УДК 517.531

О некоторых свойствах отображений единичного круга C-функциями Каратеодори

А. С. Носенко

C-функцией Каратеодори назовем всякую регулярную в круге $|z|<1$ функцию $p(z)$, удовлетворяющую в этом круге условию $\mathrm{Re}\{p(z)\}>0$ и нормированную разложением

$$p(z)=1+b_1z+b_2z^2+\ldots \tag{1}$$

Класс таких функций обозначим через P.

Пусть $L_r(p)$ — образ окружности $|z|=r$, $0<r<1$, при отображении круга $|z|<1$ функцией $p(z)\in P$, ζ — точка кривой $L_r(p)$, $\zeta=p(re^{i\varphi})$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Кривая $L_r(p)$ непрерывна и замкнута.

На функциях $p(z)\in P$, для которых $p'(re^{i\varphi})\neq 0$, в точке ζ определена величина

$$C_\zeta(p)=\frac{\partial}{\partial\varphi}[\varphi+\arg p'(z)]=\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zp''(z)}{p'(z)}\right\},$$

характеризующая поведение касательной к кривой $L_r(p)$ в точке ζ и ее окрестности при возрастании $\varphi=\arg z$. Для каждой функции $p(z)\in P$, для которой $p'(re^{i\varphi})=0$, точка $z=re^{i\varphi}$ является изолированным нулем производной, поэтому во всех точках ζ', $\zeta'\in L_r(p)$, $\zeta'\neq\zeta$, некоторой окрестности точки ζ величина $C_\zeta(p)$ определена и, очевидно, имеет односторонние пределы при $\zeta'\to\zeta$, $\zeta'\in L_r(p)$. Условие $C_\zeta(p)>0$ назовем условием выпуклости, а $C_\zeta(p)<0$ — условием вогнутости кривой $L_r(p)$ в точке ζ (ср. [1, 2]). Как известно, функции $p(z)\in P$ вообще неоднолистны, однако назовем кривую $L_r(p)$ (или некоторую ее дугу) выпуклой, если $C_\zeta(p) \geqslant 0$, и вогнутой, если $C_\zeta(p) < 0$ во всех точках кривой $L_r(p)$ (или соответствующей ее дуги). Заметим, что выпуклая кривая $L_r(p)$ (или ее дуга) при неоднолистном отображении круга $|z| < 1$ функцией $p(z) \in P$ может иметь петли, т. е. неоднократно обходить некоторые точки, причем в каждой точке такой кривой $L_r(p)$ (или дуги) существует касательная к кривой $L_r(p)$, которая при возрастании $\varphi = \arg z$ вращается только в положительном направлении (против часовой стрелки).

Величина

$$S_\zeta(p) = \frac{\partial}{\partial\varphi} \arg [p(z) - 1] = \operatorname{Re}\left\{\frac{zp'(z)}{p(z) - 1}\right\}$$

определена в том случае, если $\zeta = p(re^{i\varphi}) \neq 1$ $(0 < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Если $\zeta = 1$, то в точках $\zeta' \in L_r(p)$ некоторой окрестности точки ζ величина $S_\zeta(p)$ определена и для каждой $p(z) \in P$ имеет односторонние пределы при $\zeta' \to \zeta$, $\zeta' \in L_r(p)$, характеризующие поведение кривой $L_r(p)$ в точке ζ. Если в каждой точке ζ кривой $L_r(p)$ (или ее дуги) $S_\zeta(p) > 0$, то кривую $L_r(p)$ или ее дугу назовем звездообразной, имея в виду здесь и в дальнейшем звездообразность относительно точки $a = 1$ (ср. [1, 2]). При неоднолистном отображении круга $|z| < 1$ функцией $p(z)$ звездообразная кривая $L_r(p)$ может неоднократно обходить точку $a = 1$, но так, чтобы $\arg[p(z) - 1]$ монотонно возрастал при возрастании $\varphi = \arg z$.

