УДК 519.44

Об изоморфно факторизуемых группах

Б. И. Мищенко

В начале пятидесятых годов С. Н. Черниковым была поставлена задача изучения групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп. Этому вопросу посвящен ряд работ С. Н. Черникова [1, 2] и его учеников [3—5]. К настоящему времени исследованиями, относящимися к группам с системами дополняемых подгрупп, определилось уже целое направление в теории групп, достаточно богатое существенными результатами. Системы дополняемых подгрупп в этих исследованиях либо жестко фиксируются с помощью того или иного определяющего их свойства (система всех подгрупп, система абелевых подгрупп, система инвариантных подгрупп и др.), либо выделяются нежестко условием существования дополняемых подгрупп среди подгрупп с теми или иными свойствами. Одно из нежестких условий содержится в следующем определении, предложенном автору С. Н. Черниковым.

Группа G называется изоморфно факторизуемой относительно некоторой системы Σ ее подгрупп, если для каждой подгруппы H из G существует в любой подгруппе $S \subset G$, содержащей H, изоморфная H подгруппа $\widetilde{H}$, имеющая дополнение в S.

В предлагаемой статье рассматриваются некоторые виды групп, изоморфно факторизуемых относительно системы Σ всех абелевых подгрупп, выделяемые следующими определениями.

Определение 1. Группу G назовем KA-группой, если для каждой абелевой подгруппы $A \subset G$ существует в любой содержащей ее подгруппе S изоморфная A подгруппа $\widetilde{A}$, имеющая инвариантное в S дополнение.

Определение 2. Группу G назовем NA-группой, если для каждой абелевой подгруппы $A \subset G$ существует в любой содержащей ее подгруппе S изоморфная A инвариантная в S подгруппа $\widetilde{A}$, имеющая дополнение в S.

В данной статье устанавливается абелевость произвольных NA-групп, периодических KA-групп и произвольных KA-групп конечного специального ранга (в смысле А. И. Мальцева). Вместе с этим получается полное описание рассматриваемых групп.

Группа G имеет конечный ранг s (специальный ранг в смысле А. И. Мальцева [6]), если s — наименьшее натуральное число со следующим свойством: всякая конечнопорожденная подгруппа группы G имеет систему образующих элементов, состоящую не более чем из s элементов.

Описание конечных KA-групп дает следующая лемма.

Лемма 1. *Конечные KA-группы исчерпываются конечными абелевыми вполне факторизуемыми группами.*

Доказательство. Покажем сначала, что конечная KA-группа G нильпотентна. Действительно, если G — ненильпотентная конечная KA-группа, то она содержит подгруппу Шмидта M, т. е. минимальную ненильпотентную подгруппу, все истинные подгруппы которой нильпотентны. Известно [7], что подгруппа M является полупрямым произведением двух своих силовских подгрупп $M = P_1 \rtimes P_2$ и, как нетрудно убедиться, инвариантная силовская p_1-подгруппа P_1 совпадает с коммутантом M' группы M. Если теперь S — инвариантное дополнение к некоторой циклической p_1-подгруппе $\{x\}$ из P_1 (существование подгруппы S следует из самого определения KA-группы), то, очевидно, S содержит коммутант M', а это противоречит тому, что M' совпадает с подгруппой P_1. Полученное противоречие показывает, что группа G нильпотентна.

Для доказательства справедливости утверждения леммы теперь достаточно показать, что в конечной KA-группе G ее произвольная силовская p-подгруппа G_p абелева. Пусть A — одна из абелевых подгрупп максимального порядка в p-подгруппе G_p, имеющая инвариантное дополнение K в группе G_p; существование подгрупп A и K следует из определения KA-группы. Если инвариантная подгруппа K отлична от единичной подгруппы E, то ее пересечение с центром $Z(G_p)$ группы G_p также отлично от E (см. [8]) и тогда подгруппа $A \times (K \cap Z(G_p))$ абелева, что противоречит максимальности порядка подгруппы A. Следовательно, $G_p = A$ и, значит, группа G абелева. Порядки элементов группы G, очевидно, свободны от квадратов, поэтому G вполне факторизуемая группа. Лемма доказана.

Теорема 1. *Периодические KA-группы абелевы и вполне факторизуемы.*

Доказательство. Пусть G — периодическая KA-группа и $\{g\}$ — такая циклическая подгруппа ее силовской p-подгруппы G_p, что $H \rtimes \{g\} = G$. Очевидно, коммутант G' группы G содержится в подгруппе H. Так как $g \notin H$, то отсюда следует, что фактор-группа $\overline{G} = G/G'$ содержит отличную от единицы силовскую p-подгруппу $\overline{G}_p$ для произвольного p из множества $\pi(G)$ простых делителей порядков элементов группы G.

