УДК 517.941.92

Редукция некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений к более простому виду

В. Р. Смилянский

В данной работе рассматриваются условия, при которых возможна редукция системы

$$A(x)\frac{d^{\omega}\vec{z}}{dx^{\omega}} = B(x)\vec{z} + \vec{g}(x) \tag{0.1}$$

(вектор $\vec{z}$ имеет n компонент) к системе

$$\frac{d^{\omega}\vec{y}}{dx^{\omega}} = C(x)\vec{y} + (AP)^{-1}\vec{g}(x) \tag{0.2}$$

с помощью замены

$$\vec{z} = P\vec{y}, \tag{0.3}$$

где P — *постоянная* матрица.

Как известно, для этого матрицы P и $C(x)$ должны удовлетворять следующему матричному уравнению:

$$A(x)PC(x) = B(x)P \qquad (\det(AP) \neq 0). \tag{0.4}$$

В п. 1 рассмотрены системы с рациональными коэффициентами ($A(x)$, $B(x)$ — рациональные функции от x), а в п. 2 — системы с периодическими коэффициентами.

Разумеется, умножая обе части уравнения (0.1) на $A^{-1}(x)$, также можно привести систему (0.1) к системе типа (0.2). Однако матрица $A^{-1}(x)B(x)$ такой системы, как правило, гораздо сложнее по структуре исходных матриц $A(x)$, $B(x)$; да и само получение $A^{-1}(x)B(x)$ в практически интересных случаях и при $n > 2$ весьма громоздко.

В данной работе матрица $C(x)$ — либо постоянная, либо имеет ту же структуру, что и исходные матрицы $A(x)$, $B(x)$.

1. Системы с рациональными коэффициентами. Пусть

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{k_1}\sum_{m=0}^{g_1}\frac{A_{\nu m}}{(x-x_m)^{\nu}}; \qquad B(x) = \sum_{\nu=0}^{k_2}\sum_{m=0}^{g_2}\frac{B_{\nu m}}{(x-x_m)^{\nu}}, \tag{1.1}$$

где $A_{\nu m}, B_{\nu m}$ — постоянные матрицы, x_m — постоянные. Умножая обе части уравнения (0.1) на выражения типа $(x-x_0)^{\alpha_0}\ldots(x-x_{g_{1,2}})^{\alpha_{g_{1,2}}}$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g_{1,2}}$ — соответствующим образом подобранные целые числа, можно привести уравнение (0.1) к такой форме, при которой преобразованные матрицы $A(x)$, $B(x)$ имеют вид

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{k} A_{\nu}x^{\nu}; \qquad B(x) = \sum_{\nu=0}^{q} B_{\nu}x^{\nu}. \tag{1.2}$$

В дальнейшем считаем, что такое преобразование уже проделано, т. е. что матрицы $A(x)$, $B(x)$ имеют вид (1.2).

Будем искать матрицу $C(x)$ в виде

$$C(x) = \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{\nu}x^{\nu}, \tag{1.3}$$

где C_{ν} — постоянные матрицы.

Подставляя (1.2), (1.3) в (0.4), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{k+\beta} D_\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{q} B_\nu P x^\nu = 0, \tag{1.4}$$

$$D_\nu = \sum_{i_{\min}}^{i_{\max}} A_i P C_{\nu-i}, \qquad \max\{0, \nu-\beta\} \leqslant i \leqslant \min\{k, \nu\}, \tag{1.5}$$

где пределы суммирования по i определены из следующих очевидных условий:

$$0 \leqslant i \leqslant k; \qquad 0 \leqslant \nu - i \leqslant \beta. \tag{1.6}$$

Как видно из (1.5), каждый элемент матрицы D_ν является линейной функцией, вообще говоря, всех n^2 элементов матрицы P.

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x^ν в уравнении (1.4) и приравнивая их нулю, получим систему линейных однородных матричных уравнений относительно матрицы P. Эта система эквивалентна системе скалярных линейных однородных уравнений относительно $R = n^2$ элементов матрицы P. Так как число скалярных уравнений $N > R$ (см. ниже), то на систему скалярных уравнений нужно наложить $\Delta = N - R + 1$ условий совместности, *в которые войдут только элементы матриц* A_ν, B_ν, C_ν.

Из системы алгебраических уравнений, даваемых условиями совместности, можно определить элементы матриц C_ν. Так как число условий совместности Δ получается больше числа $\psi = n^2(1+\beta)$ элементов матриц C_ν (см. ниже), то одновременно на $n^2(k+q+2)$ элементов матриц A_ν, B_ν налагается $\delta = \Delta - \psi$ условий.

Ниже определяется δ и при данном δ наиболее простой возможный вид матрицы $C(x)$.

