УДК 519.55

Об одном комбинированном приближенном методе

А. Е. Мартынюк

Основной целью данной работы является изложение и обоснование нового комбинированного приближенного метода для линейного операторного уравнения

$$Au - \lambda Ku = f, \quad D(K) \supset D(A), \quad f \in H, \tag{1}$$

с положительно определенным в обобщенном смысле оператором A. При этом основное гильбертово пространство H считаем вещественным и сепарабельным.

Мы называем линейный неограниченный вообще говоря, оператор A с плотной в H областью определения $D(A)$ положительно определенным в обобщенном смысле, если существует такой допускающий замыкание линейный оператор A_α, удовлетворяющий условию $D(A_\alpha) \supset D(A)$, что для любых элементов $u, v \in D(A)$ справедливо равенство

$$(Au, A_\alpha v) = (A_\alpha v, Au) \tag{2}$$

и для каждого $u \in D(A)$ выполняются неравенства

$$(Au, A_\alpha u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \quad \| A_\alpha u \|^2 \leqslant c^2 (Au, A_\alpha u), \tag{3}$$

где γ, c — положительные постоянные.

Названный оператор впервые введен автором в работах [1 2]. При этом в комплексном H равенство (2) вытекает из (3) [2]. Из (3) следует также ограниченность операторов $A^{-1}, A_\alpha A^{-1}$ и оценка

$$\| A_\alpha A^{-1} \| \leqslant c^2. \tag{4}$$

Наличие положительно определенного в обобщенном смысле оператора A позволяет ввести [1, 2] рабочее для нашей цели гильбертово пространство H_α типа Фридрихса с метрикой

$$[u, v]_\alpha = (Au, A_\alpha v),\ u, v \in D(A), \tag{5}$$

$$|u|_\alpha^2 = (Au, A_\alpha u),\ u \in D(A). \tag{6}$$

1. Рассмотрим сначала следующий приближенный метод, соединяющий идеи итерационного метода и метода Галеркина — Крылова.

Возьмем какую-либо полную в H_α систему $\{\varphi_k\}$ линейно независимых в любом конечном количестве элементов $\varphi_k \in D(A)$, называемую обычно координатной системой. Положим $u_0 = A^{-1}f$. Применяя к уравнению $Au = \lambda K u_0 + f$ метод Галеркина — Крылова [3] в форме $u_1 = u_0 + \lambda a_1^{(1)}\varphi_1$, найдем первое приближение u_1 к решению уравнения (1) и т. д. Если уже найдено приближение u_{n-1}, $n > 1$, то следующее приближенвое решение u_n уравнения (1) находим применением метода Галеркина — Крылова в форме

$$u_n = u_0 + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\varphi_k \tag{7}$$

к уравнению $Au = \lambda K u_{n-1} + f$. Это приводит к линейной системе

$$(Au_n, A_\alpha \varphi_l) = (\lambda K u_{n-1} + f, A_\alpha \varphi_l),\ l = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

относительно неизвестных коэффициентов $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$.

Изложенный метод называем методом Галеркина — Крылова через последовательные приближения.

Теорема 1. *Пусть A — положительно определенный в обобщенном смысле оператор, причем $D(A^{-1}) = H$, а оператор λK для всех $u \in D(A)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\lambda| \, \| Ku \| \leqslant B |u|_\alpha,\ B = \mathrm{const} > 0. \tag{9}$$

Если выполняется условие

$$B\sqrt{\| A_\alpha A^{-1} \|} \leqslant q < 1, \tag{10}$$

то уравнение (1) *имеет единственное, по крайней мере обобщенное, решение и метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения в форме* (7) *для этого уравнения сходится в пространстве H_α.*