Покажем, что группа G разложима в прямое произведение своих силовских p-подгрупп. Пусть G не является p-группой и p—фиксированное простое число из $\pi(G)$. Полный прообраз $G_p^{(1)}$ подгруппы $\overline{G}_p$ в группе G является характеристической подгруппой в G. Нетрудно убедиться, что фактор-группа $G/G_p^{(1)}$ отлична от единицы и не содержит элементов, порядки которых являются степенями числа p. Цепь подгрупп $G = G_p^{(0)} \supset G_p^{(1)}$ можно, очевидно, продолжить до убывающей цепи характеристических подгрупп

$$G = G_p^{(0)} \supset G_p^{(1)} \supset \ldots \supset G_p^{(\alpha)} \supset \ldots, \tag{1}$$

в которой $G_p^{(\alpha)}$ для предельного α является пересечением $\bigcap\limits_{\beta<\alpha} G_p^{(\beta)}$, а для непредельного—выделяется в подгруппе $G_p^{(\alpha-1)}$ так же, как выделялась подгруппа $G_p^{(1)}$ в $G_p^{(0)} = G$. Цепь (1) останавливается для некоторого порядкового числа γ, не превосходящего мощности группы G. Член $G_p^{(\gamma)}$ цепи (1) является, очевидно, инвариантной силовской p-подгруппой группы G. Считая теперь p произвольным элементом множества $\pi(G)$, получаем, что в KA-группе G инвариантны все ее силовские p-подгруппы, и поэтому она разлагается в их прямое произведение.

Силовские p-подгруппы KA-группы очевидно однослойны, т. е. для любого элемента $g \in G_p g^p = 1$.

В силу самого определения в KA-группе G существует убывающий нормальный ряд подгрупп

$$G = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_{\alpha-1} \supset N_\alpha \supset \ldots$$

с циклическими факторами. С. Н. Черниковым [9] доказана локальная конечность однослойных p-групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами, поэтому силовские p-подгруппы периодических KA-групп локально конечны, и тогда в силу леммы 1 они абелевы и вполне факторизуемы. Теорема доказана.

Замечание 1. Непосредственно из определения KA-групп вытекают следующие их свойства:

а) в KA-группе G для каждой абелевой подгруппы A существует нормальный делитель N группы G, определяющий фактор-группу G/N, изоморфную подгруппе A;

б) в конечнопорожденной KA-группе G минимальное число образующих элементов произвольной абелевой подгруппы из G не превосходит числа образующих элементов самой группы.

Лемма 2. *Абелева группа конечного ранга тогда и только тогда изоморфно факторизуема относительно системы всех своих подгрупп, когда она разложима в прямое произведение конечного числа бесконечных циклических подгрупп и периодической вполне факторизуемой абелевой подгруппы.*

Это предложение без труда можно извлечь из результатов работы [10].

Теорема 2. *Непериодическая KA-группа конечного ранга является прямым произведением конечного числа бесконечных циклических подгрупп и периодической вполне факторизуемой абелевой подгруппы.*

Доказательство. Покажем сначала, что непериодическая KA-группа с двумя образующими элементами абелева. Пусть G — нециклическая KA-группа с двумя образующими элементами. В силу замечания 1 ранг произвольной абелевой подгруппы группы G не больше 2. Пусть $\{g\}$ — такая бесконечная циклическая подгруппа группы G, что $G_1 \leftthreetimes \{g\} = G$. Тогда, если $G^{(1)}$ —полный прообраз максимальной периодической подгруппы фактор-группы $G/G^{(1)}$ в группе G, то подгруппа $G^{(1)}$ характеристическая в G, а фактор-группа $G/G^{(1)}$ — бесконечная абелева группа без кручения. Если подгруппа $G^{(1)}$ — непериодическая, то цепь подгрупп $G = G^{(0)} \supset \supset G^{(1)}$ можно продолжить до цепи характеристических подгрупп

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \ldots \supset G^{(\alpha)} \supset \ldots,$$

которая, очевидно, останавливается для некоторого порядкового числа γ, не превосходящего мощности группы G. Член $G^{(\gamma)} = F$ является инвариантной в группе G периодической подгруппой. Подгруппа F в силу теоремы 1 абелева и, следовательно, ранг ее не больше 2. Таким образом, подгруппа F конечна и поэтому, если $\widetilde{F}$ — изоморфная F, инвариантно дополняемая в группе G подгруппа, то из включения $\widetilde{F} \subseteq F$ следует равенство $\widetilde{F} = F$, а вместе с этим имеет место разложение $G = F \times H$, в котором H — KA-группа без кручения. В KA-группе H можно построить убывающий рациональный ряд