Пусть $k + \beta \geqslant q$. Тогда из уравнения (1.4) получаем следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} &D_\nu - B_\nu P = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, q, \\ &D_\nu = 0, \qquad \nu = q+1, q+2, \ldots, k+\beta. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Система (1.7) эквивалентна системе из $N = n^2(1+k+\beta)$ скалярных линейных однородных уравнений относительно $R = n^2$ элементов матрицы P. Следовательно, на систему скалярных уравнений нужно наложить $\Delta = N - R + 1 = n^2(k+\beta) + 1$ условий совместности. Следовательно, на $n^2(k+\beta+2)$ элементов матриц A_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, k)$, B_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, q)$ налагается

$$\delta = \Delta - \psi = n^2(k-1) + 1 \tag{1.8}$$

условий.

Из (1.8) следует, что δ не зависит от β (при выполнении условия $k + \beta \geqslant q$). Следовательно, если $k \geqslant q$, то можно, не теряя общности, взять $\beta = 0$, т. е. выбрать матрицу $C(x)$ системы (0.2) в простейшем виде: $C(x) = C_0$, где C_0 — постоянная матрица. Если $k < q$, то наиболее простой вид матрицы $C(x)$ получается, если положить $\beta = q - k$.

Рассмотрим более детально уравнение (см. (1.7))

$$D_\nu = 0 \tag{1.9}$$

(ν — фиксированно). Как указывалось выше, каждый элемент матрицы D_ν представляет собой линейную функцию, вообще говоря, всех n^2 элементов матрицы P, т. е. матричное уравнение (1.9) эквивалентно системе *общего типа* из n^2 скалярных линейных однородных уравнений относительно n^2 элементов матрицы P. Налагая на такую систему одно условие совместности, можем затем выразить (n^2-1) элементов матрицы P через (например) элемент p_{nn}:

$$p_{ik}=q_{ik}p_{nn}; \qquad q_{nn}=1, \tag{1.10}$$

где постоянные q_{ik}, вообще говоря, различны.

Заменяя в матрице P все элементы p_{ik} через $q_{ik}p_{nn}$, непосредственно убеждаемся, что P в этом случае, вообще говоря, не является особой матрицей. Например, в случае второго порядка

$$\det P = p_{22}^2 \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Разумеется, все сказанное выше относится к уравнениям типа (1.7).

Пусть $k+\beta<q$. В этом случае появляются матричные уравнения типа

$$B_\nu P=0, \qquad \nu=k+\beta+1,\ k+\beta+2,\ \ldots,\ q. \tag{1.12}$$

Легко показать, что при этом условия совместности приводят к тому, что матрица P получается особой. Поэтому случай $k+\beta<q$ рассматривать не будем.

Полученные результаты суммирует следующая теорема.

Теорема 1. *Система* (0.1) *с матрицами* (1.2) *может быть заменой* (0.3) (*P — постоянная неособая матрица*) *сведена к системе* (0.2) *с матрицей* (1.3), *если на* $n^2(k+q+2)$ *элементов матриц* A_ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots, k)$, B_ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots, q)$ *наложено*

$$\delta=n^2(k-1)+1 \tag{1.13}$$

условий.

При этом, если $k\geqslant q$, то число δ не зависит от β (см. (1.3)) *и можно положить $\beta=0$, т. е. выбрать матрицу $C(x)$ в простейшем виде $C(x)=C_0$, где C_0 — постоянная матрица.*

Если же $k<q$, то число β нужно выбрать так, чтобы выполнялось $k+\beta\geqslant q$. Причем матрица $C(x)$ имеет в этом случае простейший вид, если выбрать $\beta=q-k$.

Рассматриваемый способ преобразования системы (0.1) особенно эффективен, если $k=q=1$ (см. (1.2)). В этом случае согласно (1.13) имеет место такое следствие.

Следствие 1. *Система* (0.1) *с матрицами* (1.2) $(k=q=1)$ *может быть заменой* (0.3) (*P — постоянная неособая матрица*) *сведена к системе* (0.2) *с матрицей $C(x)=C_0$ (C_0 — постоянная матрица), если на $4n^2$ элементов матриц A_0, A_1, B_0, B_1 наложено всего одно условие, т. е. $(4n^2-1)$ параметров остаются произвольными.*

2. Системы с периодическими коэффициентами. Пусть

$$A(x)=A_0+\sum_{\nu=1}^{k}(A_{\nu1}\sin\nu x+A_{\nu2}\cos\nu x),$$
$$B(x)=B_0+\sum_{\nu=1}^{q}(B_{\nu1}\sin\nu x+B_{\nu2}\cos\nu x), \tag{2.1}$$

где A_0, $A_{\nu1}$, $A_{\nu2}$, B_0, $B_{\nu1}$, $B_{\nu2}$ — постояннные матрицы.

