УДК 539.126

Одна теорема о граничных свойствах одного класса функций, аналитических в плоскости с разрезом

О. П. Соломка

В связи с развитием теории дисперсионных соотношений [1] в последнее время интенсивно изучаются граничные свойства различных классов функций, аналитических в плоскости с разрезом.

В данной заметке рассмотрим класс функций с такими свойствами:

a) $F(t)$ голоморфна в плоскости с разрезом вдоль действительной оси от b до ∞. Для удобства выберем $b > 0$;

b) существуют целое $m \geqslant 0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ константа M_ε такие, что

$$|F(t)| \leqslant M_\varepsilon \exp[\varepsilon |t|^{\frac{1}{2}}][1 + (\Delta t)^{-m}],$$

где все t из плоскости с разрезом, Δt — расстояние от t до разреза;

c) $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$;

d) $F(t)$ действительна для действительных $t < b$.

Для класса таких функций Б. Нагелем [2] было получено дисперсионное соотношение такого вида:

$$F(t) = \lim \frac{1}{\pi} \int\limits_b^\infty \frac{c(\tau, \delta) \operatorname{Im} F(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \delta \to 0, \tag{1}$$

где

$$c(\tau, \delta) = \frac{\exp[-\delta \sqrt{\tau}]}{1 + \delta\tau}, \quad \delta > 0,$$

а $2i \operatorname{Im} F(\tau)$ — скачок функции $F(t)$ на разрезе, который существует как обобщенная функция конечного порядка [3]. В работе [2] была сформулирована теорема, которая позволяет изучать поведение обобщенной функции $\operatorname{Im} F(\tau)$ на $[b, \infty)$.

Теорема 1. *Если* $F(t)$ *имеет* $N+1$ $(N \geqslant 0)$ *нуль в плоскости с разрезом, тогда* $\operatorname{Im} F(\tau)$ *имеет по крайней мере* N *изменений знака на* $[b, \infty)$.

Эта теорема была доказана в случае, когда ∞ считалась нулем кратности $n+1$, т. е. если $\lim t^n F(t) = 0$, $t \to -\infty$. В данной заметке теорема 1 доказывается для общего случая.

Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_N$ — $N+1$ нуль функции $F(t)$. Тогда эту функцию можно переписать в таком виде:

$$F(t) = (t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_N)\, G(t) = P(t)\, G(t),$$

$F(t)$ в этом классе однозначно определяется разрывом на разрезе $2i \operatorname{Im} F(\tau)$, который существует как обобщенная функция конечного порядка [2]. Очевидно, что

$$\operatorname{Im} F(\tau) = P(\tau) \operatorname{Im} G(\tau). \tag{2}$$

Перепишем дисперсионное соотношение (1), подставляя значение $\operatorname{Im} F(\tau)$ из (2)

$$P(t)\, G(t) = \lim \frac{1}{\pi} \int_b^\infty \frac{c(\tau, \delta)\, P(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)}{\tau - t_k}\, d\tau, \quad \delta \to 0.$$

Положим $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, тогда

$$P(t_k)\, G(t_k) = \lim \frac{1}{\pi} \int_b^\infty \frac{c(\tau, \delta)\, P(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)}{\tau - t_k}\, d\tau, \quad \delta \to 0.$$

и обозначим $\dfrac{P(\tau)}{\tau - t_k} = Q_k(\tau)$. Тогда

$$\lim \int_b^\infty c(\tau, \delta)\, Q_k(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)\, d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Покажем, что если выполняется $N+1$ условие (3), то $\operatorname{Im} G(\tau)$ меняет знак $N+1$ раз. Это свойство можно сформулировать так:

если справедливо равенство (3), то не существует полинома $p(\tau)$ степени $\leqslant N$ такого, что $p(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)$ является положительной обобщенной функцией (т. е. положительной мерой [4]), за исключением случая $\operatorname{Im} G(\tau) \equiv 0$.

Действительно, предположим, что такой полином $p(\tau)$ существует. Тогда

$$\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta)\, p(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)\, d\tau = 0.$$

Это возможно только тогда, когда положительная мера $p(\tau) \operatorname{Im} G(\tau) \equiv 0$. Отсюда видно, что $\operatorname{Im} G(\tau)$ может быть только суммой дельта-функций в нулях полинома $p(\tau)$ или суммой производных дельта-функций до m-го порядка, если корень имеет кратность $m+1$. Эта сумма имеет самое большее — N произвольных констант. Поэтому, если $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$ нули полинома $p(\tau)$, то

$$\operatorname{Im} G(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i\, \delta(\tau - \tau_i) \quad \text{или} \quad \operatorname{Im} G(\tau) = \sum_i \sum_{m=0}^{m_i - 1} a_i \delta^{(m)}(\tau - \tau_i),$$

где m_i — кратность нуля τ_i.

