УДК 517.94

О построении частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки

Ю. И. Сикорский, Н. И. Терещенко

Вопросу о построении частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами посвящено много работ, в частности [1, 2]. Суть задачи заключается в том, что требуется получать такие решения в наиболее простом, удобном для приложений виде.

В монографии [1] в связи с этим изучаются неоднородные специальные функции, которые вводятся как решения неоднородных специальных уравнений с элементарными функциями в правых частях. В работах [3, 4] рассмотрен случай, когда правые части неоднородных специальных уравнений — специальные функции и их комбинации.

В данной работе найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x) \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = e^{P(x)} x^{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j} \tag{1}$$

целого ранга $p = k + 1 > 0$, в котором

$$P_i(x) = x^{ki} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} x^{-j} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$P(x) = \sum_{s=1}^{p} \frac{\sigma_{p-s} x^s}{s}, \tag{2}$$

$p_{00} \neq 0$ и не все p_{i0} равны нулю.

Тогда, как следует из аналитической теории дифференциальных уравнений, $x = \infty$ является иррегулярной особой точкой уравнения (1), (2).

В случае простых корней характеристического уравнения [5] метод Фробениуса — Латышевой позволяет найти фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (1) в виде

$$y_i = e^{Q_i(x)} x^{r_i} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^{-j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $Q_i(x)$ — полиномы степени p, $Q_i(x) \neq Q_j(x)$ при $i \neq j$.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) и его правая часть представлены асимптотическими или сходящимися рядами. Преобразование

$$u = e^{-P(x)} y \tag{4}$$

переводит уравнение (1) в следующее уравнение:

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{n} R_i(x) \frac{d^{n-i}u}{dx^{n-i}} = x^{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j}, \tag{5}$$

где

$$R_i(x) = x^{ki} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} x^{-j} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Коэффициенты b_{ij} являются функциями коэффициентов полинома $P(x)$, причем

$$b_{n0} = p_{00}\sigma_0^n + p_{10}\sigma_0^{n-1} + \ldots + p_{n0},$$
$$b_{n1} = b_{n1}(\sigma_0, \sigma_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{nk} = b_{nk}(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k).$$

Установим, в каких случаях частное решение уравнения (5), (6) имеет вид правой части, т. е.

$$u = x^r \sum_{j=0}^{\infty} C_j x^{-j}, \tag{7}$$

а в каких случаях вид решения существенно другой.

Используя вид характеристической функции уравнения $Lu = 0$, получим рекуррентную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных r и C_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, $r = \lambda - nk$:

$$\begin{aligned}
&C_0 b_{n0} = a_0,\\
&C_1 b_{n0} + C_0 b_{n1} = a_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_k b_{n0} + C_{k-1} b_{n1} + \ldots + C_0 b_{nk} = a_k,\\
&C_{k+1} b_{n0} + C_k b_{n1} + \ldots + C_1 b_{nk} + C_0 \varphi_0(r) = a_{k+1},\\
&C_{k+2} b_{n0} + C_{k+1} b_{n1} + \ldots + C_2 b_{nk} + C_1 \varphi_0(r-1) + C_0 \varphi_1(r) = a_{k+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_{2k+1} b_{n0} + C_{2k} b_{n1} + \ldots + C_{k+1} b_{nk} + C_k \varphi_0(r-k) + C_{k-1} \varphi_1(r-k+1) + \ldots\\
&\qquad \ldots + C_0 \varphi_k(r) = a_{2k+1},\\
&C_{2k+2} b_{n0} + C_{2k+1} b_{n1} + \ldots + C_{k+2} b_{nk} + C_{k+1} \varphi_0(r-k-1) + C_k \varphi_1(r-k) + \ldots\\
&\qquad \ldots + C_0 \varphi_{k+1}(r) = a_{2k+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\varphi_i(r) = \begin{cases} b_{n,k+1+i} + r b_{n-1,i}, \text{ при } i = 0, 1, \ldots, k, \\ b_{n,k+1+i} + r b_{n-1,i} + r(r-1) b_{n-2,-(k+i)+i}, \text{ при} \\ \qquad\qquad i = k+1, k+2, \ldots, 2k+1. \end{cases}$$

Аналогично для $i \geqslant 2k+2$.

Легко видеть, что если σ_0 совпадает со старшим коэффициентом полинома $Q_i(x)$, но σ_1 уже не равен следующему коэффициенту того же полинома $Q_i(x)$, т. е. $b_{n0} \equiv 0$, но $b_{n1} \neq 0$, то рекуррентная система (8) примет такой вид:

$$\begin{aligned}
&r = \lambda - nk + 1,\\
&C'_0 b_{n1} = a_0,\\
&C'_1 b_{n1} + C'_0 b_{n2} = a_1\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8'}$$

Точно также для коэффициента σ_ν, если $0 \leqslant \nu < k$. Следовательно, верна такая лемма.