Далее, если $\zeta = p(re^{i\varphi})$ $(0 < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad p(z) \in P, \quad \zeta \neq 1)$ и $\alpha(\zeta) = \sin\theta \ln|\zeta - 1| + \cos\theta \arg(\zeta - 1)$, то уравнение $|w - 1| = \exp\left\{\frac{\alpha(\zeta)}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\arg(w - 1)\right\}$ является полярным уравнением логарифмической спирали, проходящей через точку ζ и асимптотически приближающейся к точке $a = 1$ при $\operatorname{ctg}\theta \arg(w - 1) \to +\infty$. Параметр θ фиксирован, причем $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $\theta \neq 0$. Число $\frac{\alpha(\zeta)}{\cos\theta}$ является аргументом точки пересечения этой спирали с единичной окружностью. Обозначим $K_\zeta(p) = \frac{\partial\alpha(\zeta)}{\partial\varphi}$, тогда

$$K_\zeta(p) = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \ln|\zeta - 1| + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \arg(\zeta - 1) = \operatorname{Im}\left\{e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \ln(\zeta - 1)\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta} \frac{zp'(z)}{p(z) - 1}\right\}.$$

Для каждой функции $p(z) \in P$, для которой $\zeta = p(re^{i\varphi}) = 1$, можно рассматривать односторонние пределы величины $K_{\zeta'}(p)$ при $\zeta' \to \zeta$, $\zeta' \in L_r(p)$. Условие $K_\zeta(p) > 0$ назовем условием θ-спиральности кривой $L_r(p)$ в точке ζ, также имея в виду здесь и в дальнейшем θ-спиральность относительно точки $a = 1$ (ср. [3]). Кривую $L_r(p)$ (или ее дугу) назовем θ-спиральной, если $K_\zeta(p) > 0$ во всех точках ζ кривой $L_r(p)$ (или соответствующей ее дуги). Если функция $p(z)$ неоднолистна в круге $|z| < 1$, то θ-спиральная кривая (или ее дуга) может обходить точку $a = 1$ неоднократно.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Какова бы ни была точка $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, в классе P найдутся функции $p(z)$, реализующие неравенства $C_\zeta(p) < 0$, $S_\zeta(p) < 0$, $K_\zeta(p) < 0$ в точке $\zeta = p(re^{i\varphi})$.*

Доказательство. Функции $p(z)\in P$ имеют представление

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t), \tag{2}$$

где $\mu(t)$ принадлежит классу M неубывающих на $[0,\ 2\pi]$ функций с $\int_0^{2\pi} d\mu(t)=1$. Фиксируем точку $z=re^{i\varphi}$, $0<r<1$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, и рассмотрим функционалы

$$J(p)=1+\frac{zp''(z)}{p'(z)},\qquad I(p)=\frac{zp'(z)}{p(z)-1},\qquad I_\theta(p)=e^{i\theta}\frac{zp'(z)}{p(z)-1}$$

на тех функциях $p(z)\in P$, на которых эти функционалы определены, т. е. первый — на тех функциях $p(z)\in P$, для которых $p'(re^{i\varphi})\neq 0$, а два последних — на тех функциях $p(z)\in P$, для которых $p(re^{i\varphi})\neq 1$. С учетом представления (2) эти функционалы преобразуются, соответственно, в

$$J(\mu)=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2ze^{-it}(1+ze^{-it})}{(1-ze^{-it})^3}\,d\mu(t)}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2ze^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}\,d\mu(t)},$$

$$I(\mu)=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2ze^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}\,d\mu(t)}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t)},$$

$$I_\theta(\mu)=e^{i\theta}I(\mu),$$

где $\mu(t)\in M$, и такие, на которых соответствующие выражения в знаменателях не обращаются в нуль.

Обозначим через $\widetilde{M}_2$ подкласс тех функций $\mu(t)\in M$, которые имеют точками роста на $[0,2\pi]$ только точки $t_1=\varphi$ и

$$t_2=\begin{cases}\varphi+\pi, & \text{если } 0\leqslant\varphi<\pi,\\ \varphi-\pi, & \text{если } \pi\leqslant\varphi<2\pi,\end{cases}$$

а через $\widetilde{P}_2$ — подкласс функций $p(z)\in P$, соответствующих по представлению (2) функциям $\mu(t)\in\widetilde{M}_2$.

Пусть, сначала, функции $\mu(t)\in\widetilde{M}_2$ имеют в точках t_1 и t_2 скачки λ_1 и λ_2 ($0\leqslant\lambda_1,\ \lambda_2\leqslant 1,\ \lambda_1+\lambda_2=1$) соответственно равные

$$\lambda_1=\frac{(1-r)^2}{2(1+r^2)}-\delta,\quad \lambda_2=\frac{(1+r)^2}{2(1+r^2)}+\delta,$$

где δ пробегает все вещественные значения, для которых $-\dfrac{(1+r)^2}{2(1+r^2)}\leqslant$

$\leqslant \delta \leqslant \dfrac{(1-r)^2}{2(1+r^2)}$. Такие функции $\mu(t) \in \widetilde{M}_2$ обозначим через $\mu_\delta(t)$, а соответствующие им функции $p(z) \in \widetilde{P}_2$ — через $p_\delta(t)$.