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k \supset \ldots \tag{2}$$

с бесконечными циклическими факторами. Так как группа G имеет конечный ранг, то рациональный ряд (2) конечен [11]. Пусть $H_{n-1} = E$ и $H_n = \{a\}$ — последний и, соответственно, предпоследний члены ряда (2) и bH_n — образующий элемент бесконечной циклической группы H_{n-1}/H_n. Тогда подгруппа $S = \{a, b^2\}$ является, очевидно, абелевой подгруппой ранга 2 группы H_{n-1}. Подгруппа H_{n-1} является KA-группой и потому вместе с подгруппой S содержит изоморфную S подгруппу $\widetilde{S}$, имеющую инвариантное дополнение K. Так как в произвольной группе, обладающей рациональным рядом, длина такого ряда является инвариантом группы [12], то в группе H_{n-1} с рациональным рядом длины 2 подгруппа K может быть только периодической. Так как H_{n-1} — группа без кручения, то $K = E$ и $H_{n-1} = \widetilde{S}$. Таким образом, H_{n-1} абелева подгруппа ранга 2. Подгруппа H_{n-2} в ряду (2) не может быть абелевой, так как в силу замечания 1,б) группа G не содержит абелевых подгрупп ранга 3. Пусть $\widetilde{H}_{n-1}$ — изоморфная H_{n-1} подгруппа, имеющая в H_{n-2} инвариантное дополнение L. Так как длина рационального ряда группы H_{n-2} равна 3, то ранг подгруппы L равен 1. Ввиду замечания 1,б) подгруппа L имеет конечное число образующих элементов и, следовательно, бесконечная циклическая. Но тогда подгруппа, порожденная квадратами образующих элементов подгруппы $\widetilde{H}_{n-1}$ и подгруппой L, является абелевой подгруппой ранга 3. Это противоречит замечанию 1,б). Отсюда вытекает, что $H_{n-1} = H$, но тогда по доказанному подгруппа H абелева. Ввиду разложения $G = F \times H$ отсюда вытекает, что абелева и сама группа G.

Если теперь G — произвольная KA-группа, то из абелевости произвольной ее подгруппы с двумя образующими элементами следует абелевость всей группы G. Но тогда доказываемое для группы G утверждение сводится непосредственно к лемме 2.

Лемма 3. *Периодические NA-группы абелевы.*

Доказательство. Пусть H — нециклическая подгруппа, порожденная двумя произвольными элементами периодической NA-группы G. Если p — произвольное фиксированное простое число из множества $\pi(H)$, то в подгруппе H существует инвариантная дополняемая подгруппа $\{h_1\}$ порядка p, и тогда $H = \{h_1\} \leftthreetimes H_1$. Для произвольного элемента $g \in H_1$ подгруппа, порожденная элементами h_1 и g, конечна, следовательно, абелева и потому $H = \{h_1\} \times H_1$. Если $p \notin \pi(H_1)$, то $\{h_1\}$ — инвариантная силовская p-подгруппа группы H. Пусть $p \in \pi(H_1)$. Тогда, рассуждая аналогично, получим разложение для подгруппы $H_1 = \{h_2\} \times H_2$, в котором h_2— элемент порядка p, и далее разложение $H = \{h_1\} \times \{h_2\} \times H_2$. Теперь $p \notin \pi(H_2)$, так как в противном случае группу H можно было бы разложить в прямое произведение $H = \{h_1\} \times \{h_2\} \times \{h_3\} \times H_3$, в котором h_1, h_2, h_3 — элементы порядка p, и тогда 3 было бы минимальным числом образующих элементов фактор-группы H/H_3, что противоречит предположению о минимальном числе образующих элементов группы H. Следовательно, силовская p-подгруппа группы H совпадает с $\{h_1\} \times \{h_2\}$ и, значит, инвариантна и абелева. Считая теперь p произвольным элементом множества $\pi(H)$, получаем, что все силовские p-подгруппы группы H абелевы и инвариантны в H; но тогда абелева и сама группа H. Из абелевости произвольной подгруппы с двумя образующими элементами из G вытекает абелевость и самой группы G. Лемма доказана.