Лемма 1. *Если коэффициент полинома $P(x)$ σ_ν при $0 \leqslant \nu < k$ не совпадает с коэффициентом при $(k+1-\nu)$-й степени x в полиноме $Q_i(x)$, то частное решение уравнения* (1), (2) *имеет вид*

$$y = e^{P(x)} x^{\lambda - nk + \nu} \sum_{j=0}^{\infty} C'_j x^{-j}.$$

Если условия леммы 1 не выполняются, т. е. $P(x) \equiv Q_i(x)$, i — фиксировано, тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $P(x) \equiv Q_i(x)$ *и* $\lambda \neq r_i + k(n-1) + \mu - 1$ *для* $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда частное решение уравнения* (1), (2) *имеет вид*

$$y = e^{Q_i(x)} x^{\lambda - k(n-1)+1} \sum_{j=0}^{\infty} C''_j x^{-j}.$$

Действительно, если $P(x) \equiv Q_i(x)$, то рекуррентная система (8) перейдет в систему

$$r = \lambda - k(n-1) + 1,$$

$$\begin{aligned} & C''_0 \varphi_0(r) = a_0, \\ & C''_1 \varphi_0(r-1) + C''_0 \varphi_1(r) = a_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & C''_k \varphi_0(r-k) + C''_{k-1} \varphi_1(r-k+1) + \ldots + C''_0 \varphi_k(r) = a_k, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8''}$$

а она не будет противоречивой, если $\lambda \neq r_i + k(n-1) + \mu - 1$.

В том случае, когда $P(x) \equiv Q_i(x)$ и $\lambda = r_i + k(n-1) + \mu - 1$ для некоторого $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, рекуррентная система (8″) противоречива. Это означает, что в случае такой правой части частное решение уравнения (1), (2) имеет существенно другой вид.

Для нахождения частного решения в этом случае по уравнению (5), (6) строим однородное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n+1} A_i(x) \frac{d^{n+1-i} u}{dx^{n+1-i}} = 0, \tag{9}$$

в котором

$$A_0(x) = R_0(x), \quad A_i(x) = R'_{i-1}(x) + R_i(x) - \lambda\varphi(x) R_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

$$A_{n+1}(x) = R'_n(x) - \lambda\varphi(x) R_n(x), \qquad \lambda\varphi(x) = \frac{\left(x^{\lambda} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j}\right)'}{x^{\lambda} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j}}.$$

Легко видеть, что ранг уравнения (9), (10) равен тоже p. Фундаментальная система этого уравнения состоит из фундаментальной системы однородного уравнения, соответствующего (5), (6), и частного решения неоднородного уравнения (5), (6).

Определяющее уравнение [6] дифференциального уравнения (9), (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & [k(n-1) - 1]\, b_{n,k+1} - \lambda b_{n,k+1} + r\,[k(n-1)\, b_{n-1,0} + b_{n,k+1} - \lambda b_{n-1,0}] + \\ & + r(r-1)\, b_{n-1,0} \equiv \{r - [\lambda - k(n-1) + 1]\}\, \varphi_0(r) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

По условию $\varphi_0(r_i) \equiv 0$, поэтому, если $\lambda = r_i + k(n-1) + \mu - 1$ для некоторого $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, то второй корень определяющего уравнения (11) будет равен $r_i + \mu$. Это означает, что показателю $r_i + \mu$ соответствует логарифмическое решение. Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Если правая часть уравнения* (1), (2) *такова, что* $P(x) \equiv Q_i(x)$, *а* $\lambda = r_i + k(n-1) + \mu - 1$ *для некоторого* $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, *то* *частное решение этого уравнения имеет вид*

$$y = e^{Q_i(x)} \left(A \ln x \; x^{r_i} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^{-j} + x^{r_i+\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j x^{-j} \right), \qquad (12)$$

где A — постоянная, определяемая после подстановки (12) *в* (1).

Действительно, в силу условий леммы и преобразования (4), ряд $x^{\varrho} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j x^{-j}$ должен удовлетворять такому неоднородному уравнению

$$Lx^{\varrho} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j x^{-j} = x^{r_i+k(n-1)+\mu-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j} - AL \ln x \cdot x^{r_i} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^{-j},$$

т. е. уравнению

$$Lx^{\varrho} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j x^{-j} = x^{r_i+k(n-1)+\mu-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j} - Ax^{r_i+k(n-1)-1} (b_{n-1,0}\alpha_{i0} + \beta_1 x^{-1} + \ldots),$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — известные коэффициенты.

Возьмем $\varrho = r_i + \mu$. Тогда для неопределенных коэффициентов $\overline{C}_j$ получаем рекуррентную систему

$$\begin{aligned}
&\overline{C}_0 \varphi_0 (r_i + \mu) = a_0, \\
&\overline{C}_1 \varphi_0 (r_i + \mu - 1) + \overline{C}_0 \varphi_1 (r_i + \mu) = a_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\overline{C}_\mu \varphi_0 (r_i) + \overline{C}_{\mu-1} \varphi_1 (r_i + 1) + \ldots + \overline{C}_0 \varphi_\mu (r_i + \mu) = a_\mu - Ab_{n-1,0}\alpha_{i0}, \\
&\overline{C}_{\mu+1} \varphi_0 (r_i - 1) + \overline{C}_\mu \varphi_1 (r_i) + \ldots + \overline{C}_0 \varphi_{\mu+1} (r_i + \mu) = a_{\mu+1} - A\beta_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