На функциях $\mu_\delta(t) \in \widetilde{M}_2$ функционал $J(\mu)$ имеет вид

$$J(\mu) = \frac{1}{\delta}\,\frac{1+6r^2+r^4}{1-r^4}\left[\delta - \frac{r(1-r^2)^2}{(1+r^2)(1+6r^2+r^4)}\right]$$

и при различных значениях δ, $-\dfrac{(1+r)^2}{2(1+r^2)} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{(1-r)^2}{2(1+r^2)}$, $\delta \neq 0$, принимает все вещественные значения, лежащие вне открытого интервала $\left(\dfrac{1-r}{1+r}, \dfrac{1+r}{1-r}\right)$, а при $0 < \delta < \dfrac{r(1-r^2)^2}{(1+r^2)(1+6r^2+r^4)}$ функционал $J(\mu)$ принимает отрицательные значения.

Пусть теперь функции $\mu(t) \in \widetilde{M}_2$ имеют в точках t_1 и t_2 скачки λ_1 и λ_2, соответственно равные $\lambda_1 = \dfrac{1-r}{2} - \varepsilon$, $\lambda = \dfrac{1+r}{2} + \varepsilon$, где ε пробегает все вещественные значения $-\dfrac{1+r}{2} \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{1-r}{2}$, $\varepsilon \neq 0$. Такие функции $\mu(t) \in \widetilde{M}_2$ обозначим через $\mu_\varepsilon(t)$, а соответствующие им функции $p(z) \in \widetilde{P}_2$ — через $p_\varepsilon(z)$.

На функциях $\mu_\varepsilon(t)$ функционалы $I(\mu)$ и $I_\theta(\mu)$ имеют вид

$$I(\mu) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\left[\varepsilon - \frac{r(1-r^2)}{2(1+r^2)}\right], \quad I_\theta(\mu) = e^{i\theta} I(\mu),$$

откуда следует, что при различных значениях ε, $-\dfrac{1+r}{2} \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{1-r}{2}$, $\varepsilon \neq 0$, функционал $I(\mu)$ принимает все вещественные значения, лежащие вне открытого интервала $\left(\dfrac{1}{1+r}, \dfrac{1}{1-r}\right)$, а при $0 < \varepsilon < \dfrac{r(1-r^2)}{2(1+r^2)}$ принимает отрицательные значения, функционал $\operatorname{Re}\{I_\theta(\mu)\} = \cos\theta\, I(\mu)$ при $-\dfrac{1+r}{2} \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{1-r}{2}$, $\varepsilon \neq 0$ принимает все вещественные значения, лежащие вне открытого интервала $\left(\dfrac{\cos\theta}{1+r}, \dfrac{\cos\theta}{1-r}\right)$, и при $0 < \varepsilon < \dfrac{r(1-r^2)}{2(1+r^2)}$ — отрицательные значения. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы использовались только функции $p(z) \in \widetilde{P}_2$. Очевидно, в классе P найдется бесчисленное множество других функций $p(z)$, для которых величины $C_\zeta(p)$, $S_\zeta(p)$ и $K_\zeta(p)$, где $\zeta = p(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, принимают отрицательные значения. Однако рассмотрим подробнее поведение кривой $L_r(p)$, $0 < r < 1$, в точке $\zeta = p(re^{i\varphi})$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, в том случае, если $p(z)$ принадлежит семейству тех двупараметрических функций $p(z) \in \widetilde{P}_2$, которые участвовали в доказательстве теоремы. Это поможет выяснить, в некоторой мере, причину доказанного факта, а также характер поведения непрерывной кривой $L_r(p)$, $0 < r < 1$, в точке $\zeta = p(re^{i\varphi})$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, если в этой точке один из рассматриваемых функционалов не определен.

Из определения функций $\mu_\delta(t) \in \widetilde{M}_2$ и $\mu_\varepsilon(t) \in \widetilde{M}_2$ видно, что $\mu_\delta(t)$ совпадает с $\mu_\varepsilon(t)$, если $\delta = \varepsilon - \dfrac{r(1-r^2)}{2(1+r^2)}$. Функции $p_\varepsilon(t) \in \widetilde{P}_2$, согласно представлению (2), имеют вид

$$p_\varepsilon(z) = \frac{1+ze^{-i\varphi}}{1-ze^{-i\varphi}}\left(\frac{1-r}{2}-\varepsilon\right) + \frac{1-ze^{-i\varphi}}{1+ze^{-i\varphi}}\left(\frac{1+r}{2}+\varepsilon\right),$$

а их производная

$$p'_\varepsilon(z) = -2e^{-i\varphi}\frac{(r+2\varepsilon)z^2e^{-2i\varphi} - 2ze^{-i\varphi} + (r+2\varepsilon)}{(1-z^2e^{-2i\varphi})^2}$$

при $z=0$ принимает значение $p'_\varepsilon(0) = -2(r+2\varepsilon)e^{-i\varphi}$ и обращается в нуль только для функции $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $\varepsilon = -\dfrac{r}{2}$. Но на этой функции функционалы $J(\mu)$, $I(\mu)$ и $I_\theta(\mu)$ положительны.

