  определяются уравнениями первого приближения (10). Совершенно аналогично принимая во внимание слагаемые порядка малости  $\varepsilon^2$  включительно в уравнениях (9), произведя замену переменных

$$c_1 = c_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} u_1(c_2, \psi_2), \quad \psi_1 = \psi_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} v_1(c_1, \psi_1) \quad (12)$$

и пренебрегая в правых частях преобразованных уравнений величинами порядка малости  $\varepsilon^3$ , получим систему уравнений второго приближения.

В качестве примера найдем первое приближение решения уравнения второго порядка с запаздыванием следующего вида:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t - \varepsilon \Delta) = \varepsilon \beta [1 - \gamma x^2(t)] \dot{x}(t - \varepsilon \Delta), \quad (13)$$

где  $\delta, \omega, \beta, \gamma, \Delta$  — положительные постоянные, удовлетворяющие условию  $\omega^2 > \delta^2$ ;  $\varepsilon$  — положительный малый параметр. Для случая, когда  $\delta = 0$ , уравнение (13) было рассмотрено В. П. Рубаником и Ю. А. Митропольским [6, 7]. Согласно рассуждениям изложенного, после ряда выкладок находим первое приближение решения уравнения (13)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos \psi_1 - \frac{\varepsilon}{4\omega_0} \left[ \left( \beta - \frac{\beta\gamma\omega_0^2 c_1^2}{4(\omega_0^2 + \delta^2)} + \frac{\Delta\omega^2}{2} \right) \frac{3\delta c_1}{2\omega_0} \cos \psi_1 + \left( \frac{5}{2} \beta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta\gamma c_1^2 (2\omega_0^2 + 3\delta^2)}{2(\omega_0^2 + \delta^2)} + \Delta\omega^2 \right) c_1 \sin \psi_1 - \frac{\delta\beta\gamma\omega_0 c_1^3}{4(4\omega_0^2 + \delta^2)} \cos 3\psi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \beta\gamma c_1^2 - \frac{3}{2} \beta - \frac{\beta\gamma c_1^2 (2\omega_0^2 + \delta^2)}{4(4\omega_0^2 + \delta^2)} \right) c_1 \sin 3\psi_1 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$c_1, \psi_1$  определяются выражениями вида

$$c_1 = \frac{\sqrt{\delta - \frac{\varepsilon}{2} (\beta + \Delta\omega^2) (c_0 e^t)^{-\delta + \frac{\varepsilon}{2} (\beta + \Delta\omega^2)}}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon\beta\gamma}{8} (c_0 e^t)^{-2\delta + \varepsilon(\beta + \Delta\omega^2)}}$$

$$\psi_1 = \left[ \omega_0 + \frac{\varepsilon \delta}{2\omega_0} (\beta + \Delta\omega^2) \right] t - \frac{3\delta}{2\omega_0} \ln \left[ 1 - \frac{\varepsilon \beta \gamma}{8} (c_0 e^t)^{-2\delta + \varepsilon(\beta + \Delta\omega^2)} \right] + \psi_0, \quad (15)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ ;  $c_0, \psi_0$  — постоянные интегрирования.

Автор искренне благодарит Ю. А. Митропольского за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Попов, Одно обобщение асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейного колебания, ДАН СССР, т. 111, № 2, 1956.
2. Е. П. Попов и И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
3. Г. Бояджиев, Годшиник на висшите технически учебни заведения, Математика, кн. 2, т. 3, 1970.
4. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Изд-во АН УССР, 1934.
5. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
6. В. П. Рубаник, Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям, УМЖ, т. XI, № 4, 1959.
7. Ю. А. Митропольский, Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1966.

Поступила 10.V 1971 г.

Институт математики АН УССР