УДК 517.948.32

Некоторые оценки для частных индексов краевой задачи Римана

А. М. Николайчук

Пусть L — контур, состоящий из конечного числа простых гладких замкнутых кривых, разбивающий плоскость комплексного переменного на связную область D^+, содержащую начало координат, и дополнительную к ней область D^-, содержащую бесконечно удаленную точку.

Краевая задача Римана для системы n пар функций заключается в отыскании аналитических в $D^\pm$ векторов $\Phi^\pm(z)$, предельные значения которых на контуре L непрерывны и удовлетворяют краевому условию:

$$\Phi^+(t) = A(t)\Phi^-(t) + b(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $b(t)$ — заданные на L соответственно неособенная квадратная матрица n-го порядка и вектор, причем элементы матрицы и координаты вектора — функции, удовлетворяющие условию Гельдера [1].

Решение задачи (1) равносильно представлению (факторизации) матрицы $A(t)$ в виде

$$A(t) = X^+(t)\,\Lambda(t)\,X^-(t),$$

где $\Lambda(t) = \|(t-z_0)^{\varkappa_i}\delta_{ik}\|$, $z_0 \in D^+$, δ_{ik} — символ Кронекера, $X^+(z)$ и $[X^-(z)]^{-1}\Lambda^{-1}(z)$ — канонические матрицы.

Целые числа $\varkappa_i$ называются частными индексами задачи, их сумма $\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i = \varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg\det A(t)]_L$ — суммарный индекс.

В п. 1 данной работы даются оценки изменения частных индексов задачи Римана (1) при умножении матрицы $A(t)$ слева (справа) на матрицу, рациональную в области D^+ (D^-).

В п. 2 выводится необходимое и достаточное условие совпадения частных индексов задачи (1) с треугольной матрицей $A(t)$ с индексами Коши диагональных элементов $A(t)$.

1. Пусть матрица $A(t)$ краевого условия (1) аналитическая в области D^+. Будем строить каноническую матрицу задачи при помощи линейных преобразований по схеме, предложенной в [1]. Пусть в точке $z_0 \in D^+$ определитель матрицы $A(z)$ обращается в нуль порядка p. Порядки столбцов в точке z_0 обозначим $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Если $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i < p$, то, согласно схеме приведения матрицы к нормальной форме, к некоторому столбцу с номером k прибавляются остальные, умноженные на полиномы степени не выше α_k. Такое преобразование равносильно умножению матрицы A справа на полиномиальную матрицу T с постоянным определителем. Умножим обе части тождества $A = AE$ (E — единичная матрица) справа на T и затем на диагональную матрицу $\|(t-z_0)^{-\beta_i}\|$, где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — порядки столбцов матрицы AT в точке z_0, причем

$$\beta_i = \alpha_i \text{ для } i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n;\ \beta_k > \alpha_k.$$

Поскольку порядки столбцов на бесконечности матрицы E неотрицательны, то и матрицы $ET\|(t-z_0)^{-\beta_i}\|$ также неотрицательны. После конечного числа указанных преобразований придем к тождеству $X^+(t) = A(t)X^-(t)$, где $X^+(z)$ и $X^-(z)$ — канонические матрицы задачи, причем порядки столбцов $X^-(z)$ на бесконечности неотрицательны. Имеет место такая теорема.

Теорема 1. *Число линейно независимых решений однородной краевой задачи* (1) *с матрицей, аналитической в области D^+, равно $\varkappa$, а неоднородная задача безусловно разрешима. Для частных индексов имеет место оценка*

$$0 \leqslant \varkappa_i \leqslant \varkappa \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1′. *Однородная краевая задача с матрицей, аналитической в области D^-, не имеет нетривиальных решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо $-\varkappa$ условий. Частные индексы заключены в интервале*

$$\varkappa \leqslant \varkappa_i \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, число решений l однородной задачи с аналитической матрицей коэффициентов выражается так:

$$l = \max(0, \varkappa). \tag{2}$$

В дальнейшем матрицу, имеющую характер рациональной в области D^+ (D^-), будем обозначать A^+ (A^-).

Для задач Римана с такими матрицами формула (2) неверна. Рассмотрим краевую задачу

$$\Phi^+(t) = A^+(t)\,\Phi^-(t). \tag{3}$$

Матрицу $A^+(t)$ можно представить в виде $A^+(t) = \dfrac{1}{R_1(t)} B(t)$, где $B(z)$ — — аналитическая матрица в области D^+, $R_1(z)$ — полином с нулями из D^+. Очевидно, степень p_1 полинома $R_1(z)$ не превосходит суммы порядков полюсов элементов матрицы $A^+(z)$.