Доказательство. Приведем уравнение (1) к виду

$$u - \lambda T u = A^{-1}f,\ T = A^{-1}K, \tag{11}$$

и введем оператор $Lu = \lambda T u + A^{-1}f$, $u \in D(A)$. Для произвольного элемента $u \in D(A)$ на основании (6), (9) имеем

$$|\lambda T u|_\alpha = |\lambda| \sqrt{[Tu, Tu]_\alpha} = |\lambda| \sqrt{(Ku, A_\alpha A^{-1} K u)} \leqslant B \sqrt{\| A_\alpha A^{-1} \|}\, |u|_\alpha.$$

Следовательно, оператор λT ограничен в H_α. А так как $D(A)$ плотно в H_α, то после расширения T на все пространство H_α оператор L будет уже определен на всем H_α. При этом $R(L) \subset H_\alpha$. Кроме того, для любых $u, v \in H_\alpha$ на основании (6), (9), (10) получим $|Lu - Lv|_\alpha \leqslant q |u - v|_\alpha$. Таким образом, L — оператор сжатия в метрике H_α и преобразует H_α в свою часть. По известной теореме С. Банаха уравнение (11) имеет в H_α единственное решение u_*, которое будет, по крайней мере, обобщенным решением исходного уравнения (1).

Применяя далее к уравнению (1) метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения, на n-м шаге прийдем к линейной системе (8) с известными правыми частями. В силу (5) она в метрике H_α примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_l]_\alpha\, a_k^{(n)} = [Tu_{n-1}, \varphi_l]_\alpha, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Эта система по структуре ее левой части имеет единственное решение. Следовательно, приближенное решение u_n находится однозначно при любом n.

Для большей простоты в дальнейшем координатную систему $\{\varphi_k\} \subset D(A)$ будем считать уже ортонормированной в H_α. Тогда из системы (12) непосредственно находим

$$a_l^{(n)} = [Tu_{n-1}, \varphi_l]_\alpha, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

после чего приближенное решение (7) представится формулой

$$u_n = u_0 + \lambda \sum_{k-1}^{n} [Tu_{n-1}, \varphi_k]_\alpha\, \varphi_k\,. \tag{14}$$

Разлагая далее элемент Tu_* в ряд Фурье по той же системе $\{\varphi_k\}$, представим точное решение u_* уравнения (11) в виде

$$u_* = u_0 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [Tu_*, \varphi_k]_\alpha\, \varphi_k\,. \tag{15}$$

Вычитая (14) из (15) и переходя к норме (6), с учетом ортонормировки $\{\varphi_k\}$ в H_α получим

$$|u_* - u_n|_\alpha^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} [Tu_* - Tu_{n-1}, \varphi_k]_\alpha^2 + \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} [Tu_*, \varphi_k]_\alpha^2\,. \tag{16}$$

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем такое N_1, чтобы для всех $n \geqslant N_1$ было

$$\lambda^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} [Tu_*, \varphi_k]_\alpha^2 < \frac{1}{2}(1 - q^2)\,\varepsilon^2. \tag{17}$$

Фиксируя $n \geqslant N_1$ и оценивая еще первую сумму в правой части (16) при помощи неравенств Бесселя и (9), (10), из (16) с учетом (17) получим

$$|u_* - u_n|_\alpha^2 < q^2\, |u_* - u_{n-1}|_\alpha^2 + \frac{1}{2}(1 - q^2)\,\varepsilon^2.$$

На основании этого неравенства при любом натуральном p имеем

$$|u_* - u_{n+p}|_\alpha^2 < q^{2(p+1)}\, |u_* - u_{n-1}|_\alpha^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2.$$

Далее, применяя неравенство Бесселя и равенство Стеклова — Парсеваля по норме (6) и учитывая (9), (10), из (14), (15) получим оценки

$$|u_n|_\alpha \leqslant \frac{|u_0|_\alpha}{1 - q}\,, \quad |u_*|_\alpha \leqslant \frac{|u_0|_\alpha}{1 - q},$$