Теорема 3. *Произвольная NA-группа абелева.*

Доказательство. Ввиду леммы 3 доказать абелевость необходимо лишь для непериодических NA-групп и, по существу, лишь для непериодических NA-групп с двумя образующими элементами. Пусть G — нециклическая непериодическая NA-группа с двумя образующими элементами. Группа G содержит такую бесконечную циклическую подгруппу $\{g\}$, что $G = \{g\} \leftthreetimes H$. Покажем, что подгруппа $\{g\}$ содержится в центре группы G.

Пусть h — произвольный элемент из подгруппы H. Если порядок элемента h бесконечен и подгруппа K, порожденная элементами h и g, неабелева, то, как нетрудно убедиться, в подгруппе K не существует инвариантных дополняемых подгрупп, изоморфных абелевой подгруппе $\{h^2, g\}$ ранга 2. Это противоречит тому, что K — NA-группа. Пусть теперь порядок элемента h конечен и подгруппа $K = \{h, g\}$ неабелева. Централизатор инвариантной бесконечной циклической подгруппы $\{g\}$ в группе K имеет индекс 2 и, следовательно, вне централизатора существует элемент d порядка 2 такой, что подгруппа K_1, порожденная элементами g и d, неабелева. Подгруппа K_1 является NA-группой и поэтому в ней вместе с элементом d существует инвариантная дополняемая подгруппа порядка 2, которая, очевидно, содержится в центре группы K_1. Но тогда группа K_1, очевидно, абелева, что противоречит предположению о группе K_1.

Таким образом, элемент g принадлежит центру группы G и потому $G = \{g\} \times H$. Если подгруппа H —периодическая, то она, ввиду леммы 3, абелева и тогда непосредственно отсюда следует абелевость группы G. Пусть H — непериодическая подгруппа. Рассуждая аналогично, получим разложение группы $H = \{g_1\} \times H_1$, в котором $\{g_1\}$ — бесконечная циклическая подгруппа, и тогда $G = \{g\} \times \{g_1\} \times H_1$. Так как фактор-группа G/H_1 имеет ранг 2, то подгруппа H_1 может быть только периодической; в самом деле, в противном случае H_1 имеет разложение $H_1 = \{g_2\} \times H_2$ с бесконечным циклическим прямым множителем $\{g_2\}$ и тогда подгруппа H_2 определяет фактор-группу G/H_2 ранга 3, что невозможно в группе G с двумя образующими элементами. Следовательно, подгруппа H_1 периодическая и в силу леммы 3 абелева. Ввиду разложения $G = \{g\} \times \{g_1\} \times H_1$ отсюда сразу следует абелевость всей группы G.

Если теперь G — произвольная NA-группа, то из абелевости произвольной ее подгруппы с двумя образующими элементами вытекает абелевость всей группы G. Теорема доказана.

Следствие. *NA-группа конечного ранга является прямым произведением конечного числа бесконечных циклических подгрупп и периодической вполне факторизуемой подгруппы.*

Так как каждая абелева NA-группа является, очевидно, также и KA-группой, то ввиду доказанной теоремы это утверждение сводится непосредственно к теореме 2.

Из теоремы 2, сформулированного следствия и леммы 2 вытекает, что при дополнительном условии конечности ранга KA- и NA-групп они совпадают с абелевыми группами конечного ранга, изоморфно факторизуемыми относительно всех своих подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб., т. 35, 1954.
2. С. Н. Черников, О дополняемости силовских π-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп, Матем. сб., т. 37, 1955.
3. Н. В. Черникова, Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб., т. 39, 1956.
4. М. И. Каргаполов, Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, ДАН СССР, т. 127, № 3, 1969.
5. Ю. М. Горчаков, Примитивно факторизуемые группы, Уч. зап. Пермск. ун-та, т. 17, 1960.
6. А. И. Мальцев, О группах конечного ранга, Матем. сб., т. 22, 1948.
7. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальны, Матем. сб., т. 31, 1924.
8. С. Н. Черников, К теории полных групп, Матем. сб., т. 22, 1948.
9. С. Н. Черников, Условия локальной конечности однослойных p-групп, ДАН СССР, т. 147, № 1, 1962.
10. L. Fuchs, A. Kertesz, T. Szele, On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, Acta sci. math., **16**, 1955.
11. Д. И. Зайцев, О разрешимых группах конечного ранга, ДАН СССР, т. 181, № 1, 1968.
12. С. Н. Черников, К теории групп без кручения, обладающих возрастающим центральным рядом, Уч. зап. Уральск. ун-та, т. 7, 1949.
13. А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», М., 1967.

Поступила 18.VI 1971 г.
Киевский педагогический институт