УДК 517.912

К вопросу о размножении обыкновенных дифференциальных уравнений

Э. М. Парасюк, Л. М. Зорий

В математической литературе до последнего времени появляются работы, в которых затрагиваются вопросы о разнообразных дополнениях к известному справочнику Камке по обыкновенным дифференциальным уравнениям [1]. При этом, как правило, приводятся все новые типы уравнений, которые интегрируются в квадратурах или в специальных функциях [1—6]. Очевидно, подобного рода дополнений можно ожидать и в дальнейшем, поскольку таких уравнений бесконечное количество.

В связи с этим возникает задача о возможных способах конструктивного решения указанных вопросов, в частности, о построении таких классов дифференциальных уравнений, которые, с одной стороны, охватывали бы известные уравнения [1], а с другой — существенно расширяли бы множество подобных уравнений.

Наряду с этим возникает вопрос о принципах отбора из построенных классов тех дифференциальных уравнений, которым, вообще говоря, следовало бы занять место в подобных справочниках (только более богатых информацией, на подобие известных таблиц сумм, произведений, интегралов).

Очевидно, разными путями можно искать ответа на поставленные вопросы, например с помощью группового метода и т. п.

В данной работе* рассматривается способ построения указанных классов уравнений, который основывается на простом «размножении» хорошо изученных уравнений путем соответствующих замен функций и аргумента**. Оказывается, что рассмотренный способ, несмотря на его элементарность, дает возможность в некоторой степени приблизиться к решению поставленной выше задачи. В частности, легко устанавливается, что почти все уравнения из [1] можно получить указанным путем размножения соответствующих уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$\begin{aligned}
y_1' &= \left(a_{11}g' - \frac{u_1'}{u_1}\right) y_1 + a_{12}g' \frac{u_2}{u_1} y_2 + \ldots + a_{1n}g' \frac{u_n}{u_1} y_n, \\
y_2' &= a_{21}g' \frac{u_1}{u_2} y_1 + \left(a_{22}g' - \frac{u_2'}{u_2}\right) y_2 + \ldots + a_{2n}g' \frac{u_n}{u_2} y_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n' &= a_{n1}g' \frac{u_1}{u_n} y_1 + a_{n2}g' \frac{u_2}{u_n} y_2 + \ldots + \left(a_{nn}g' - \frac{u_n'}{u_n}\right) y_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $g(x)$ и $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции аргумента x $(x \in (a, b))$, причем $u_k(x)$ и $g'(x)$ не обращаются в нуль на рассматриваемом интервале; коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные величины.

Систему (1) будем называть приводимой, поскольку с помощью замены

$$y_k = \frac{z_k(t)}{u_k(x)}, \quad t = g(x), \tag{2}$$

она приводится к системе уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j(t), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3}$$

и, наоборот, заменой (2) система (3) приводится к системе (1).

Тогда, очевидно, зная интегральную матрицу системы (3), легко получаем соответствующую матрицу системы (1), а следовательно, ее общее решение.

Положив в системе (1) $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$, $a_{12} = a_{23} = \ldots = a_{n-1n} = 1$, $a_{nk} = \alpha_{n-k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а остальные коэффициенты заменив нулями, получаем аналогичный вывод для соответствующего уравнения n-го порядка, которое с помощью замены (2) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{(n-i)}(t). \tag{4}$$

* Результаты работы докладывались на V Научной конференции молодых математиков Украины.

** Аналогичными способами пользовались и раньше хотя, как правило, явно на это не указывалось.

Система (1), хотя и имеет достаточно специальный вид, представляет собой класс приводимых уравнений, полученных из (3). Этот класс зависит от n^2 параметров a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и $n+1$ произвольных функций $g(x)$, $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, задаваясь которыми будем получать все новые подклассы приводимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Аналогично «размножается» уравнение (4), а также другие хорошо изученные уравнения*. При этом, в частности, оказывается, что все линейные уравнения из [1] принадлежат к соответствующим классам, а целые группы уравнений, которые на первый взгляд совсем не связанные между собой, являются отдельными представителями одного и того же подкласса.

Проиллюстрируем сказанное на уравнениях второго порядка:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) заменой $y(x) = z(t)\, u^{-1}(x)$, $t = g(x)$, приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \alpha_1 \frac{dz}{dt} - \alpha_2 z = 0 \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда

$$p(x) = \frac{2u'}{u} - \left(\alpha_1 g' + \frac{g''}{g'}\right), \quad q(x) = \frac{u''}{u} - \frac{u'}{u}\left(\alpha_1 g' + \frac{g''}{g'}\right) - \alpha_2 g'^2. \tag{7}$$

Следовательно, уравнение (5) с коэффициентами (7) представляет собой класс приводимых уравнений второго порядка.