в силу которых последнее неравенство приводится к виду

$$|u_* - u_{n+p}|_\alpha^2 < 4R_q^2 q^{2(p+1)} + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2, \quad R_q = \frac{|u_0|_\alpha}{1 - q}. \tag{18}$$

Найдем теперь для заданного выше $\varepsilon > 0$ такое N_2, чтобы для всех $p \geqslant N_2$ было $4R_q^2 q^{2(p+1)} < \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Тогда из (18) получим неравенство $|u_* - u_{n+p}|_\alpha < \varepsilon$, справедливое для всех $n \geqslant N_1$, $p \geqslant N_2$ и, стало быть, для $n, p \geqslant N_0 = \max(N_1, N_2)$. Отсюда заключаем, что для всех $m \geqslant N = 2N_0 + 1$ будет $|u_* - u_m|_\alpha < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{m\to\infty} u_m = u_*$ в H_α. Теорема 1 доказана.

Дадим теперь при условиях теоремы 1 оценку погрешности приближенного решения u_n. Для большей простоты в уравнении (1) примем $\lambda = 1$. Координатную систему $\{\varphi_k\}$ также будем считать ортонормированной в H_α. Кроме того, потребуем, чтобы последние коэффициенты двух смежных приближений u_{k-1}, u_k удовлетворяли условию

$$|a_k^{(k)}| < q\,|a_{k-1}^{(k-1)}|, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{19}$$

В приложениях достаточно убедиться в наличии условия (19) для $k = 2$. Тогда в силу устойчивости итерационных методов оно будет выполняться и для последующих $k = 3, 4, \ldots$

При $n = 1$ имеем $u_1 - u_0 = a_1^{(1)}\varphi_1$, откуда

$$|u_1 - u_0|_\alpha^2 = [a_1^{(1)}]^2, \quad u_0 = A^{-1}f. \tag{20}$$

Далее для любого $n > 1$ на основании (14) при $\lambda = 1$ имеем

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} [Tu_{n-1} - Tu_{n-2}, \varphi_k]_\alpha \varphi_k + [Tu_{n-1}, \varphi_n]_\alpha \varphi_n.$$

Отсюда, переходя к норме в H_α и применяя неравенство Бесселя с учетом (9), (10), (13) получим

$$|u_n - u_{n-1}|_\alpha^2 \leqslant q^2 |u_{n-1} - u_{n-2}|_\alpha^2 + [a_n^{(n)}]^2.$$

Понижая в правой части последовательно индексы и учитывая (19), (20), прийдем к неравенству $|u_n - u_{n-1}|_\alpha \leqslant \sqrt{n}q^{n-1}|u_1 - u_0|_\alpha$. На основании этого неравенства при любых $n, p\ (p > n)$ имеем

$$|u_p - u_n|_\alpha \leqslant (\sqrt{p}q^{p-1} + \sqrt{p-1}q^{p-2} + \ldots + \sqrt{n+1}q^n)\,|u_1 - u_0|_\alpha. \tag{21}$$

Используем далее легко получаемое тождество

$$(n+1)q^n + (n+2)q^{n+1} + \ldots + (n+r)q^{n+r-1} + \ldots = \frac{(n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2}. \tag{22}$$

Усиливая надлежащим образом неравенство (21) и переходя затем к пределу при $p \to \infty$, мы с учетом (22) и получим требуемую оценку

$$|u_* - u_n|_\alpha \leqslant \frac{\sqrt{n+1}q^n - \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}q^{n+1}}{(1-q)^2}\,|u_1 - u_0|_\alpha. \tag{23}$$

При этом для вычисления числа q из (10) можно пользоваться оценкой (4) или поступать как в [3].

Метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения выгодно применять к уравнению (1) в случае ортонормированной в H_α координатной системы $\{\varphi_k\}$, так как в этом случае неизвестные коэффициенты приближенного решения (7) находятся непосредственно по формулам (13).

2. Перейдем к рассмотрению упомянутого в начале работы комбинированного приближенного метода.