Вычислим коэффициенты a_i в случае, когда

$$\operatorname{Im} G(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(\tau - \tau_i). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta) Q_k(\tau) \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(\tau - \tau_i) d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{5}$$

или

$$\begin{gathered}
\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta) Q_0(\tau) \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(\tau - \tau_i) d\tau = 0, \\
\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta) Q_1(\tau) \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(\tau - \tau_i) d\tau = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta) Q_N(\tau) \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(\tau - \tau_i) d\tau = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

$c(\tau, \delta) Q_k(\tau)$ можно рассматривать как основную функцию, а так как $\lim_{\delta \to 0} c(\tau, \delta) = 1$, то (6) перепишется так:

$$\begin{gathered}
a_0 Q_0(\tau_0) + a_1 Q_0(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_0(\tau_{N-1}) = 0, \\
a_0 Q_1(\tau_0) + a_1 Q_1(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_1(\tau_{N-1}) = 0, \\
a_0 Q_2(\tau_0) + a_1 Q_2(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_2(\tau_{N-1}) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 Q_N(\tau_0) + a_1 Q_N(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_N(\tau_{N-1}) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Мы получили однородную систему $N + 1$ уравнений с N неизвестными. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} Q_0(\tau_0) & Q_0(\tau_1) & \ldots & Q_0(\tau_{N-1}) \\ Q_1(\tau_0) & Q_1(\tau_1) & \ldots & Q_1(\tau_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_N(\tau_0) & Q_N(\tau_1) & \ldots & Q_N(\tau_{N-1}) \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Однородная система (7) имеет ненулевое решение только тогда, когда ранг матрицы A меньше количества неизвестных $r(A) < N$, т. е. когда определитель N-го порядка равен нулю. Если же $D_N \neq 0$, то система (7) имеет только нулевые решения.

Запишем определитель N-го (наивысшего) порядка, помня, что $Q_k(\tau) = \dfrac{P(\tau)}{\tau - t_k}$:

$$D_N = \begin{Vmatrix} \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_0} & \ldots & \dfrac{P(\tau_{N-1})}{\tau_{N-1} - t_0} \\ \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} & \ldots & \dfrac{P(\tau_{N-1})}{\tau_{N-1} - t_1} \\ \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_{N-1}} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_{N-1}} & \ldots & \dfrac{P(\tau_{N-1})}{\tau_{N-1} - t_{N-1}} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Вычислим сначала определитель II порядка

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_0} \\ \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} \end{vmatrix} = P(\tau_0)\, P(\tau_1) \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_0} \\ \dfrac{1}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_1} \end{vmatrix}}_{\Delta_2} = P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, \Delta_2,$$

$$D_2 = \frac{P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, (\tau_0 - \tau_1)\, (t_1 - t_0)}{(\tau_0 - t_0)\, (\tau_0 - t_1)\, (\tau_1 - t_0)\, (\tau_1 - t_1)} = \frac{(-1)\, P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, (\tau_1 - \tau_0)\, (t_1 - t_0)}{(\tau_0 - t_0)\, (\tau_0 - t_1)\, (\tau_1 - t_0)\, (\tau_1 - t_1)}; \tag{10}$$

$$\Delta_2 = \frac{D_2}{P(\tau_0)\, P(\tau_1)}. \tag{11}$$

Аналогично, определитель III порядка будет:

$$D_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_0} & \dfrac{P(\tau_2)}{\tau_2 - t_0} \\ \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} & \dfrac{P(\tau_2)}{\tau_2 - t_1} \\ \dfrac{P(\tau_0)}{\tau_0 - t_2} & \dfrac{P(\tau_1)}{\tau_1 - t_2} & \dfrac{P(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} \end{vmatrix} = P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, P(\tau_2) \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_0} & \dfrac{1}{\tau_2 - t_0} \\ \dfrac{1}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_1} & \dfrac{1}{\tau_2 - t_1} \\ \dfrac{1}{\tau_0 - t_2} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_2} & \dfrac{1}{\tau_2 - t_2} \end{vmatrix}}_{\Delta_3} =$$

$$= P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, P(\tau_2)\, \Delta_3.$$