Взяв, например, $u(x) = x^n$, $g(x) = x^m$, получим подкласс уравнений вида

$$x^2y'' + [(2n - m + 1)\, x - \alpha_1 m x^{m+1}]\, y' + [n(n - m) - \alpha_1 n m x^m - \alpha_2 m^2 x^{2m}]\, y = 0. \tag{8}$$

Частными случаями этого уравнения (при соответствующем выборе параметров m, n, α_1, α_2) есть, в частности, такие 36 уравнений второго порядка из [1]: 2.91, 2.98, 2.100, 2.101, 2.106, 2.125, 2.126 (б), 2.130, 2.135, 2.146, 2.147, 2.159, 2.168, 2.174, 2.175, 2.176, 2.179, 2.183, 2.184, 2.186, 2.202, 2.209 (а), 2.276, 2.277, 2.279, 2.281, 2.282, 2.288, 2.342, 2.346, 2.349(а), 2.350, 2.352, 2.400, 2.401, 2.409.

Если взять

$$u(x) = x^n e^{aF(x)}, \quad g(x) = \int x^m e^{bG(x)} dx,$$

то получим уравнение (5) с коэффициентами:

$$p(x) = \frac{2n + 2axF'(x)}{x} - \left(\alpha_1 x^m e^{bG(x)} + \frac{m + bxG'(x)}{x}\right),$$

$$q(x) = \frac{n(n-1) + 2anxF'(x) + a^2x^2F'^2(x) + ax^2F''(x)}{x^2} - \frac{n + axF'(x)}{x} \times$$
$$\times \left(\alpha_1 x^m e^{bG(x)} + \frac{m + bxG'(x)}{x}\right) - \alpha_2 x^{2m} e^{2bG(x)}.$$

Из этого уравнения легко получаются еще 60 уравнений из [1].

Размножая указанным способом и другие хорошо изученные уравнения, мы построили подклассы уравнений, частными случаями которых являются, в частности, все линейные уравнения II-го порядка из [1]. Заметим,

* Именно таким способом получен ряд результатов для так называемых родственных уравнений из [1].

что подобным способом можно пользоваться и в случае нелинейных уравнений.

Таким образом, можно существенно расширить объем информации соответствующего справочника по дифференциальным уравнениям даже при уменьшении его объема.

Заметим, наконец, что с использованием рассмотренного способа можно получать также некоторые достаточные условия интегрируемости соответствующих уравнений в квадратурах.

Так, например, при $u(x) \equiv 1$, $t = g(x)$ из (7) получаем уравнение вида (5), которое при выполнении условия

$$\left(p + \frac{q'}{2q}\right)^2 = A \cdot q \quad \left(A = -\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}\right) \tag{9}$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами заменой

$$t = \int \sqrt{-\alpha_2^{-1} q(x)}\, dx. \tag{10}$$

(Очевидно, замена (10) согласовывается с соответствующей заменой из [7].)

Условие (9) выполняется, например, для уравнений Эйлера, Чебышева и таких уравнений из [1]: 2.63, 2.66, 2.66 (а), 2.67, 2.69, 2.71 (б), 2.93, 2.125, 2.130, 2.135, 2.222, 2.290, 2.292, 2.350, 2.352, 2.370, 2.394, 2.401, 2.409, 2.412, 2.415 (а), 2.417, 2.430 (а), 2.436 (а), 2.437, 2.437 (б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.
2. В. П. Манжаловский, К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях, Изд-во Харьковского госуниверситета, 1959.
3. Г. К. Гемиджиев, Об одном неоднородном линейном дифференциальном уравнении n-го порядка, Дифференциальные уравнения, т. V, № 8, 1969.
4. J. Zbornik, Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung, ZAMP, **7**, 1956.
5. J. Zbornik, Ein neuartiges Verfahren zur Uniformierung und allgemeinen Lösung von linearen Differentialgleichungen und zur Herleitung ihrer Rekursionsformeln, Akad. Wien, **166**, 1957.
6. Л. М. Беркович, О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами, Изв. вузов, Математика, № 4, 1965.
7. И. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, «Высшая школа», М., 1963.

Поступила 22.IV 1970 г.

Львовский политехнический институт,
Физико-механический институт АН УССР