Зафиксируем натуральное m и рассмотрим m-мерное уравнение

$$u_m - \lambda T_m u_m \equiv u_m - \lambda \sum_{k=1}^{m} [Tu_m, \varphi_k]_\alpha \varphi_k = A^{-1}f. \tag{24}$$

Пусть существует ограниченный в H_α обратный оператор $\Gamma_{m\lambda} = (E - \lambda T_m)^{-1}$, определенный на множестве $\{A^{-1}f\}$, $f \in H$. Тогда уравнение (24) имеет единственное решение $u_m = \Gamma_{m\lambda}(A^{-1}f)$, которое является [3] приближенным решением уравнения (1), найденным методом Галеркина — Крылова в форме (7). Примем за нулевое приближение элемент $u_m^{(0)} = u_m$. Если уже найдено приближение $u_m^{(n-1)}$, $n > 1$, то следующее приближенное решение $u_m^{(n)}$ уравнения (1) находим в форме

$$u_m^{(n)} = u_m^{(0)} + \lambda \sum_{k=1}^{m+n} a_k^{(n)} \varphi_k, \tag{25}$$

вычисляя неизвестные коэффициенты $a_k^{(n)}$ из линейной системы

$$\lambda \sum_{k=1}^{m+n} [\varphi_k, \varphi_l]_\alpha a_k^{(n)} = [\Gamma_{m\lambda}(\lambda T u_m^{(n-1)} - u_m^{(n-1)}) + u_m^{(n-1)}, \varphi_l]_\alpha \tag{26}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, m+n)$$

с известными правыми частями. Отсюда, считая, как и выше, $\{\varphi_k\}$ ортонормированной в H_α, непосредственно получаем

$$a_l^{(n)} = \frac{1}{\lambda}[\Gamma_{m\lambda}(\lambda T u_m^{(n-1)} - u_m^{(n-1)}) + u_m^{(n-1)}, \varphi_l]_\alpha, \ l = 1, 2, \ldots, m+n. \tag{27}$$

При этом для нахождения элемента $\bar{u}_m^{(n-1)} = \Gamma_{m\lambda}(\lambda T u_m^{(n-1)} - u_m^{(n-1)})$ через известный элемент $u_m^{(n-1)}$ нужно применить метод Галеркина — Крылова в форме

$$\bar{u}_m^{(n-1)} = \lambda T u_m^{(n-1)} - u_m^{(n-1)} + \lambda \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k \varphi_k$$

к уравнению

$$Au - \lambda Ku = \lambda K u_m^{(n-1)} - A u_m^{(n-1)}$$

вида (1). Это сводится к решению m-мерной системы

$$(A\bar{u}_m^{(n-1)} - \lambda K \bar{u}_m^{(n-1)}, A_\alpha \varphi_l) = (\lambda K u_m^{(n-1)} - A u_m^{(n-1)}, A_\alpha \varphi_l) \ (l = 1, 2, \ldots, m)$$

относительно неизвестных коэффициентов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$.

Будем называть изложенный метод комбинированным методом Галеркина — Крылова через последовательные приближения.

Теорема 2. *Пусть A — положительно определенный в обобщенном смысле оператор, причем $D(A^{-1}) = H$. Если оператор $T = A^{-1}K$ вполне непрерывный в H_α и при заданном λ уравнение (1) имеет единственное решение, то комбинированный метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения для этого уравнения сходится в пространстве H_α.*

Доказательство. Приведем уравнение (1) к виду (11). Так как существует ограниченный в H_α обратный оператор $\Gamma_\lambda = (E - \lambda T)^{-1}$, определенный на всем H_α, то для всех $u \in H_\alpha$

$$|u - \lambda T u|_\alpha \geqslant p|u|_\alpha, \ p = \text{const} > 0. \tag{28}$$