Проводя дальнейшие вычисления, получим

$$D_3 = \frac{P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, P(\tau_2)\, (\tau_0 - \tau_2)\, (\tau_1 - \tau_2)\, (t_2 - t_0)\, (t_2 - t_1)}{(\tau_2 - t_0)\, (\tau_2 - t_1)\, (\tau_2 - t_2)\, (\tau_0 - t_2)\, (\tau_1 - t_2)} \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\tau_0 - t_0} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_0} \\ \dfrac{1}{\tau_0 - t_1} & \dfrac{1}{\tau_1 - t_1} \end{vmatrix}}_{\Delta_2} =$$

$$= \frac{P(\tau_0)\, P(\tau_1)\, P(\tau_2)\, (\tau_0 - \tau_2)\, (\tau_1 - \tau_2)\, (t_2 - t_0)\, (t_2 - t_1)}{(\tau_2 - t_0)\, (\tau_2 - t_1)\, (\tau_2 - t_2)\, (\tau_0 - t_2)\, (\tau_1 - t_2)} \, \frac{D_2}{P(\tau_0)\, P(\tau_1)}.$$

Так как $\dfrac{P(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} = Q_2(\tau_2)$, то

$$D_3 = \frac{(-1)^2 Q_2(\tau_2)\, (\tau_2 - \tau_0)\, (\tau_2 - \tau_1)\, (t_2 - t_0)\, (t_2 - t_1)}{(\tau_2 - t_0)\, (\tau_2 - t_1)\, (\tau_0 - t_2)\, (\tau_1 - t_2)}\, D_2,$$

$$D_3 = \frac{(-1)^2\, Q_2(\tau_2) \prod\limits_{i=0}^{1} (\tau_2 - \tau_i)\, (t_2 - t_i)}{\prod\limits_{i=0}^{1} (\tau_2 - t_i)\, (\tau_i - t_2)}\, D_2. \tag{12}$$

Видим, что $D_2 \neq 0$, $D_3 \neq 0$. Методом математической индукции легко получим

$$D_N = \frac{(-1)^{N-1} Q_{N-1}(\tau_{N-1}) \prod_{i=0}^{N-2} (\tau_{N-1} - \tau_i)(t_{N-1} - t_i)}{\prod_{i=0}^{N-2} (\tau_{N-1} - t_i)(\tau_i - t_{N-1})} D_{N-1} \tag{13}$$

и что $D_N \neq 0$. А это значит, что система (7) имеет только нулевое решение, т. е. все $a_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Мы получили, что $\operatorname{Im} G(\tau) = 0$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, не существует такого полинома $p(\tau)$ степени N, что $\operatorname{Im} G(\tau)\, p(\tau)$ является положительной обобщенной функцией. Отсюда $\operatorname{Im} G(\tau)$ на $[b, \infty)$ меняет свой знак $N+1$ раз. А так как $\operatorname{Im} F(\tau) = P(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)$, то $\operatorname{Im} F(\tau)$ меняет свой знак $N+1$ раз. Теорема 1 доказана.

В случае, когда

$$\operatorname{Im} G(\tau) = \sum_i \sum_{m=0}^{m_i - 1} a_i \delta^{(m)}(\tau - \tau_i), \tag{14}$$

где m_i обозначает кратность нуля τ_i полинома $p(\tau)$, для (5) имеем

$$\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta)\, Q_k(\tau) \sum_i \sum_{i=0}^{m_i - 1} a_i \delta^{(m)}(\tau - \tau_i)\, d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда $p(\tau)$ имеет один нуль кратности 2, а остальные — однократные. Тогда τ_0, $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_3, \ldots, \tau_{N-1}$, и

$$\operatorname{Im} G(\tau) = a_0 \delta(\tau - \tau_0) + a_1 \delta(\tau - \tau_1) + a_2 \delta'(\tau - \tau_1) + a_3 \delta(\tau - \tau_3) + \ldots + a_{N-1} \delta(\tau - \tau_{N-1}). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (3), получим

$$\lim_{\delta \to 0} \int_b^\infty c(\tau, \delta)\, Q_k(\tau)\, [a_0 \delta(\tau - \tau_0) + a_1 \delta(\tau - \tau_1) + a_2 \delta'(\tau - \tau_1) + a_3 \delta(\tau - \tau_3) + \ldots + a_{N-1} \delta(\tau - \tau_{N-1})]\, d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{17}$$