в которой $\overline{C}_\mu$ неопределено, так как $\varphi_0 (r_i) \equiv 0$. Полагая $\overline{C}_\mu = 0$, выберем постоянную A из условия

$$\overline{C}_{\mu-1} \varphi_1 (r_i + 1) + \ldots + \overline{C}_0 \varphi_\mu (r_i + \mu) = a_\mu - Ab_{n-1,0} \cdot \alpha_{i0}.$$

Пример.

$$x^3 (x-1)^3 (x+1) y' + x^2 (x-1)^2 (x^2 + 2x - 1) y = -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1,$$

ранг этого уравнения $p = 0$, т. е. особая точка $x = \infty$ — регулярная. Характеристическая функция уравнения имеет вид

$$x^{r+6} \{(r+1) - 2rx^{-1} - 4x^{-2} + (2r+4) x^{-3} - (r+1) x^{-4} + 0 + \ldots\}.$$

Следовательно, показатель решения соответствующего однородного уравнения $r_1 = -1$, и так как выполняются условия леммы 3 и $4 = -1 + \mu - 1$ при $\mu = 6$, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = Ay_1 \ln x + x^5 \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j x^{-j},$$

где y_1 — решение соответствующего однородного уравнения. Неопределенные коэффициенты $\overline{C}_j$ находим из рекуррентной системы

$$\overline{C}_0\varphi_0(5) = -1,$$

$$\overline{C}_1\varphi_0(4) + \overline{C}_0\varphi_1(5) = -2,$$

$$\overline{C}_2\varphi_0(3) + \overline{C}_1\varphi_1(4) + \overline{C}_0\varphi_2(5) = 2,$$

$$\overline{C}_3\varphi_0(2) + \overline{C}_2\varphi_1(3) + \overline{C}_1\varphi_2(4) + \overline{C}_0\varphi_3(5) = 0,$$

$$\overline{C}_4\varphi_0(1) + \overline{C}_3\varphi_1(2) + \overline{C}_2\varphi_2(3) + \overline{C}_1\varphi_3(4) + \overline{C}_0\varphi_4(5) = -1,$$

$$\overline{C}_5\varphi_0(0) + \overline{C}_4\varphi_1(1) + \overline{C}_3\varphi_2(2) + \overline{C}_2\varphi_3(3) + \overline{C}_1\varphi_4(4) + \overline{C}_0\varphi_5(5) = 0,$$

$$\overline{C}_6\varphi_0(-1) + \overline{C}_5\varphi_1(0) + \overline{C}_4\varphi_2(1) + \overline{C}_3\varphi_3(2) + \overline{C}_2\varphi_4(3) + \overline{C}_1\varphi_5(4) + \overline{C}_0\varphi_6(5) = A,$$

$$\overline{C}_7\varphi_0(-2) + \overline{C}_6\varphi_1(-1) + \overline{C}_5\varphi_2(0) + \overline{C}_4\varphi_3(1) + \overline{C}_3\varphi_4(2) + \overline{C}_2\varphi_5(3) + \overline{C}_1\varphi_6(4) + \overline{C}_0\varphi_7(5) = -A\beta_1,$$

. . . .

где $\varphi_0(r) = r + 1$, $\varphi_1(r) = -2r$, $\varphi_2(r) = -4$, $\varphi_3(r) = 2r + 4$, $\varphi_4(r) = -r - 1$, $\varphi_5(r) = 0, \ldots$

Выбрав $\overline{C}_6 = 0$, найдем A из условия $\overline{C}_5\varphi_1(0) + \overline{C}_4\varphi_2(1) + \overline{C}_3\varphi_3(2) + \overline{C}_2\varphi_4(3) = A$, т. е. $-4\overline{C}_4 + 8\overline{C}_3 - 4\overline{C}_2 = A$.

Из рекуррентной системы находим

$$\overline{C}_0 = -\frac{1}{6}, \quad \overline{C}_1 = -\frac{11}{15}, \quad \overline{C}_2 = -\frac{17}{15}, \quad \overline{C}_3 = -\frac{37}{15},$$

$$\overline{C}_4 = -\frac{57}{15}, \ \ldots, \ A = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. W. Babister, Transcendental functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations, New — York — London, 1967.
2. К. Я. Латышева, Рациональные частные решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью, Матем. сб., № 5, Изд-во КГУ, 1951.
3. Ю. Г. Сікорський, Інтегрування неоднорідного рівняння Беселя, Вісник Київського університету, сер. матем. та мех., № 12, 1970.
4. Ю. И. Сикорский, Н. И. Терещенко, Об одном методе нахождения частных решений неоднородных уравнений Бесселя и Лежандра, Математическая физика, вып. 9, «Наукова думка», К., 1971.
5. К. Я. Латышева, Н. И. Терещенко, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их применения, Изд. Института математики АН УССР, К., 1970.
6. К. Я. Латышева, О нормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга, Матем. сб., № 7, Изд-во КГУ, 1953.

Поступила 11.V 1971 г.

Киевский государственный университет