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \frac{p}{4}$. В силу полной непрерывности в H_α оператора $T = A^{-1}K$ найдется [4] такое $m = m(\varepsilon)$, что для всех $u \in H_\alpha$ имеем

$$|\lambda| |(T - T_m) u|_\alpha \leqslant \varepsilon |u|_\alpha. \tag{29}$$

На основании (28) и (29) получим неравенство

$$|u - \lambda T_m u|_\alpha \geqslant p_0 |u|_\alpha, \ p_0 = p - \varepsilon > 0, \tag{30}$$

также справедливо для всех $u \in H_\alpha$. Это неравенство обеспечивает существование ограниченного в H_α обратного оператора $\Gamma_{m\lambda} = (E - \lambda T_m)^{-1}$, определенного вместе с Γ_λ на всем H_α. Следовательно, уравнение (24), начиная с выбранного m, имеет единственное решение $u_m = \Gamma_{m\lambda}(A^{-1}f)$. Кроме того, из (30) имеем

$$|\Gamma_{m\lambda}|_\alpha \leqslant \frac{1}{p - \varepsilon} \leqslant \frac{4}{3p}. \tag{31}$$

Переписывая далее уравнение (11) при выбранном m в виде $u - \lambda T_m u - \lambda(T - T_m) u = A^{-1}f$ и применяя обратный оператор $\Gamma_{m\lambda}$, получим уравнение

$$u - \lambda D_{m\lambda} u \equiv u - \lambda \Gamma_{m\lambda}(T - T_m) u = \Gamma_{m\lambda}(A^{-1}f). \tag{32}$$

При этом для всех $u \in H_\alpha$ в силу (29), (31) и условия $\varepsilon \leqslant \frac{p}{4}$ имеем

$$|\lambda| |D_{m\lambda} u|_\alpha \leqslant q_m |u|_\alpha, \ q_m = \frac{\varepsilon}{p - \varepsilon} \leqslant \frac{1}{3}. \tag{33}$$

Применим теперь к уравнению (32) метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения. Принимая за нулевое приближение элемент $u_m^{(0)} = u_m = \Gamma_{m\lambda}(A^{-1}f)$ и считая, что уже найдено $u_m^{(n-1)}$, $n > 1$, следующее приближенное решение $u_m^{(n)}$ уравнения (32) находим в форме (25), вычисляя неизвестные коэффициенты $a_k^{(n)}$ из системы

$$[u_m^{(n)}, \varphi_l]_\alpha = [\lambda D_{m\lambda} u_m^{(n-1)} + u_m^{(0)}, \varphi_l]_\alpha, \ l = 1, 2, \ldots, m + n. \tag{34}$$

Отсюда с учетом ортонормировки $\{\varphi_k\}$ в H_α находим

$$a_l^{(n)} = [D_{m\lambda} u_m^{(n-1)}, \varphi_l]_\alpha, \ l = 1, 2, \ldots, m + n.$$

Тогда приближенное решение (25) запишется в виде

$$u_m^{(n)} = u_m^{(0)} + \lambda \sum_{k=1}^{m+n} [D_{m\lambda} u_m^{(n-1)}, \varphi_k]_\alpha \varphi_k. \tag{35}$$

Представим далее точное решение u_* уравнения (32) неявно в виде

$$u_* = u_m^{(0)} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [D_{m\lambda} u_*, \varphi_k]_\alpha \varphi_k.$$

Вычитая отсюда (35) и повторяя заключительные рассуждения из доказательства теоремы 1, основанные этот раз на неравенстве (33), установим, что $\lim\limits_{n \to \infty} u_m^{(n)} = u_*$ в пространстве H_α.

С другой стороны, в силу тождества $\Gamma_{m\lambda}(E-\lambda T_m)u_m^{(n-1)}=u_m^{(n-1)}$ система (34) равносильна системе (26), неизвестные $a_l^{(n)}$ которой находятся по формулам (27). Таким образом, применяемый к уравнению (32) метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения в форме (25) реализуется комбинированным методом Галеркина — Крылова через последовательные приближения для уравнения (1) в той же форме (25). Следовательно, второй из этих методов также сходится в пространстве H_α. Теорема 2 доказана.