Легко видеть, что производная $p'_\varepsilon(z)$ каждой функции $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ обращается в нуль в единственной точке $z = \dfrac{1}{r+2\varepsilon}(1-\sqrt{1-(r+2\varepsilon)})e^{i\varphi}$ круга $|z|<1$, расположенной на прямолинейном отрезке d_φ, соединяющем точки $z=e^{i\varphi}$ и $z=-e^{i\varphi}$. Каждая точка отрезка d_φ, включая его концы, является нулем производной одной и только одной функции $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при соответствующем значении ε. Введем обозначения некоторых точек этого отрезка: $z_1 = \dfrac{2r}{1+r^2}e^{i\varphi}$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}e^{i\varphi}$ и соответствующих значений параметра $\varepsilon: \varepsilon_1 = \dfrac{r(1-r^2)(3+r^2)}{2(1+6r^2+r^4)}$, $\varepsilon_0 = \dfrac{r(1-r^2)}{2(1+r^2)}$, $\varepsilon_2 = 0$. О функциях $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ можно сказать следующее.

1. Нули производной функций $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$, которые соответствуют значениям ε из интервала $\varepsilon_1 < \varepsilon < \dfrac{1-r}{2}$, расположены дальше от начала координат, чем точка z_1, и для них в точке $\zeta = p(re^{i\varphi})$ (а значит и в некоторой ее окрестности) кривой $L_r(p)$ выполняются условия выпуклости, звездообразности и θ-спиральности.

2. Нуль производной функции $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $\varepsilon = \varepsilon_1$ расположен в точке z_1, а в точке $\zeta = p_\varepsilon(z_0)$ имеем: $C_\zeta(p_\varepsilon) = 0$. Однако в окрестности точки ζ кривая $L_r(p)$ еще остается выпуклой, а также звездообразной и θ-спиральной.

3. Нули производной функций $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ расположены между точками z_0 и z_1, т. е. ближе к окружности $|z| = r$, чем точка z_1. В точке $\zeta = p_\varepsilon(z_0)$ (и некоторой ее окрестности) появляется вогнутость кривой $L_r(p_\varepsilon)$, причем такая, что условие звездообразности и θ-спиральности при любом $\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \theta \neq 0\right)$ выполняется.

4. Рассмотрим функцию $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ (или $\delta = 0$), обозначив ее через $p_0(z)$. Нуль производной этой функции расположен в точке z_0. В точке $\zeta = p_0(z_0)$ кривой $L_r(p_0)$ функционал $J(p_0)$ не определен, а функционалы $I(p_0)$ и $I_\theta(p_0)$ обращаются в нуль. Однако в точке $\zeta_\alpha = p_0(re^{i(\varphi+\alpha)})$

кривой $L_r(p_0)$ при вещественном достаточно малом α комплекснозначный функционал $J(p_0)$ определен и принимает значение

$$J(p_0) = 1 + \frac{zp_0''(z)}{p_0'(z) - 1} = \frac{e^{i\alpha}(1 + r^2 e^{i\alpha})}{(e^{i\alpha} - 1)(1 - r^2 e^{2i\alpha})} + \frac{2 - e^{i\alpha}(1 - r^2 e^{i\alpha})}{1 - r^2 e^{2i\alpha}} +$$

$$+ \frac{e^{i\alpha} - 1}{(1 - r^2 e^{i\alpha})(1 - r^2 e^{2i\alpha})}.$$

Вещественная часть первого слагаемого этой суммы имеет вид $\dfrac{1 - r^4}{2(1 - 2r^2\cos 2\alpha + r^4)}$. Следовательно, $\operatorname{Re}\{J(p_0)\}$ в точках ζ_α кривой $L_r(p_0)$, из некоторой окрестности точки $\zeta = p_0(z_0)$, принимает положительное значение и имеет положительный предел, равный $\dfrac{3(1 + r^2)}{2(1 - r^2)}$ при $\alpha \to 0$. Кроме того, в точке $\zeta_\alpha = p_0(re^{i(\varphi+\alpha)})$ имеем