Будем искать матрицу $C(x)$ в виде

$$C(x)=C_0+\sum_{\nu=1}^{\beta}(C_{\nu1}\sin\nu x+C_{\nu2}\cos\nu x). \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1), (2.2) в (0.4) и представляя везде произведение тригонометрических функций в виде алгебраической суммы, получаем

$$D_0 + \sum_{\xi=1}^{k+\beta} (D_{\xi 1} \sin \xi x + D_{\xi 2} \cos \xi x) - B_0 P - \sum_{\xi=1}^{q} (B_{\xi 1} P \sin \xi x + B_{\xi 2} P \cos \xi x) = 0, \tag{2.3}$$

где

$$D_0 = A_0 P C_0 + \frac{1}{2} \sum_{\eta=1}^{\eta_m} \sum_{\nu=1}^{2} A_{\eta\nu} P C_{\eta\nu}, \ \eta_m = \min\{k, \beta\},$$

$$\begin{aligned} D_{\xi 1} &= b_1(1,2) - b_1(2,1) - b_2(1,2) + b_2(2,1) + b_3(1,2) + \\ &\quad + b_3(2,1) + A_0 P C_{\xi 1} + A_{\xi 1} P C_0, \\ D_{\xi 2} &= b_1(1,1) + b_1(2,2) + b_2(1,1) + b_2(2,2) - b_3(1,1) + \\ &\quad + b_3(2,2) + A_0 P C_{\xi 2} + A_{\xi 2} P C_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$b_1(\varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\eta=1}^{k-\xi} A_{\eta+\xi,\varphi} P C_{\eta\gamma} \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant k-1). \tag{2.5}$$

$$b_2(\varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\eta=1+\xi}^{\eta'_{\max}} A_{\eta-\xi} P C_{\eta\gamma} \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant \beta - 1), \tag{2.6}$$

$$\eta'_{\max} = \min\{\beta, \ k + \xi\},$$

$$b_3(\varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\eta''_{\min}}^{\eta''_{\max}} A_{\xi-\eta,\varphi} P C_{\eta\gamma} \qquad (2 \leqslant \xi \leqslant \beta + k),$$

$$\eta''_{\min} = \max\{1, \ \xi - k\}; \qquad \eta''_{\max} = \min\{\beta, \ \xi - 1\}. \tag{2.7}$$

Причем $b_1(\varphi, \gamma)$, $b_2(\varphi, \gamma)$, $b_3(\varphi, \gamma)$ входят в выражения для $D_{\xi 1}$, $D_{\xi 2}$ только при значениях ξ, указанных в (2.5) — (2.7), $A_{\xi 1} P C_0$, $A_{\xi 2} P C_0$ входят при $1 \leqslant \xi \leqslant k$, $A_0 P C_{\xi 1}$, $A_0 P C_{\xi 2}$ входят при $1 \leqslant \xi \leqslant \beta$. Как видно из (2.4) — (2.7), в каждый элемент матриц D_0, $D_{\xi 1}$, $D_{\xi 2}$ входят все n^2 элементов матрицы P.

Дальнейшие рассуждения подобны проведенным в п. 1.

Собирая коэффициенты при $\sin \xi x$, $\cos \xi x$ в (2.3) и приравнивая их нулю, получим систему линейных однородных матричных уравнений относительно матрицы P. Эта система эквивалентна системе скалярных линейных однородных уравнений относительно $R = n^2$ элементов матрицы P. Так как число скалярных уравнений $N > R$ (см. ниже), то на систему скалярных уравнений нужно наложить $\Delta = N - R + 1$ условий совместности, *в которые войдут только элементы матриц* A_0, $A_{\nu 1}$, $A_{\nu 2}$, B_0, $B_{\nu 1}$, $B_{\nu 2}$, C_0, $C_{\nu 1}$, $C_{\nu 2}$.

Из системы алгебраических уравнений, даваемых условиями совместности, можно определить элементы матриц C_0, $C_{\nu 1}$, $C_{\nu 2}$. Так как число условий совместности Δ получается больше числа $\psi = n^2(1 + 2\beta)$ элементов матриц C_0, $C_{\nu 1}$, $C_{\nu 2}$ (см. ниже), то одновременно на $2n^2(k + q + 1)$ элементов матриц A_0, $A_{\nu 1}$, $A_{\nu 2}$, B_0, $B_{\nu 1}$, $B_{\nu 2}$ налагается $\delta = \Delta - \psi$ условий.

Ниже определяется δ и при данном δ наиболее простой возможный вид матрицы $C(x)$.