Теорема 2. *Для частных индексов $\varkappa_i$ задачи* (3) *справедлива оценка*

$$-p_1 \leqslant \varkappa_i \leqslant \varkappa_{A^+} + (n-1)\,p_1 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $\varkappa_{A^+} = \operatorname{Inddet} A^+(t)$ — *суммарный индекс.*

Доказательство. Согласно теореме 1 частные индексы $\varkappa_i'$ матрицы $B(t)$ заключены в пределах

$$0 \leqslant \varkappa_i' \leqslant \varkappa_B, \tag{5}$$

где $\varkappa_B = \operatorname{Inddet} B(t) = \varkappa_{A^+} + np_1$.

Из (5) следует (4), так как факторизация $B(t) = X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1}$ влечет факторизацию $A^+(t) = X^+(t)\,[R_1(t)\,X^-(t)]^{-1}$ и $\varkappa_i = \varkappa_i' - p_1$.

Рассмотрим задачу

$$\Phi^+(t) = A^-(t)\,\Phi^-(t). \tag{6}$$

Обозначим через $k_{\min}$ наименьший из порядков элементов матрицы $A^-(z)$ на бесконечности. Матрицу $A^-(t)$ представим в виде

$$A^-(t) = \frac{1}{R_2(t)} B(t),$$

где $B(z)$ — аналитическая матрица в конечной части области D^-, $R_2(z)$ — полином степени p_2, нули которого лежат в D^-.

Теорема 2′. *Для частных индексов* $\varkappa_i$ *задачи* (6) *справедлива оценка*

$$\varkappa_{A-}+(n-1)(k_{\min}-p_2)\leqslant\varkappa_i\leqslant p_2-k_{\min}\quad(i=1,\ldots,n),\tag{7}$$

где $\varkappa_{A-}=\operatorname{Inddet}A^-(t)$ — *суммарный индекс.*

Доказательство. Перепишем (6) в виде

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{R_2(t)}\,\|\,t^{p_2-k_{\min}}\delta_{ik}\,\|\,C(t)\,\Phi^-(t),$$

где $C(z)$ — аналитическая матрица в области D^-, включая бесконечно удаленную точку.

Согласно теореме 1′ частные индексы $\varkappa_i'$ матрицы $C(t)$ заключены в пределах

$$\varkappa_C\leqslant\varkappa_i'\leqslant 0,\tag{8}$$

где $\varkappa_C=\operatorname{Inddet}C(t)=\varkappa_{A-}+n(k_{\min}-p_2)$. Из (8) следует (7), так как факторизация $C(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$ влечет факторизацию $A^-(t)=\left\{\frac{1}{R_2(t)}X^+(t)\right\}\times$ $\times\{\|\,t^{p_2-k_{\min}}\,\|\,[X^-(t)]^{-1}\}$ и $\varkappa_i=\varkappa_i'+p_2-k_{\min}$.

Теорема 3. *Если частные индексы* $\varkappa_i'$ *матрицы* $B(t)$ *заключены в пределах*

$$k_1\leqslant\varkappa_i'\leqslant k_2,\tag{9}$$

то для частных индексов $\varkappa_i$ *матрицы* $A^+(t)\,B(t)$ *справедлива оценка*

$$k_1-p_1\leqslant\varkappa_i\leqslant k_2+\varkappa_{A+}+(n-1)\,p_1\quad(i=1,\ldots,n).\tag{10}$$

Доказательство. В краевое условие

$$\Phi^+(t)=A^+(t)\,B(t)\,\Phi^-(t)\tag{11}$$

подставим факторизацию матрицы $B(t):B(t)=X_1^+(t)\,[X_1^-(t)]^{-1}$. Получим

$$\Phi^+(t)=A^+(t)\,X_1^+(t)\,[X_1^-(t)]^{-1}\Phi^-(t).\tag{12}$$

Для частных индексов матрицы $A^+(t)\,X_1^+(t)$ справедлива оценка (4), причем суммарный индекс и число p_1 те же, что и для матрицы $A^+(t)$. Подставляя факторизацию $A^+(t)\,X_1^+(t)=X_2^+(t)\,[X_2^-(t)]^{-1}$ в (12), получим

$$[X_2^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)=[X_2^-(t)]^{-1}\,[X_1^-(t)]^{-1}\Phi^-(t).\tag{13}$$