$$\operatorname{Re}\{I(p_0)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{zp_0'(z)}{p_0(z) - 1}\right\} = \frac{2(1 - r^2\cos 2\alpha)}{1 - 2r^2\cos 2\alpha} -$$

$$- \frac{2[2 - (1 + r^2)\cos\alpha]}{4 - 4(1 + r^2)\cos\alpha + (1 + r^2)^2}.$$

Эта величина остается положительной при достаточно малых α как положительных, так и отрицательных и обращается в нуль при $\alpha = 0$. Легко убедиться также в том, что $\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\dfrac{zp_0'(z)}{p_0(z) - 1}\right\}$, вычисленная в точке $\zeta_\alpha = p_0(re^{i(\varphi+\alpha)})$, меняет знак при переходе от отрицательных к положительным значениям α и обращается в нуль при $\alpha = 0$.

Итак, точка $\zeta = p_0(z_0)$ является угловой точкой кривой $L_r(p_0)$, причем в окрестности точки ζ кривая $L_r(p_0)$ является звездообразной, но не является θ-спиральной ни при одном значении θ, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$, а касательная к кривой $L_r(p_0)$ при возрастании $\varphi = \arg z$, $|z| = r$, непрерывно вращается в положительном направлении.

5. Нули производной функций $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_0$ расположены между точками z_2 и z_0, т. е. в круге $|z| < r$, но не дальше от окружности $|z| = r$, чем точка z_2. В точке $\zeta = p_\varepsilon(z_0)$ снова выполняется условие выпуклости, но не выполняется условие звездообразности и θ-спиральности кривой $L_r(p_\varepsilon)$. Кривая $L_r(p_\varepsilon)$ образует петлю, огибающую точку $w = p_\varepsilon(z')$, где z' — нуль производной.

6. Нуль производной функции $p_2(z) \in \widetilde{P}_2$ (при $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0$) расположен в точке z_2. Поскольку $p_2(z_0) = 1$, то кривая $L_r(p_2)$ проходит через точку $a = 1$. В точке $\zeta = p_2(z_0)$ кривая $L_r(p_2)$ выпукла, а функционалы $I(p_2)$ и $I_\theta(p_2)$ не определены. Однако в точке $\zeta_\alpha = p_2(re^{i(\varphi+\alpha)})$ кривой $L_r(p_2)$ при достаточно малом вещественном α комплекснозначный функционал $I(p_2)$ определен и принимает значение

$$I(p_2) = \frac{zp_2'(z)}{p_2(z) - 1} = \frac{2}{1 - r^2 e^{2i\alpha}} + \frac{1}{e^{i\alpha} - 1},$$

а его вещественная часть $\mathrm{Re}\,\{I\,(p_2)\} = \frac{1}{2} + \frac{1-r^4}{1-2r^2\cos 2\alpha + r^4}$ положительна и имеет при $\alpha \to 0$ положительный предел, равный $\frac{1}{2} + \frac{1+r^2}{1-r^2}$. Это означает, что вектор с началом в точке $a = 1$ и концом в точке $p_2(z)$, $|z| = r$, при возрастании $\varphi = \arg z$ и переходе через точку $\zeta = p_2(z_0)$ вращается в положительном направлении, вырождаясь при $\alpha \to 0$ в точку.

7. Для функций $p_\varepsilon(z) \in \widetilde{P}_2$ при $-\frac{1+r}{2} < \varepsilon < \varepsilon_2$ нули производной расположены на оставшейся части отрезка d_φ. В точке $\zeta = p_\varepsilon(z_0)$ снова выполняются условия выпуклости, звездообразности и θ-спиральности кривой $L_r(p_\varepsilon)$. Кривые $L_r(p_\varepsilon)$ таких функций дважды обходят точку $a = 1$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что класс P, в отличие от класса однолистных функций, не имеет положительного радиуса выпуклости, звездообразности или θ-спиральности, а остаток $R(z) = b_2 z^2 + \ldots$ ряда (1) для функций класса P даже при малых $|z| = r$ и $b_1 \neq 0$ может оказывать существенное влияние на форму образа $L_r(p)$ окружности $|z| = r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
2. И. Е. Базилевич и Г. В. Корицкий, О некоторых свойствах линий уровня при однолистных конформных отображениях. Матем. сб., т. 58(100), № 3, 1962.
3. В. А. Зморович, Про радіус ϑ-спіральності θ-спіральних функцій в колі $|z| < 1$, ДАН УРСР, № 10, 1965.

Поступила 27.VI 1970 г.,
после переработки — 12.III 1971 г.

Запорожский машиностроительный институт