или

$$\begin{gathered}
a_0 Q_0(\tau_0) + a_1 Q_0(\tau_1) - a_2 Q_0'(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_0(\tau_{N-1}) = 0, \\
a_0 Q_1(\tau_0) + a_1 Q_1(\tau_1) - a_2 Q_1'(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_1(\tau_{N-1}) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 Q_N(\tau_0) + a_1 Q_N(\tau_1) - a_2 Q_N'(\tau_1) + \ldots + a_{N-1} Q_N(\tau_{N-1}) = 0.
\end{gathered}$$

Определитель N-го порядка имеет вид

$$D_N = \begin{vmatrix} Q_0(\tau_0) & Q_0(\tau_1) & -Q_0'(\tau_1) \ldots Q_0(\tau_{N-1}) \\ Q_1(\tau_0) & Q_1(\tau_1) & -Q_1'(\tau_1) \ldots Q_1(\tau_{N-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{N-1}(\tau_0) & Q_{N-1}(\tau_1) & -Q_{N-1}'(\tau_1) \ldots Q_{N-1}(\tau_{N-1}) \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Перепишем D_N

$$D_N = -\frac{1}{h}\begin{vmatrix} Q_0(\tau_0) & Q_0(\tau_1) & Q_0'(\tau_1)h \ldots Q_0(\tau_{N-1}) \\ Q_1(\tau_0) & Q_1(\tau_1) & Q_1'(\tau_1)h \ldots Q_1(\tau_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_{N-1}(\tau_0) & Q_{N-1}(\tau_1) & Q_{N-1}'(\tau_1)h \ldots Q_{N-1}(\tau_{N-1}) \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Используем равенство

$$f(\tau + h) = f(\tau) + f'(\tau)h + \ldots,$$

где h такое, что членами высшего порядка можно пренебречь. Тогда

$$hf'(\tau) = f(\tau + h) - f(\tau). \quad (20)$$

Применим (20) к (19). Тогда

$$D_N = -\frac{1}{h}\begin{vmatrix} Q_0(\tau_0) & Q_0(\tau_1) & Q_0(\tau_1 + h) - Q_0(\tau_1) & \ldots Q_0(\tau_{N-1}) \\ Q_1(\tau_0) & Q_1(\tau_1) & Q_1(\tau_1 + h) - Q_1(\tau_1) & \ldots Q_1(\tau_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ Q_{N-1}(\tau_0) & Q_{N-1}(\tau_1) & Q_{N-1}(\tau_1 + h) - Q_{N-1}(\tau_1) & \ldots Q_{N-1}(\tau_{N-1}) \end{vmatrix},$$

$$D_N = -\frac{1}{h}\begin{vmatrix} Q_0(\tau_0) & Q_0(\tau_1) & Q_0(\tau_1 + h) & \ldots Q_0(\tau_{N-1}) \\ Q_1(\tau_0) & Q_1(\tau_1) & Q_1(\tau_1 + h) & \ldots Q_1(\tau_{N-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ Q_{N-1}(\tau_0) & Q_{N-1}(\tau_1) & Q_{N-1}(\tau_1 + h) & \ldots Q_{N-1}(\tau_{N-1}) \end{vmatrix}.$$

Видим, что и в этом случае $D_N \neq 0$, ибо он сводится к случаю, рассмотренному выше, где все точки τ_i различны. Значит и здесь все $a_i = 0$. Теорема 1 имеет место.

Пусть $F(t)$ имеет кратные нули, например $t_0, t_1 = t_2 = t_3, t_4, t_5, \ldots, t_N$. Тогда $Q_k(t) = \dfrac{P(t)}{t - t_k}$ и $Q_1 = Q_2 = Q_3$, а в равенстве

$$\lim \int\limits_b^\infty c(\tau, \delta) Q_k(\tau) \operatorname{Im} G(\tau)\, d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots N,$$

имеем не $N + 1$, а $(N + 1) - 2$ разных равенств. Этот факт дает возможность уточнить теорему 1.

Теорема 1'. *Если $F(t)$ имеет $N + 1$ нуль в плоскости с разрезом, то $\operatorname{Im} F(\tau)$ меняет свой знак на $[b, \infty)$ по крайней мере $(N + 1) - \sum (j_k - 1)$ раз. Здесь j_k означает кратность нуля t_k.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958.
2. B. Hagel, Some remarks on properties of form pactors, Nuovo Cimento, **57**, 1968, 228—244.
3. Г. Г. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, «Мир», М., 1968.
4. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 1, Физматгиз, М., 1958.

Поступила 2.IV 1970 г.

Институт математики АН УССР