Наименьший из порядков строк матрицы $[X_2^-(t)]^{-1}$ на бесконечности не меньше $-\varkappa_{A+}-(n-1)\,p_1$. В случае матрицы $[X_1^{-1}(t)]^{-1}$ этот порядок не меньше $-k_2$ [1]. Тогда наименьший из порядков строк матрицы $[X_2^-(t)]^{-1}\,[X_1^-(t)]^{-1}$ на бесконечности не меньше $-k_2-\varkappa_{A+}-(n-1)\,p_1$, а при построении канонической матрицы задачи (11) он может только увеличиться. Учитывая, что порядки столбцов канонической матрицы равны порядкам строк обратной матрицы, взятым с противоположными знаками, получаем для частных индексов оценку сверху:

$$\varkappa_i\leqslant k_2+\varkappa_{A+}+(n-1)\,p_1\quad(i=1,\ldots,n).\tag{14}$$

С другой стороны, $A^+(t)B(t)=X_2^+(t)[X_2^-(t)]^{-1}[X_1^-(t)]^{-1}$ или $X_2^+(t)= = A^+(t)B(t)X_1^-(t)X_2^-(t)$. Из (4) и (9) следует, что наименьший из порядков столбцов матрицы $X_1^-(z)X_2^-(z)$ на бесконечности не меньше k_1-p_1, а при построении канонической матрицы задачи (11) может лишь увеличиться. Так что имеем оценку снизу

$$\varkappa_i \geqslant k_1 - p_1 \quad (i=1,\ldots,n). \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) дают (10).

Теорема 3′. *Если частные индексы $\varkappa_i'$ матрицы $B(t)$ заключены в пределах*

$$k_1 \leqslant \varkappa_i' \leqslant k_2, \tag{16}$$

то для частных индексов $\varkappa_i$ матрицы $B(t)A^-(t)$ справедлива оценка

$$k_1+\varkappa_{A^-}+(n-1)(k_{\min}-p_2)\leqslant \varkappa_i \leqslant k_2+p_2-k_{\min} \quad (i=1,\ldots,n), \tag{17}$$

где числа $k_{\min}$ и p_2 для матрицы $A^-(t)$ те же, что и в теореме 2′.

Доказательство. Подставляя факторизацию $B(t)=X_1^+(t)[X_1^-(t)]^{-1}$ в краевое условие $\Phi^+(t)=B(t)A^-(t)\Phi^-(t)$, приведем последнее к виду

$$R_2(t)[X_1^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)=[X_1^-(t)]^{-1}R_2(t)A^-(t)\Phi^-(t).$$

Из (7) и (16) следует, что наименьший из порядков строк матрицы $[X_1^-(z)]^{-1}R_2(z)A^-(z)$ на бесконечности не меньше $-k_2-p_2+k_{\min}$, и может только увеличиться при построении канонической матрицы, что доказывает правую часть неравенства (17).

Запишем тождество

$$\frac{1}{R_2(t)}X_1^+(t)=B(t)A^-(t)[R_2(t)A^-(t)]^{-1}X_1^-(t).$$

Порядки элементов матрицы $R_2(z)A^-(z)$ на бесконечности на меньше $k_{\min}- -p_2$, а порядок ее определителя, взятый с обратным знаком, не меньше $\operatorname{Ind}\det R_2(t)A^-(t)=\varkappa_{A^-}$, так как матрица $R_2(z)A^-(z)$ аналитична в конечной части области D^-. Поэтому наименьший из порядков столбцов матрицы $[R_2(z)A^-(z)]^{-1}$ на бесконечности не меньше $\varkappa_{A^-}+(n-1)(k_{\min}-p_2)$. Для матрицы $[R_2(z)A^-(z)]^{-1}X_1^-(z)$ этот порядок не меньше $k_1+\varkappa_{A^-}+ +(n-1)(k_{\min}-p_2)$, и он может лишь увеличиться при построении канонической матрицы. Отсюда следует левая часть неравенства (17).