В приложениях иногда можно при надлежащем m равномерно оценить норму обратного оператора $\Gamma_{m\lambda}$, т. е. получить неравенство

$$|\Gamma_{m\lambda}|_\alpha \leqslant d, \ d=\mathrm{const}>0, \tag{36}$$

для всех последующих m. Поэтому представляет интерес, на наш взгляд, и обратная в некотором смысле теорема.

Теорема 3. *Пусть A, $T=A^{-1}K$ — указанные в теореме 2 операторы. Если при заданном λ, начиная с некоторого m, уравнение* (24) *однозначно разрешимо и имеет место оценка* (36), *то при том же λ исходное уравнение* (1) *также однозначно разрешимо (по крайней мере в обобщенном смысле) и комбинированный метод Галеркина — Крылова через последовательные приближения для уравнения* (1) *сходится в H_α.*

Доказательство. Приведем, как и выше, уравнение (1) к виду (32) и рассмотрим на множестве $D(A)$ оператор $\Pi_{m\lambda}u=\lambda D_{m\lambda}u+\Gamma_{m\lambda}(A^{-1}f)$. Взяв произвольно $\varepsilon>0$, $\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{2d}$, при достаточно большом m для любого $u\in D(A)$ на основании (29), (36) получим неравенство

$$|\lambda|\,|D_{m\lambda}u|_\alpha\leqslant q|u|_\alpha,\ q=\varepsilon d\leqslant\frac{1}{2}, \tag{37}$$

позволяющее расширить оператор $\Pi_{m\lambda}$ вместе с $D_{m\lambda}$ на все H_α. Кроме того, для любых $u, v\in H_\alpha$, как и выше, получим

$$|\Pi_{m\lambda}u-\Pi_{m\lambda}v|_\alpha=|\lambda|\,|D_{m\lambda}u-D_{m\lambda}v|_\alpha\leqslant q|u-v|_\alpha,\ \ q=\varepsilon d\leqslant\frac{1}{2}. \tag{38}$$

При этом по структуре оператора $\Pi_{m\lambda}$ имеем $R(\Pi_{m\lambda})\subset H_\alpha$. Учитывая далее (37), (38) и применяя уже использованные при доказательстве теорем 1, 2 рассуждения, мы и закончим доказательство теоремы 3.

Чтобы оценить погрешность найденного $u_m^{(n)}$, можно воспользоваться неравенством (23), полагая в нем $u_0=u_m^{(0)}$, $u_1=u_m^{(1)}$. Нужно только, исходя из условий теорем 2 или 3, найти при надлежащем m соответствующее $q\in(0,1)$.

Изложенный комбинированный метод можно применять для уточнения приближенного решения u_m уравнения (1), найденного методом Галеркина—Крылова в форме (7). Такое уточнение представляется нам оправданным. Ведь при возрастании m даже в случае ортонормированной координатной системы $\{\varphi_k\}$ значительно усложняется техника вычисления m-х приближенных решений типа Галеркина. В то же время практическая реализация комбинированного метода Галеркина — Крылова через последовательные приближения при помощи формул (27) ничем не ограничена и позволяет с как угодно малой погрешностью приблизить найденное предварительно методом Галеркина — Крылова приближенное решение u_m уравнения (1) к его точному решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Мартынюк, О некотором обобщении вариационного метода, ДАН СССР, т. 117, № 3, 1957.
2. А. Е. Мартынюк, Некоторые новые приложения методов типа Галеркина, Матем. сб., т. 49(91) : 1, 1959.
3. А. Е. Мартынюк, О некоторых приближенных методах типа Галеркина и комбинированного типа, Изв. вузов, матем., № 10, 1967.
4. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.

Поступила 24.X 1969 г.,
после переработки — 4.III 1971 г.
Житомирский педагогический институт