Пусть $k+\beta \geqslant q$. Тогда из уравнения (2.3) получаем следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{gathered} D_0 - B_0 P = 0, \\ D_{\xi 1} - B_{\xi 1} P = 0, \qquad \xi = 1, 2, \ldots, q, \\ D_{\xi 2} - B_{\xi 2} P = 0, \qquad \xi = 1, 2, \ldots, q, \\ D_{\xi 1} = 0, \qquad \xi = q+1,\ q+2, \ldots, k+\beta, \\ D_{\xi 2} = 0, \qquad \xi = q+1,\ q+2, \ldots, k+\beta. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Система (2.8) эквивалентна системе из $N = n^2[2(k+\beta)+1]$ скалярных линейных однородных уравнений относительно $R = n^2$ элементов матрицы P. Следовательно, на систему скалярных уравнений нужно наложить $\Delta = N - R + 1 = 2n^2(k+\beta)+1$ условий совместности. Следовательно, на $2n^2(k+q+2)$ элементов матриц A_0, $A_{\nu 1}$, $A_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$), B_0, $B_{\nu 1}$, $B_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, q$) налагается

$$\delta = \Delta - \psi = n^2(2k-1)+1 \tag{2.9}$$

условий.

Из (2.9) следует, что δ не зависит от β (при выполнении условия $k+\beta \geqslant q$). Следовательно, если $k \geqslant q$, то можно, не теряя общности, взять $\beta = 0$, т. е выбрать матрицу $C(x)$ системы (0.2) в простейшем виде: $C(x) = C_0$, где C_0 — постоянная матрица. Если $k < q$, то наиболее простой вид матрицы $C(x)$ получается, если положить $\beta = q-k$.

Случай $k+\beta < q$ не рассматриваем по тем же причинам, что и в п. 1.

Полученные результаты суммирует следующая теорема.

Теорема 2. *Система* (0.1) *с матрицами* (2.1) *может быть заменой* (0.3) (*P — постоянная неособая матрица*) *сведена к системе* (0.2) *с матрицей* (2.2), *если на* $2n^2(k+q+1)$ *элементов матриц* A_0, $A_{\nu 1}$, $A_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$), $B_0, B_{\nu 1}, B_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, q$) *наложено*

$$\delta = n^2(2k-1)+1 \tag{2.10}$$

условий.

При этом, если $k \geqslant q$, *то число* δ *не зависит от* β (*см.* (2.2)) *и можно положить* $\beta = 0$, *т. е. выбрать матрицу* $C(x)$ *в простейшем виде* $C(x) = C_0$. *где* C_0 — *постоянная матрица.*

Если же $k < q$, *то число* β *нужно выбрать так, чтобы выполнялось* $k+\beta \geqslant q$. *Причем матрица* $C(x)$ *имеет в этом случае простейший вид, если выбрать* $\beta = q-k$.

Пусть

$$A(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{k} A_{\nu 2}\cos \nu x; \qquad B(x) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{q} B_{\nu 2}\cos \nu x. \tag{2.11}$$

Для этого случая ищем матрицу $C(x)$ в виде

$$C(x) = C_0 + \sum_{\nu=1}^{\beta} C_{\nu 2}\cos \nu x. \tag{2.12}$$

Полагая в (2.3), (2.4), (2.8) $A_{\nu 1} = 0$, $B_{\nu 1} = 0$, $C_{\nu 1} = 0$, $D_{\xi 1} = 0$ и повторяя предыдущие рассуждения, легко показать, что справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Система* (0.1) *с матрицами* (2.11) *может быть заменой* (0.3) (*P — постоянная неособая матрица*) *сведена к системе* (0.2) *с матрицей* (2.12), *если на* $n^2(k+q+2)$ *элементов матриц* A_0, $A_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$), B_0, $B_{\nu 2}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, q$) *наложено*

$$\delta = n^2(k-1)+1 \tag{2.13}$$

условий.

При этом, если $k \geqslant q$, то число δ не зависит от β (см. (2.13)) и можно положить $\beta = 0$, т. е. выбрать матрицу $C(x)$ в простейшем виде $C(x) = C_0$, где C_0 — постоянная матрица.

Если же $k < q$, то число β нужно выбрать так, чтобы выполнялось $k + \beta \geqslant q$. Причем матрица $C(x)$ имеет в этом случае простейший вид, если выбрать $\beta = q - k$.

Рассматриваемый способ преобразования системы (0.1) особенно эффективен, если в (2.11) $k = q = 1$. В этом случае согласно (2.13) имеет место такое следствие.

Следствие 2. *Система* (0.1) *с матрицами* (2.11) ($k = q = 1$) *может быть заменой* (0.3) (P — *постоянная неособая матрица*) *сведена к системе* (0.2) *с матрицей* $C(x) = C_0$ (C_0 — *постоянная матрица*), *если на* $4n^2$ *элементов матриц* A_0, A_{12}, B_0, B_{12} *наложено всего одно условие, т. е.* $(4n^2 - 1)$ *параметров остаются произвольными.*

Поступила 18.XII 1970 г.,
после переработки — 24.II 1971 г.
Новосибирский государственный университет