2. Пусть матрица коэффициентов краевой задачи верхняя треугольная

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Индексы диагональных элементов $a_{ii}(t)$ обозначим k_i $(i=1,\ldots,n)$. Если $\chi_i(z)$ — каноническая функция краевой задачи

$$\chi_i^+(t)=a_{ii}(t)\chi_i^-(t),$$

то на бесконечности $\chi_i^-(z)$ имеет порядок k_i.

Известно [2], что частные индексы задачи с матрицей (18) заключены между наименьшим и наибольшим индексами Коши диагональных элементов.

Достаточное условие совпадения частных индексов с индексами k_i диагональных элементов матрицы (18), полученное в [2], состоит в том, что числа k_i не возрастают:

$$k_i \geqslant k_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{19}$$

Приведем необходимое и достаточное условие такого совпадения.

Рассмотрим матрицу

$$X(z) = \begin{pmatrix} \chi_1(z) & \chi_1(z)\Phi_{12}(z) & \ldots & \chi_1(z)\Phi_{1n}(z) \\ 0 & \chi_2(z) & \ldots & \chi_2(z)\Phi_{2n}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \chi_n(z) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$\Phi_{j,j+p}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[a_{j,j+p}(\tau)\chi_{j+p}^-(\tau) + a_{j,j+p-1}(\tau)\chi_{j+p-1}^-(\tau)\Phi_{j+p-1,j+p}^-(\tau) +}{\chi_j^+(\tau)}$$

$$\frac{+\, a_{j,j+p-2}(\tau)\chi_{j+p-2}^-(\tau)\Phi_{j+p-2,j+p}^-(\tau) + \ldots + a_{j,j+1}(\tau)\chi_{j+1}^-(\tau)\Phi_{j+1,j+p}^-(\tau)]\,d\tau}{(\tau - z)}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n-1; \quad p = 1, 2, \ldots, n-j).$$

Можно проверить, что $X(z)$ кусочно аналитическая и неособенная в конечной части плоскости матрица решений краевой задачи (18). Обозначим порядки $\Phi_{ij}(z)$ на бесконечности соответственно μ_{ij}. Очевидно, все $\mu_{ij} \geqslant 1$.

Теорема 4. *Для того чтобы индексы диагональных элементов треугольной матрицы совпадали с частными индексами задачи, необходимо и достаточно выполнения условий* *:

$$k_i + \mu_{ij} \geqslant k_j \text{ для всех } i, j \quad (i < j). \tag{21}$$

Доказательство. Порядки элементов матрицы $X(z)$ в бесконечно удаленной точке можно записать в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_1 + \mu_{12} & \ldots & k_1 + \mu_{1n} \\ \infty & k_2 & \ldots & k_2 + \mu_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \infty & \infty & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Пусть выполнены условия (21). Тогда порядки столбцов матрицы $X(z)$ на бесконечности будут равны соответственно числам $k_1, \ldots, k_n$. Причем $\sum\limits_1^n k_i = \varkappa$. $X(z)$ имеет нормальную форму в бесконечно удаленной точке, а числа $k_1, \ldots, k_n$ — частные индексы задачи. Достаточность условий доказана. Необходимость докажем по индукции.

Для матрицы второго порядка, если условия (21) не выполняются ($k_1 + \mu_{12} < k_2$), k_1 увеличится по крайней мере на единицу при приведении $X(z)$ к нормальной форме, т. е. частные индексы задачи не совпадают с числами k_1 и k_2. Для $n > 2$ отбросим у матрицы $X(z)$ строку и столбец с номером j, для которого $k_j = k_{\min}$.

---

* Как стало известно автору после выполнения данной работы, достаточность условий (21) установлена также Л. П. Примачуком.

Порядки столбцов матрицы $(n-1)$-го порядка, приведенной к нормальной форме, по допущению не совпадают с числами $k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_n$. Добавим строку и столбец. Если при этом порядки столбцов сохранятся, то утверждение доказано. В противном случае при дальнейшем приведении к нормальной форме k_j увеличится по крайней мере на единицу. Теорема доказана.

Следствие. *Если индексы диагональных элементов треугольной матрицы обладают свойством*

$$k_i + 1 \geqslant k_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{22}$$

то они совпадают с частными индексами задачи (18).

Очевидно, условие (22) включает условие (19).

Выражаю глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов, Краевая задача Римана для системы n пар функций, УМН, т. 7, вып. 4, 1952.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, т. 13, вып. 2, 1958.

Поступила 12.II 1970 г.
Одесский государственный университет